

具有极大时间约束的轨道交通系统的周期分析

王彩璐, 陶跃钢[†], 李志军, 杨 鹏

(河北工业大学 控制科学与工程学院, 天津 300130)

摘要: 运用极大-加代数方法研究具有极大时间约束的轨道交通系统的周期运行规律. 分别建立具有两个车站的双回路城际轨道交通系统和具有 n 个车站的单回路城市轨道交通系统的极大-加线性模型. 对于前者, 运用系统状态矩阵的周期性, 证明各个车站第 k 次与第 $(k+2)$ 次的发车时间间隔相同; 对于后者, 运用状态变量的线性替换, 证明在任何初始状态下, 系统经过一次循环便可进入周期稳态运行, 即列车连续两次到达同一车站的时间间隔相同. 周期时间分析有利于轨道交通系统列车时刻表的编排和周期运行方案的设计. 为验证本文结果的实用性和有效性, 给出周期时间分析在列车调度和线路规划中的应用例子.

关键词: 轨道交通系统; 极大-加线性模型; 周期性; 时间分析

中图分类号: O23

文献标识码: A

Periodic analysis for railway transport systems with maximum timing constraints

WANG Cai-lu, TAO Yue-gang[†], LI Zhi-jun, YANG Peng

(School of Control Science and Engineering, Hebei University of Technology, Tianjin 300130, China)

Abstract: This paper investigates the periodic operation regulations of railway transport systems with maximum timing constraints by using max-plus algebra. The max-plus linear model of the double-loop intercity railway transport system with two stations and the single-loop urban railway transport system with n stations are established, respectively. For the former, according to the periodicity of the state matrices, it is proven that the time interval between the k -th departure and the $(k+2)$ -th departure of trains are the same. And for the later, through the linear transformation of the state variables, it is proven that the steady-state regime is reached with any starting state after once cycle, i.e., the time interval between two successive arrival of a train at a station are the same. The periodic analysis of railway transport systems is helpful for scheduling train timetable and designing periodic running scheme. To verify the practicability and validity of the results, this paper presents application examples in the trains scheduling and traffic lines planning.

Key words: railway transport system; max-plus linear model; periodicity; time analysis

1 引言(Introduction)

轨道交通系统以运量大、速度快、安全可靠、准点舒适等优势, 已经成为现代综合交通体系的重要组成部分. 轨道交通系统由车站、线路、列车、信号、控制系统等一系列相关设施组成. 城际高速铁路系统和城市地下铁路系统都是现代化轨道交通系统. 列车周期化运行具有轨道铺设容易、运用灵活、规律性强、利用率高等优点, 是现代轨道交通的重要运输组织模式^[1]. 人们针对轨道交通系统中各类周期问题提出了一些研究方法. 例如, Zhong等引入微分进化算法设计最小化旅客平均等待时间的周期铁路系统时刻表^[2], Sheng运用傅里叶变换法分析简谐移动荷载下轨道周

期结构变化规律^[3], Zhang和Nie运用迭代逼近法计算确保列车按照规定方案运行的最小周期时间^[4], Morito等运用混合整数规划法确定高速铁路系统多周期车辆分配方案^[5].

极大-加代数是一个有着重要理论意义和应用价值的代数系统^[6-9]. 运用极大-加代数的特殊结构, 建立非线性轨道交通系统的线性模型, 并对系统实施定性和定量的控制与优化, 是研究轨道交通系统的一个有效方法. 例如, Olsder研究了列车调度问题^[10], van den Boom和De Schutter给出了列车延迟的最优恢复方式^[11], Vromans等分析了列车运行图的可靠性^[12], Goverde分析了列车运行图的稳定性^[13]. 轨道交通系

收稿日期: 2016-05-31; 录用日期: 2017-09-04.

[†]通信作者. E-mail: yuegangtao@hebut.edu.cn; Tel.: +86 22-60202297.

本文责任编辑: 赵千川.

国家自然科学基金项目(60774007, 61305101)资助.

Supported by National Natural Science Foundation of China (60774007, 61305101).

统的周期问题可转化为极大-加矩阵的特征问题. 关于极大-加代数上矩阵特征值和特征向量的刻画与计算可参见文献[14–22].

对于具有两个车站的双回路城际轨道交通系统和具有 n 个车站的单回路城市轨道交通系统, 本文利用 Petri 网^[23]描述两类轨道交通系统的运行过程, 并运用极大-加代数方法建立它们线性形式的动态方程. 在此基础上, 分析列车的周期运行规律, 编排列车运行时刻表, 设计列车周期运行方案.

本文第2节介绍研究轨道交通系统所需要的极大-加代数方法. 第3节和第4节分别研究具有两个车站的双回路城际轨道交通系统和具有 n 个车站的单回路城市轨道交通的周期性. 第5节给出轨道交通系统周期运行方案设计的应用例子. 第6节是本文的小结.

2 预备知识(Preliminaries)

本节介绍极大-加代数和极大-加代数上矩阵的相关概念. 未加注明的定义和符号源自文献[6–7].

$\mathbb{R}$ 是实数集. 在集合 $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ 上分别定义加法和乘法运算: 对于 $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$,

$$a \oplus b = \max\{a, b\}, \quad a \otimes b = a + b,$$

$(\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \oplus, \otimes)$ 构成一个代数系统, 称为极大-加代数, 记为 $\mathbb{R}_{\max}$. 在 $\mathbb{R}_{\max}$ 中, 零元为 $-\infty$, 用符号 ε 表示; 单位元为 0, 用符号 e 表示. 设 $a \in \mathbb{R}_{\max} \cup \{+\infty\}$, $a^{-1} = -a$ 表示 $\otimes$ 的逆运算.

