第 34 卷第 2 期
2017 年 2 月

控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications

Vol. 34 No. 2
Feb. 2017

DOI: 10.7641/CTA.2017.60504

# 基于干扰观测器的一类不确定非线性系统自适应二阶动态terminal滑模控制

张 强[1†], 袁铸钢[1], 许德智[2]

(1. 济南大学 自动化与电气工程学院, 山东 济南 250022; 2. 江南大学 轻工过程先进控制教育部重点实验室, 江苏 无锡 214122)

**摘要**: 针对一类不确定非线性系统的跟踪控制问题, 在考虑建模误差、参数不确定和外部干扰情况下, 以其拥有良好的跟踪性能以及强鲁棒性为目标, 提出基于回归扰动模糊神经网络干扰观测器 (recurrent perturbation fuzzy neural networks disturbance observer, RPFNNDO)的鲁棒自适应二阶动态terminal滑模控制策略. 将回归网络、模糊神经网络和sine-cosine扰动函数各自优势相结合, 给出一种回归扰动模糊神经网络结构, 提出RPFNNDO设计方法, 保证干扰估计准确性; 构造基于带有指数函数滑模面的二阶快速terminal滑模面, 给出其控制器设计过程, 避免了滑模到达阶段、传统滑模的抖振问题, 采用具有指数收敛的鲁棒项抑制干扰估计误差对系统跟踪性能的影响, 利用Lyapunov理论证明闭环系统的稳定性; 将该方法应用于混沌陀螺系统同步控制仿真实验, 结果表明所提方法的有效性.

**关键词**: 非线性系统; 二阶动态terminal滑模控制; 自适应控制; 干扰观测器; 模糊神经网络

**中图分类号**: TP273 **文献标识码**: A

# An adaptive second order terminal sliding mode control for a class of uncertain nonlinear systems using disturbance observer

ZHANG Qiang[1†], YUAN Zhu-gang[1], XU De-zhi[2]

(1. School of Electrical Engineering, University of Jinan, Jinan Shandong 250022, China;
2. Key Laboratory of Advanced Control for Light Industry Processes, Ministry of Education, Jiangnan University, Wuxi Jiangsu 214122, China)

**Abstract:** A robust adaptive second order terminal sliding mode control method, based on recurrent perturbation fuzzy neural networks disturbance observer (RPFNNDO), is proposed for a class of uncertain nonlinear systems which exist the modeling error, parameter uncertainty and external disturbance aiming at tracking performance and strong robustness. Firstly, to have better approximation ability, RPFNNDO is presented to approximate the unknown disturbance in the systems, which combines the advantages of the recurrent networks, fuzzy neural networks and sine-cosine function. Then, in order to overcome the chattering problem in traditional sliding mode, the design process of second-order dynamic terminal sliding mode controller is given by constructing global sliding mode surface based on fast terminal sliding mode surface. At the same time, an exponential robust term can offset the impact of the approximation errors for the systems. And the stability of the closed-loop system is proved by the Lyapunov theory. Finally, the method is applied to control the chaotic synchronization of gyro systems. The results show that the proposed method is effective.

**Key words:** nonlinear system; second order dynamic terminal sliding mode control; adaptive control; disturbance observer; fuzzy neural networks

## 1 引言(Introduction)

仿射非线性系统的控制问题一直是研究热点, 并取得了大量成果, 如T–S模糊控制[1]、预测控制[2]、回馈递推控制[3]和滑模控制 (sliding mode control, SMC)[4–6]等. 其中SMC因其在滑动模态时具有快速响应、对参数引起的不确定及外部扰动具有鲁棒性等优势, 已成功应用于混沌系统[7]、电力系统[8]、机器臂[5]、无人机[9]等. 然而常规的SMC在系统处于趋近模态时, 存在着对参数摄动和外部干扰较为敏感等问题. 为此, 以消除趋近模态为手段, 文献[10–12]研究全局SMC方法, 使闭环系统对不确定性具有增强的鲁棒性. 但文献[10–12]所研究的全局SMC仍存在抖振

收稿日期: 2016−07−11; 录用日期: 2016−11−16.
†通信作者. E-mail: zhang_hongyu198023@163.com; Tel.: +86 13864096636.
本文责任编委: 段志生.
国家自然科学基金项目(61403161, 61503156), 山东省自然科学基金项目(ZR2012FQ030), 济南大学博士基金项目(XBS1459)资助.
Supported by National Natural Science Foundation of China (61403161, 61503156), Natural Science Foundation of Shandong Province (ZR2012FQ 030) and Doctoral Foundation of University of Jinan (XBS1459).

问题. 因此, 以减少抖振和有限时间收敛为目标, 研究全局SMC在理论和实际应用方面均非常有价值.

与此同时, 为抑制未知干扰对控制性能的影响, 而开展的基于神经网络和T–S系统的各种干扰观测器的研究取得了大量理论成果, 如文献[13–16]. 但文献[13–16]均要求选择适宜的基函数中心和宽度等参数以确保准确地估计未知干扰. 为松弛此条件, 文献[17–19]分别利用小脑模型、petri网、差分进化算法等研究模糊神经网络(fuzzy neural networks, FNN). 然而文献[17–19]存在设计过于复杂且均忽略了因隶属度函数选择不合理引起估计不准的问题. 因此, 在文献[17–19]基础上, 进一步给出一种准确的干扰估计方法在工程应用方面很有必要.