$\mathbb{R}_{\max}^{m \times n}$ 表示 $\mathbb{R}_{\max}$ 上 $m \times n$ 矩阵的集合. 在 $\mathbb{R}_{\max}^{m \times n}$ 上分别定义加法、乘法和标量运算: 对于 $A = (A_{ij}), B = (B_{ij}) \in \mathbb{R}_{\max}^{m \times n}$,

$$(A \oplus B)_{ij} = A_{ij} \oplus B_{ij};$$

对于 $A = (A_{ij}) \in \mathbb{R}_{\max}^{m \times p}, B = (B_{ij}) \in \mathbb{R}_{\max}^{p \times n}$,

$$(A \otimes B)_{ij} = \bigoplus_{l=1}^p A_{il} \otimes B_{lj};$$

对于 $a \in \mathbb{R}_{\max}, A = (A_{ij}) \in \mathbb{R}_{\max}^{m \times n}$,

$$(a \circ A)_{ij} = a \otimes A_{ij}.$$

在不引起混淆的情况下, 乘法运算符号 $\otimes$ 和标量运算符号 $\circ$ 通常省略不写.

$\mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$ 中 l 个相同矩阵的乘积记为幂形式

$$A^l = \underbrace{A \otimes A \otimes \cdots \otimes A}_{l \uparrow}.$$

方阵 A 的 $*$ 运算定义为 $A^* = I_n \oplus A \oplus A^2 \oplus \cdots$, 其中

$$I_n = \begin{pmatrix} e & \varepsilon & \cdots & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \cdots & \varepsilon \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon & \varepsilon & \cdots & e \end{pmatrix}$$

是 $\mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$ 中的单位矩阵.

$\mathbb{R}_{\max}^{n \times 1}$ 表示 $\mathbb{R}_{\max}$ 上 n 维列向量集合, 简记为 $\mathbb{R}_{\max}^n$, 其中零向量为 $(\varepsilon \ \varepsilon \ \cdots \ \varepsilon)^T$. 设 $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$, 如果存在元素 $\lambda \in \mathbb{R}_{\max}$ 和非零向量 $v \in \mathbb{R}_{\max}^n$ 使得

$$Av = \lambda v,$$

那么称 λ 为 A 的一个特征值, 而 v 为 A 的属于特征值 λ 的一个特征向量. Olsder 等证明了极大-加代数上任意 n 阶方阵至少存在一个特征值^[15,18]. 设 λ 为矩阵 A 一个特征值, 若存在 $n_0 \in \mathbb{N}$ (自然数集) 和 $d \in \mathbb{N}^+$ (正整数集) 使得

$$A^{k+d} = \lambda^d A^k, \quad \forall k \geq n_0,$$

则称 A 为 d 阶周期矩阵^[14]. 极大-加代数上周期矩阵具有唯一的特征值^[16].

对于 $A = (A_{ij}) \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$, A 的前趋图 $\mathcal{G}(A)$ 是一个有结点集 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的赋权有向图, 其中当 $A_{ij} \neq \varepsilon$ 时, 有一条从结点 j 到结点 i 且权重为 A_{ij} 的有向弧; 当 $A_{ij} = \varepsilon$ 时, 没有从结点 j 到结点 i 的有向弧. $\mathcal{G}(A)$ 的极大回路均值是矩阵 A 的最大特征值.

3 城际轨道交通系统(Intercity railway transport system)

3.1 开环系统(Open-loop system)

考虑如图1所示的城际轨道交通系统, 其中 M_1 和 M_2 是位于两个不同城市的车站. 这一轨道交通系统记为 $\mathcal{S}_1$. 假定有若干列车在两个城市之间往返行驶. 从 M_1 到 M_2 的线路称为上行线路, 从 M_2 到 M_1 的线路称为下行线路.

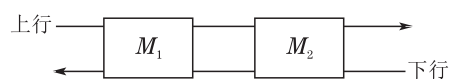


图 1 城际轨道交通系统 $\mathcal{S}_1$

Fig. 1 Intercity railway transport system $\mathcal{S}_1$

列车在上(下)行线路的运行过程为

进入上(下)行线路,
↓
在 $M_1(M_2)$ 停靠, 等待乘客上车,
↓
从 $M_1(M_2)$ 出发,
↓
在上(下)行线路上行驶,
↓
到达 $M_2(M_1)$,
↓
在 $M_2(M_1)$ 停靠, 等待乘客下车,
↓
驶离上(下)行线路.

列车运行满足约束条件:

- i) 每个车站同一时间至多停靠1辆列车,
ii) 每个车站每天发送和返回列车的次数相同.

具体而言,上行线路的第 k 次列车没有离开 M_1 之前,下行线路的第 k 次列车不能进站;下行线路的第 k 次列车没有离开 M_2 之前,上行线路的第 k 次列车不能进站.

设列车在车站 M_1 和 M_2 的停靠时间分别为3 min和2 min,在上行线路和下行线路上的行驶时间分别为30 min和35 min,则系统 S_1 的列车运行图如图2所示,其中4个结点分别表示上行线路的列车从 M_1 出发,上行线路的列车到达 M_2 ,下行线路的列车从 M_2 出发,下行线路的列车到达 M_1 . u_1 和 y_1 分别表示列车进入和驶离上行线路, u_2 和 y_2 分别表示列车进入和驶离下行线路.

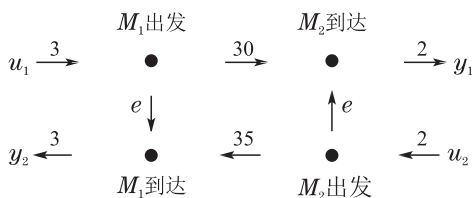


图2 系统 S_1 的列车运行图

Fig. 2 Train diagram of system S_1

设 $x_1(k)$ 表示上行线路的第 k 次列车从 M_1 出发的时刻, $x_2(k)$ 表示上行线路的第 k 次列车到达 M_2 的时刻, $x_3(k)$ 表示下行线路的第 k 次列车从 M_2 出发的时刻, $x_4(k)$ 表示下行线路的第 k 次列车到达 M_1 的时刻, $u_1(k)$ 和 $y_1(k)$ 分别表示第 k 次列车进入和驶离上行线路的时刻, $u_2(k)$ 和 $y_2(k)$ 分别表示第 k 次列车进入和驶离下行线路的时刻, 其中 $k \in \mathbb{N}^+$, 则系统 S_1 的运行过程可表为非线性动态方程组

$$\begin{cases} x_1(k) = u_1(k) + 3, \\ x_2(k) = \max\{x_1(k) + 30, x_3(k)\}, \\ x_3(k) = u_2(k) + 2, \\ x_4(k) = \max\{x_3(k) + 35, x_1(k)\}, \\ y_1(k) = x_2(k) + 2, \\ y_2(k) = x_4(k) + 3. \end{cases}$$

运用极大-加代数上矩阵运算可将上述非线性动态方程组转化为极大-加线性动态方程组

$$\begin{cases} x(k) = Ax(k) \oplus Bu(k), \\ y(k) = Cx(k), \end{cases} \quad (1)$$

其中状态、输入和输出向量分别为

$$x(k) = (x_1(k) \ x_2(k) \ x_3(k) \ x_4(k))^T, \\ u(k) = \begin{pmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{pmatrix}, \ y(k) = \begin{pmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{pmatrix};$$

状态、输入和输出矩阵分别为

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 30 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 35 & \varepsilon \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 3 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 2 \\ \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}, \\ C = \begin{pmatrix} \varepsilon & 2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 3 \end{pmatrix}.$$

经计算, 有

$$\begin{aligned} x(k) &= Ax(k) \oplus Bu(k) = \\ A(Ax(k) \oplus Bu(k)) \oplus Bu(k) &= \\ A^2x(k) \oplus ABu(k) \oplus Bu(k) &= \\ (A \oplus I)Bu(k). \end{aligned}$$

3.2 闭环系统(Closed-loop system)

规定下行线路的第 $(k-1)$ 次列车离开 M_1 后, 上行线路的第 k 次列车立即进入; 上行线路的第 $(k-1)$ 次列车离开 M_2 后, 下行线路的第 k 次列车立即进入. 这一规定相当于对系统(1)施加输出反馈

$$\begin{cases} u_1(k) = y_2(k-1), \\ u_2(k) = y_1(k-1), \end{cases}$$

即 $u(k) = Fy(k-1)$, 其中输出反馈矩阵为

$$F = \begin{pmatrix} \varepsilon & e \\ e & \varepsilon \end{pmatrix}.$$

施加反馈 F 后, 系统 S_1 的Petri网如图3所示, 其中4个变迁分别对应图2中相应位置的4个结点. 这一闭环轨道交通系统记为 $S_1(F)$.

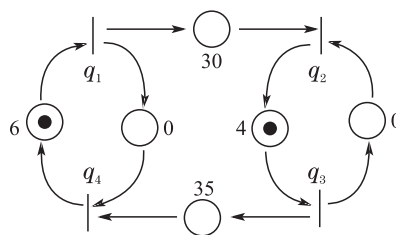


图3 系统 $S_1(F)$ 的Petri网

Fig. 3 Petri net of system $S_1(F)$

经计算, 有

$$\begin{aligned} x(k) &= (A \oplus I)Bu(k) = \\ (A \oplus I)BFy(k-1) &= \\ (A \oplus I)BFCx(k-1). \end{aligned}$$

令

$$M = (A \oplus I)BFC = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 6 \\ \varepsilon & 4 & \varepsilon & 36 \\ \varepsilon & 4 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 39 & \varepsilon & 6 \end{pmatrix},$$

则系统 $S_1(F)$ 的运行过程可表为极大-加线性动态方程

$$x(k) = Mx(k-1), \ k = 1, 2, \dots,$$

其中 $x(0)$ 为初始状态. 设 $x(0) = (e \ e \ e \ e)^T$, 则

$$x(1) = Mx(0) = (6 \ 36 \ 4 \ 39)^T,$$

$$x(2) = Mx(1) = (45 \ 75 \ 40 \ 75)^T,$$

$$x(3) = Mx(2) = (81 \ 111 \ 79 \ 114)^T = 75x(1),$$

$$x(4) = Mx(3) = (120 \ 150 \ 115 \ 150)^T = 75x(2).$$

$\vdots$

一般地, 因为 $M^6 = 75M^4$, 所以 M 为 2 阶周期矩阵, 并且 $M^{k+2} = 75M^k$, $k = 4, 5, \dots$, 从而

$$x(k+2) = M^{k+2}x(0) = 75M^kx(0) = 75x(k),$$

即每个车站每间隔 75 min 发出或到达 2 辆列车. 若两个车站列车的始发时间均为 6: 00, 则从 M_1 到 M_2 和从 M_2 到 M_1 的列车运行时刻表分别如表 1 和表 2 所示.

表 1 $M_1 \rightarrow M_2$ 的时刻表

Table 1 Time table from M_1 to M_2

车次	发车时刻	到达时刻	运行时间/min
上 1	6: 03	6: 33	30
上 2	6: 43	7: 13	30
上 3	7: 18	7: 48	30
上 4	7: 58	8: 28	30
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

表 2 $M_2 \rightarrow M_1$ 的时刻表

Table 2 Time table from M_2 to M_1

车次	发车时刻	到达时刻	运行时间/min
下 1	6: 02	6: 37	35
下 2	6: 37	7: 12	35
下 3	7: 17	7: 52	35
下 4	7: 52	8: 27	35
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

4 城市轨道交通系统(Urban railway transport system)

4.1 开环系统(Open-loop system)

图 4 是一个开环城市轨道交通系统, 其中 $M_1, M_2, \dots, M_n$ 为线路上依次排列的 n 个车站, L 为通过这些车站的列车. 这一开环轨道交通系统记为 $\mathcal{S}_2$.

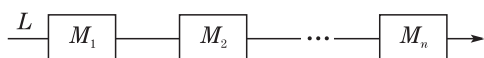


图 4 开环城市轨道交通系统 $\mathcal{S}_2$

Fig. 4 Open-loop urban railway transport system $\mathcal{S}_2$

设列车在车站 M_i 的停靠时间为 ρ_i , 从车站 M_i 到车站 M_{i+1} 的行驶时间为 $\alpha_{i+1,i}$ ($1 \leq i \leq n-1$). 假定列

车之间彼此不可超越, 即通过车站 M_i 的第 k 次列车必须要在第 $(k-1)$ 次列车之后, 则系统 $\mathcal{S}_2$ 的运行过程可由如图 5 所示的 Petri 网描述, 其中 u 表示列车进入行驶线路, 变迁 q_i 表示列车到达车站 M_i , y 表示列车离开行驶线路, 参数 $t_i = \rho_i + \alpha_{i+1,i}$ 表示列车到达车站 M_i 和到达车站 M_{i+1} 的时间间隔.

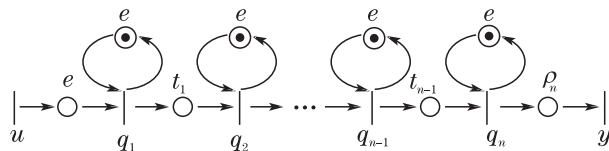


图 5 系统 $\mathcal{S}_2$ 的 Petri 网

Fig. 5 Petri net of system $\mathcal{S}_2$

设 $x_i(k)$ 为第 k 次列车到达车站 M_i 的时刻, $u(k)$ 为第 k 次列车进入行驶线路的时刻, $y(k)$ 为第 k 次列车离开行驶线路的时刻, 其中 $k \in \mathbb{N}^+$, $x_i(0)$ 为初始状态, 则系统 $\mathcal{S}_2$ 的运行过程可表为非线性动态方程组

$$\begin{cases} x_1(k) = \max\{u(k), x_1(k-1)\}, \\ x_i(k) = \max\{x_{i-1}(k) + t_{i-1}, x_i(k-1)\}, \\ y(k) = x_n(k) + \rho_n. \end{cases}$$

运用极大-加代数上矩阵运算可将上述非线性动态方程组转化为极大-加线性动态方程组

$$\begin{cases} x(k) = A_0x(k) \oplus A_1x(k-1) \oplus Bu(k), \\ y(k) = Cx(k), \end{cases} \quad (2)$$

其中 $x(k) = (x_1(k) \ x_2(k) \ \dots \ x_n(k))^T$, 状态、输入和输出矩阵分别为

$$A_0 = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \dots & \varepsilon & \varepsilon \\ t_1 & \varepsilon & \dots & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & t_2 & \dots & \varepsilon & \varepsilon \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \varepsilon & \varepsilon & \dots & t_{n-1} & \varepsilon \end{pmatrix}, \quad A_1 = I_n, \\ B = (e \ \varepsilon \ \dots \ \varepsilon)^T, \quad C = (\varepsilon \ \dots \ \varepsilon \ \rho_n).$$

迭代方程(2)可得

$$x(k) = A_0^*A_1x(k-1) \oplus A_0^*Bu(k), \quad (3)$$

其中 $A_0^* = I_n \oplus A_0 \oplus A_0^2 \oplus \dots \oplus A_0^{n-1}$.

4.2 闭环系统(Closed-loop system)

图 6 是一个闭环城市轨道交通系统, 其中 $M_1, M_2, \dots, M_n$ 为线路上依次排列的 n 个车站, 且 M_n 与 M_1 相连. 例如, 北京地铁 2 号线就是这种闭环轨道交通系统.

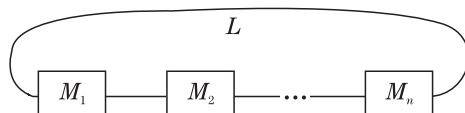


图 6 闭环城市轨道交通系统 $\mathcal{S}_2(K)$

Fig. 6 Closed-loop urban railway transport system $\mathcal{S}_2(K)$

设 α_{1n} 表示列车从车站 M_n 到车站 M_1 的行驶时间, 且 $t_n = \rho_n + \alpha_{1n}$, 则车站 M_n 与 M_1 相连意味着对开环系统(2)施加输出反馈

$$u(k) = Ky(k-1), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (4)$$

其中 $K = \alpha_{1n}$. 施加反馈 K 后, 系统 $\mathcal{S}_2$ 的Petri网如图7所示. 这一闭环轨道交通系统记为 $\mathcal{S}_2(K)$.

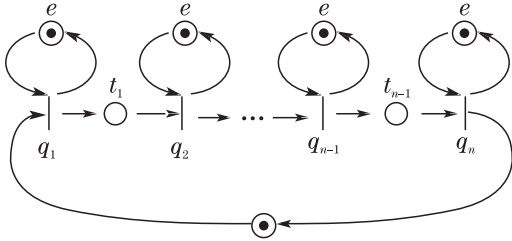


图7 系统 $\mathcal{S}_2(K)$ 的Petri网

Fig. 7 Petri net of system $\mathcal{S}_2(K)$

将式(4)代入式(3), 有

$$\begin{aligned} x(k) &= A_0^* A_1 x(k-1) \oplus \alpha_{1n} A_0^* B y(k-1) = \\ &= A_0^* A_1 x(k-1) \oplus \alpha_{1n} A_0^* B C x(k-1) = \\ &= A_0^* (A_1 \oplus \alpha_{1n} B C) x(k-1). \end{aligned}$$

令

$$D = A_0^* (A_1 \oplus \alpha_{1n} B C),$$

则系统 $\mathcal{S}_2(K)$ 的运行过程可表为极大-加线性动态方程

$$x(k) = Dx(k-1), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (5)$$

其中 $x(0)$ 为初始状态, $T_{ij} = \bigotimes_{l=i}^j t_l$,

$$D = \begin{pmatrix} e & \varepsilon & \varepsilon & \cdots & \varepsilon & t_n \\ t_1 & e & \varepsilon & \cdots & \varepsilon & t_1 t_n \\ T_{12} & t_2 & e & \cdots & \varepsilon & T_{12} t_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ T_{1,n-2} & T_{2,n-2} & T_{3,n-2} & \cdots & e & T_{1,n-2} t_n \\ T_{1,n-1} & T_{2,n-1} & T_{3,n-1} & \cdots & t_{n-1} & T_{1n} \end{pmatrix}.$$

下面分析系统 $\mathcal{S}_2(K)$ 的周期运行规律.

命题1 动态方程

$$\begin{aligned} x(k) &= \bar{D}x(k-1), \quad k = 1, 2, \dots, \\ z(k) &= T_{1n}z(k-1), \quad k = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

满足

$$x(k) = \alpha_{1n} T_{1n}^{-1} \xi z(k), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (6)$$

其中 $x(k) \in \mathbb{R}_{\max}^n$, $z(k) \in \mathbb{R}_{\max}$, $x(0)$ 和 $z(0)$ 为初值,

$$\bar{D} = \begin{pmatrix} \varepsilon & \cdots & \varepsilon & t_n \\ \varepsilon & \cdots & \varepsilon & t_1 t_n \\ \varepsilon & \cdots & \varepsilon & T_{12} t_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \varepsilon & \cdots & \varepsilon & T_{1,n-1} t_n \end{pmatrix}, \quad \xi = \begin{pmatrix} e \\ t_1 \\ T_{12} \\ \vdots \\ T_{1,n-1} \end{pmatrix}.$$

证 由 $\bar{D}$ 和 ξ 的定义可知

$$\bar{D} = \alpha_{1n} \xi C \text{ 且 } \bar{D} \xi = T_{1n} \xi,$$

其中 C 为系统(2)的输出矩阵. 后一等式表明 T_{1n} 是 $\bar{D}$ 的一个特征值, 而 ξ 是 $\bar{D}$ 的属于特征值 T_{1n} 的一个特征向量. 对于任意 $z(0) \in \mathbb{R}_{\max}$, 取

$$x(0) = (x_j(0)) \in \mathbb{R}_{\max}^n, \quad x_n(0) = \rho_n^{-1} z(0),$$

则 $Cx(0) = z(0)$. 令 $\eta = \alpha_{1n} T_{1n}^{-1} \xi$, 则

$$\begin{aligned} x(1) &= \bar{D}x(0) = \alpha_{1n} \xi Cx(0) = \\ &= \alpha_{1n} \xi z(0) = T_{1n} \eta z(0) = \eta z(1). \end{aligned}$$

因此, 对于 $k = 2, 3, \dots$,

$$\begin{aligned} x(k) &= \bar{D}x(k-1) = \cdots = \\ &= \bar{D}^{k-1}x(1) = \bar{D}^{k-1}\eta z(1) = \alpha_{1n} \bar{D}^{k-1}\xi z(0) = \\ &= \alpha_{1n} T_{1n}^{k-1}\xi z(0) = T_{1n}^k \eta z(0) = \eta z(k). \end{aligned}$$

下面证明系统(5)在任何初始状态下, 经过一次循环便可进入以 T_{1n} 为周期的稳态运行模式.

命题2 系统(5)对于任意初始状态 $x(0)$ 满足

$$x(k) = T_{1n}x(k-1), \quad k = 2, 3, \dots. \quad (7)$$

证 对于任意 $x(0) \in \mathbb{R}_{\max}^n$, 有

$$x(1) = Dx(0) := (x_j(1)), \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

经计算可得

$$x_1(1) \leq x_2(1) \leq \cdots \leq x_n(1).$$

于是

$$Dx(k) = \bar{D}x(k), \quad k = 1, 2, \dots.$$

由式(6)可知, 对于 $k = 2, 3, \dots$,

$$\begin{aligned} T_{1n}x(k-1) &= \\ T_{1n}\eta z(k-1) &= \eta z(k) = x(k). \end{aligned}$$

命题2表明, 列车每间隔 T_{1n} 个时间单位到达车站 $M_i (1 \leq i \leq n)$ 一次. 列车连续两次到达同一车站的时间间隔相同. 这样的运行模式称为周期稳态运行. 列车周期化运行有利于优化轨道交通系统不同线路之间换乘的协调配合, 提升轨道交通运输服务水平, 更加充分地发挥轨道交通的优势.

值得一提的是, 周期化运行模式便于列车运行时刻表的计算. 由方程(7)迭代可得

$$x(k) = T_{1n}^{k-1}x(1) = T_{1n}^{k-1}Dx(0). \quad (8)$$

由方程(5)迭代可得

$$x(k) = D^k x(0). \quad (9)$$

在计算列车到站时刻时, 式(8)把式(9)中矩阵 D 的乘方运算转化为关于周期 T_{1n} 的标量运算.

5 应用举例(Application)

下面给出两个数值例子来说明本文结果在轨道交通系统列车调度(例1)和线路规划(例2)中的应用.

例 1 考虑如图8所示的由4个车站组成的轨道交通系统 $\mathcal{S}_3$. 设列车在车站 M_1, M_2, M_3 和 M_4 的停靠时间分别为

$$\rho_1 = 2, \rho_2 = 3, \rho_3 = 1, \rho_4 = 3. \quad (10)$$

列车在各路段上的行驶时间依次为

$$\alpha_{21} = 10, \alpha_{32} = 12, \alpha_{43} = 15, \alpha_{14} = 8, \quad (11)$$

则 $t_1 = 12, t_2 = 15, t_3 = 16, t_4 = 11$. 设

$$x(k) = (x_1(k) \ x_2(k) \ x_3(k) \ x_4(k))^T,$$

则系统 $\mathcal{S}_3$ 的运行过程可表为极大-加线性动态方程

$$x(k) = Dx(k-1), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (12)$$

其中

$$D = \begin{pmatrix} e & \varepsilon & \varepsilon & 11 \\ 12 & e & \varepsilon & 23 \\ 27 & 15 & e & 38 \\ 43 & 31 & 16 & 54 \end{pmatrix}.$$

如果将列车从 M_1 首发的时刻设为0, 那么首次到达车站 M_2, M_3 和 M_4 的时刻依次为12, 27, 43, 即方程(12)的初始状态为 $x(0) = (0 \ 12 \ 27 \ 43)^T$. 于是

$$x(1) = Dx(0) = (54 \ 66 \ 81 \ 97)^T = 54x(0),$$

$$x(2) = Dx(1) = (108 \ 120 \ 135 \ 151)^T = 54x(1),$$

$\vdots$

$$x(k) = 54x(k-1), \quad k = 1, 2, \dots,$$

即列车每54 min到达车站 $M_i (1 \leq i \leq n)$ 一次.

为了方便乘客出行, 要求车站每间隔10 min至少发出一个车次. 下面计算满足此运营需求的行车线路上所需列车的最少数量. 设 M_1 每10 min发出一辆列车, 则第 l 辆列车首次到达各站的时间为 $l^{10}x(0)$, 而第1辆列车第2次到达各站的时间最迟为

$$x(1) = 54x(0).$$

为保证10 min内有列车发出, 列车第2次到站时间不超过首次到站时间与等候时间之和, 即

$$x(1) = 54x(0) \leq 10l^{10}x(0).$$

将上式写为传统加法和乘法运算表示形式

$$54 \leq 10 + 10 \times l.$$

经计算可得 $l \geq 4.4$. 也就是说, 该线路上至少需要5辆列车配合行驶, 才能满足运营需求. 在旅客出行高峰期可根据列车行驶时间的变化适当调整运行方案, 例如增加列车数量或缩短发车时间间隔.

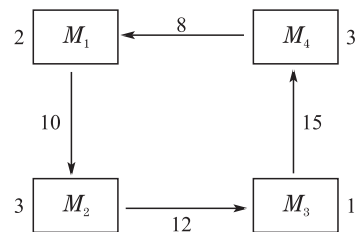


图 8 轨道交通系统 $\mathcal{S}_3$

Fig. 8 Railway transport system $\mathcal{S}_3$

例 2 设系统 $\mathcal{S}_3$ 的4个车站由如图9所示8条轨道相连, 且列车在各车站的停靠时间以及在各路段的行驶时间分别如式(10)和式(11)所示. 这一轨道交通系统记为 $\mathcal{S}_4$. 假定每条轨道上各有一辆列车按照规定线路行驶, 且满足约束条件:

- 1) 在同一线路上行驶的列车不可彼此超越,
- 2) 列车在行驶过程中不可改变路线.

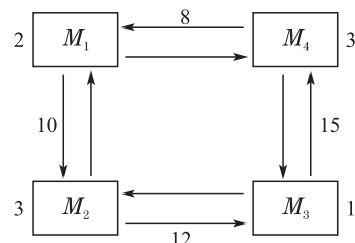


图 9 轨道交通系统 $\mathcal{S}_4$

Fig. 9 Railway transport system $\mathcal{S}_4$

下面列举系统 $\mathcal{S}_4$ 的3个线路规划方案.

方案 1

1号线: $M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow M_3 \rightarrow M_4 \rightarrow M_1$.

2号线: $M_4 \rightarrow M_3 \rightarrow M_2 \rightarrow M_1 \rightarrow M_4$.

设 $x_{ij}(k)$ 表示车站 M_i 第 k 次向车站 M_j 发出列车的时刻, 且

$$x(k) = (x_{12}(k) \ x_{23}(k) \ x_{34}(k) \ x_{41}(k) \ x_{14}(k) \ x_{43}(k) \ x_{32}(k) \ x_{21}(k))^T,$$

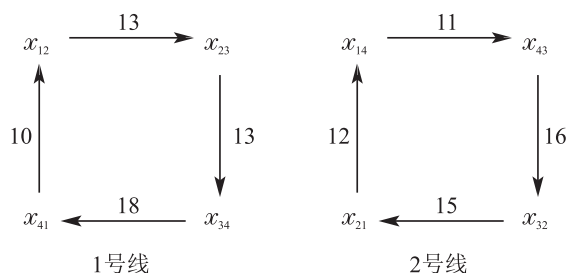
则系统 $\mathcal{S}_4$ 的运行过程可表为极大-加线性动态方程

$$x(k) = A_1 x(k-1), \quad k = 1, 2, \dots,$$

其中 $x(0)$ 为初始状态,

$$A_1 = \begin{pmatrix} e & \varepsilon & \varepsilon & 10 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 13 & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 13 & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 18 & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon & 12 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 11 & e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 16 & e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 15 & e \end{pmatrix}.$$

矩阵 A_1 的前趋图 $\mathcal{G}(A_1)$ 如图10所示.

图 10 矩阵 A_1 的前趋图 $\mathcal{G}(A_1)$ Fig. 10 Precedence graph $\mathcal{G}(A_1)$

经计算, 1号线和2号线的回路均值均为13.5, 即发车时间间隔均为13 min 30 s.

方案2

1号线: $M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow M_3 \rightarrow M_2 \rightarrow M_1$.

2号线: $M_1 \rightarrow M_4 \rightarrow M_3 \rightarrow M_4 \rightarrow M_1$.

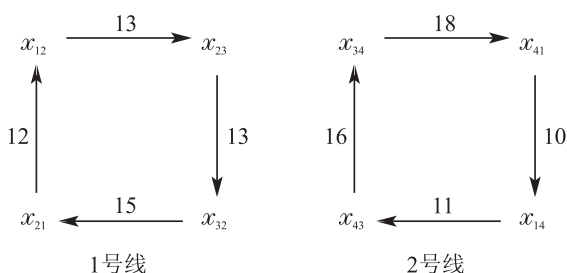
若列车按照方案2的线路行驶, 则系统 $\mathcal{S}_4$ 的运行过程可表为极大-加线性动态方程

$$x(k) = A_2 x(k-1), \quad k = 1, 2, \dots,$$

其中 $x(0)$ 为初始状态,

$$A_2 = \begin{pmatrix} e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 12 \\ 13 & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon & 16 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 18 & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 10 & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 11 & e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 13 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 15 & e \end{pmatrix}.$$

矩阵 A_2 的前趋图 $\mathcal{G}(A_2)$ 如图11所示.

图 11 矩阵 A_2 的前趋图 $\mathcal{G}(A_2)$ Fig. 11 Precedence graph $\mathcal{G}(A_2)$

经计算, 1号线和2号线的回路均值分别为13.25和13.75, 即发车时间间隔分别为13 min 15 s和13 min 45 s.

方案3

1号线: $M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow M_1$.

2号线: $M_2 \rightarrow M_3 \rightarrow M_2$.

3号线: $M_3 \rightarrow M_4 \rightarrow M_3$.

4号线: $M_4 \rightarrow M_1 \rightarrow M_4$.

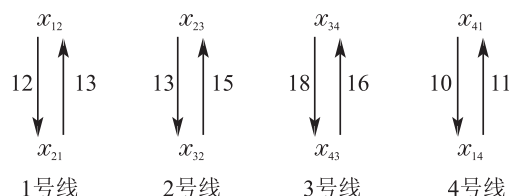
若列车按照方案3的线路行驶, 则系统 $\mathcal{S}_4$ 的运行过程可表为极大-加线性动态方程

$$x(k) = A_3 x(k-1), \quad k = 1, 2, \dots,$$

其中 $x(0)$ 为初始状态,

$$A_3 = \begin{pmatrix} e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 13 \\ \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 15 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon & 16 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e & 11 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 10 & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 18 & \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 13 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon \\ 12 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e \end{pmatrix}.$$

矩阵 A_3 的前趋图 $\mathcal{G}(A_3)$ 如图12所示.

图 12 矩阵 A_3 的前趋图 $\mathcal{G}(A_3)$ Fig. 12 Precedence graph $\mathcal{G}(A_3)$

经计算, 1号线的回路均值为12, 即发车时间间隔为12 min; 2号线的回路均值为14, 即发车时间间隔为14 min; 3号线的回路均值为17, 即发车时间间隔为17 min; 4号线的回路均值为10.5, 即发车时间间隔为10 min 30 s.

根据具体情况, 可以选择不同的线路规划方案. 例如, 若各车站之间的客流量基本相同, 则可选择各车站发车时间间隔均相同的方案1. 若车站 M_1 和 M_4 (或 M_1 和 M_2)之间的客流量较大, 则可选择方案3. 与方案1和方案2相比, 在相同时间内, 方案3在车站 M_1 和 M_4 (或 M_1 和 M_2)之间发送更多的列车, 以运送更多的旅客.

6 结论(Conclusions)

运用Petri网和极大-加代数方法建立了两类非线性轨道交通系统的线性模型, 并得到了周期运行规律: 具有两个车站的双回路城际轨道交通系统, 各个车站第 k 次与第 $(k+2)$ 次的发车时间间隔相同; 具有 n 个车站的单回路城市轨道交通系统, 列车连续两次到达同一车站的时间间隔相同. 同时, 运用周期运行规律来编排列车运行时刻表, 规划行车线路, 并计算线路所需列车数量.

参考文献(References):

- [1] LIEBCHEN C, MÖHRING RH. A case study in periodic timetabling [J]. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, 2002, 66(6): 1-14.

- [2] ZHONG J, SHEN M, ZHANG J, et al. A differential evolution algorithm with dual populations for solving periodic railway timetable scheduling problem [J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2013, 17(4): 512 – 527.
- [3] SHENG X. Generalization of the Fourier transform-based method for calculating the response of a periodic railway track subject to a moving harmonic load [J]. *Journal of Modern Transportation*, 2015, 23(1): 12 – 29.
- [4] ZHANG X, NIE L. Integrating capacity analysis with high-speed railway timetabling: a minimum cycle time calculation model with flexible overtaking constraints and intelligent enumeration [J]. *Transportation Research Part C*, 2016, 68: 509 – 531.
- [5] MORITO S, TAKEHI Y, IMAIZUMI J, et al. *Optimization Models for Multi-period Railway Rolling Stock Assignment* [M]. Berlin: Springer, 2016: 393 – 402.
- [6] CUNINGHAME-GREEN R A. *Minimax Algebra* [M]. Berlin: Springer, 1979.
- [7] BACCELLI F, COHEN G, OLSDER G J, et al. *Synchronization and Linearity: An Algebra for Discrete Event System* [M]. New York: John Wiley and Sons, 1992.
- [8] HEIDERGOTT B, OLSDER G J, VAN DER WOUDE J. *Max-Plus at Work: Modeling and Analysis of Synchronized Systems* [M]. New Jersey: Princeton University Press, 2006.
- [9] BUTKOVIČ P. *Max-Linear Systems: Theory and Algorithms* [M]. Berlin: Springer, 2010.
- [10] OLSDER G J. Applications of the theory of stochastic discrete-event systems to array processors and scheduling in public transportation [C] // *Proceedings of the 28th IEEE Conference on Decision and Control*. Tampa: IEEE, 1989: 2012 – 2017.
- [11] VAN DEN BOOM T, DE SCHUTTER B. Modeling and control of railway networks [C] // *Proceeding of the 2004 American Control Conference*. Boston: IEEE, 2004: 5728 – 5733.
- [12] VROMANS M, DEKKER R, KROON L G. Reliability and heterogeneity of railway services [J]. *European Journal of Operational Research*, 2006, 172(2): 647 – 665.
- [13] GOVERDE R M. Railway timetable stability analysis using max-plus system theory [J]. *Transportation Research Part B*, 2007, 41(2): 179 – 201.
- [14] COHEN G, DUBOIS D, QUADRAT J P, et al. A linear-system-theoretic view of discrete-event processes and its use for performance evaluation in manufacturing [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1985, 30(3): 210 – 220.
- [15] OLSDER G J, ROOS C. Cramer and Cayley-Hamilton in the max algebra [J]. *Linear Algebra and its Applications*, 1988, 101(88): 87 – 108.
- [16] CHEN W, QI X, DENG S. The eigen-problem and period analysis of the discrete event system [J]. *Systems Science and Mathematical Sciences*, 1990, 3(3): 243 – 260.
- [17] GAUBERT S. *Théorie des systèmes linéaires dans les dioides* [D]. Paris: L'Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1992.
- [18] DE SCHUTTER B, DE MOOR B. A note on the characteristic equation in the max-plus algebra [J]. *Linear Algebra and Its Applications*, 1997, 261(1): 237 – 250.
- [19] COCHET-TERRASSON J, COHEN G, GAUBERT S, et al. Numerical computation of spectral elements in max-plus algebra [C] // *Proceedings of the IFAC Conference on System Structure and Control*. Nantes: Elsevier, 1998: 699 – 706.
- [20] ZHAO Q, ZHENG DZ, ZHU X. Structure properties of min-max systems and existence of global cycle time [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2001, 46(1): 148 – 151.
- [21] VAN DER WOUDE J, SUBIONO S. Conditions for structural existence of an eigenvalue of bipartite (min, max, +)-system [J]. *Theoretical Computer Science*, 2003, 293(1): 13 – 24.
- [22] ZHAO Q. A remark on inseparability of min-max systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(6): 967 – 970.
- [23] PETERSON J L. *Petri Net Theory and the Modeling of Systems* [M]. Engle-Wood Cliffs: Prentice-Hall, 1981.

作者简介:

王彩璐 (1991–), 女, 博士研究生, 研究方向为离散事件系统的分析、控制与优化, E-mail: cailu_wang@163.com;

陶跃钢 (1958–), 男, 教授, 博士生导师, 研究方向为离散事件系统的分析、控制与优化, E-mail: yuegangtao@hebut.edu.cn;

李志军 (1964–), 男, 教授, 博士生导师, 研究方向为电力系统的控制与优化, E-mail: zhijun_li@263.net;

杨 鹏 (1960–), 男, 教授, 博士生导师, 研究方向为复杂系统建模、控制与优化, E-mail: yangp@hebut.edu.cn.