综上, 针对一类不确定非线性系统的跟踪控制问题, 考虑建模误差、参数不确定和外部干扰情况等因素, 以拥有良好的跟踪性能以及强鲁棒性为目标, 本文提出基于递归扰动模糊神经网络干扰观测器的鲁棒自适应二阶动态terminal滑模控制策略. 其设计过程可分为4部分: 1) 为松弛FNN对隶属函数选择的苛刻条件, 将回归网络(recurrent neural networks, RNN), FNN和sine-cosine扰动函数各自优势相结合, 给出一种递归扰动模糊神经网络(recurrent perturbation fuzzy neural networks, RPFNN); 2) 为准确估计未知干扰, 提出一种递归扰动模糊神经网络干扰观测器(recurrent perturbation fuzzy neural networks disturbance observer, RPFNNDO)的设计方法, 构造鲁棒项使得干扰逼近误差任意小; 3) 受文献[11]滑模面和文献[20]快速terminal滑模面构造过程启发, 提出基于带有指数函数滑模面的二阶快速termianl滑模面, 保证滑模面初始时刻就处于滑动阶段, 以增强系统的鲁棒性; 4) 基于上述的RPFNNDO和二阶快速terminal滑模面, 给出不确定非线性系统鲁棒自适应滑模控制器结构, 通过构造自适应鲁棒项抑制干扰估计误差对系统跟踪性能的影响. 将该方法应用于混沌陀螺系统同步控制仿真实验, 仿真结果表明所提出方法具有良好的跟踪控制性能和鲁棒性能.

## 2 问题描述及准备 (Problem description and preliminary)

考虑如下一类不确定仿射非线性系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = x_{i+1}(t),\ 1 \leqslant i \leqslant n-1, \\ \dot{x}_n(t) = f(\boldsymbol{x}(t)) + \Delta f(\boldsymbol{x}(t)) + (g(\boldsymbol{x}(t)) + \\ \qquad \Delta g(\boldsymbol{x}(t)))u(t) + d(t), \\ \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{x}(t), \end{cases} \tag{1}$$

式中: $\boldsymbol{x}(t) = [x_1(t)\ \ x_2(t)\ \ \cdots\ \ x_n(t)]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$为可测的系统状态, $u(t) \in \mathbb{R}$为系统的控制输入, $\boldsymbol{y}(t) \in \mathbb{R}^n$为系统输出, $f(\boldsymbol{x}(t))$和$g(\boldsymbol{x}(t))$为已知的$\mathbb{C}^\infty$类函数, 且$g(\boldsymbol{x}(t)) \neq 0$; $D(\boldsymbol{x}(t), u(t), t) = \Delta f(\boldsymbol{x}(t)) + \Delta g(\boldsymbol{x}(t))u + d(t)$为系统未知的复合干扰, $\Delta f(\boldsymbol{x}(t))$和$\Delta g(\boldsymbol{x}(t))$为由参数不确定和建模误差构成的不确定性项, $d(t)$为外部干扰.

**假设 1**[4] $y(t)$和参考信号$y_{\mathrm{d}}(t)$为光滑、可测且$y_{\mathrm{d}}^{(i)}(t)$有界.

**假设 2**[21–22] $D(\boldsymbol{x}(t), u(t), t)$为有界, 即存在一个未知正实数$\rho > 0$, 使得$|D(\boldsymbol{x}(t), u(t), t)| \leqslant \rho$.

**引理 1**[20] 若连续函数$V(t)$满足式(2), 则$V(t)$将在有限时间内收敛到零点, 且收敛时间$t_{\mathrm{s}}$满足式(3):

$$\dot{V}(t) \leqslant -aV(t) - bV^{p/q}(t),\ \forall V(t_0) > 0,\ t \geqslant t_0, \tag{2}$$

$$t_{\mathrm{s}} = t_0 + \frac{1}{a(1-p/q)} \ln((aV^{1-p/q}(t_0) + b)/b), \tag{3}$$

式中: $a, b > 0$, $p$和$q$为正奇数且$1/2 < p/q < 1$.

控制任务是在闭环系统所有信号有界的条件下, 设计鲁棒自适应滑模控制器使得系统式(1)的输出$y(t)$跟踪期望输出$y_{\mathrm{d}}(t)$.

为了书写方便, 在不引起歧义的情况下, 省略相关变量的自变量, 如$x_i(t)$简写为$x_i$.

## 3 递归扰动模糊神经网络结构及干扰观测器设计 (Structure of RPFNN and disturbance observer via RPFNN)

### 3.1 递归扰动模糊神经网络结构 (Structure of RPFNN)

受文献[22]的联想层数学习算法启发, 借助RNN记忆功能和sine-cosine干扰函数可变优势, 将RNN, sine-cosine干扰函数和FNN相结合, 提出$n$维输入单输出且有$m$条模糊规则的RPFNN结构, 如图1所示.

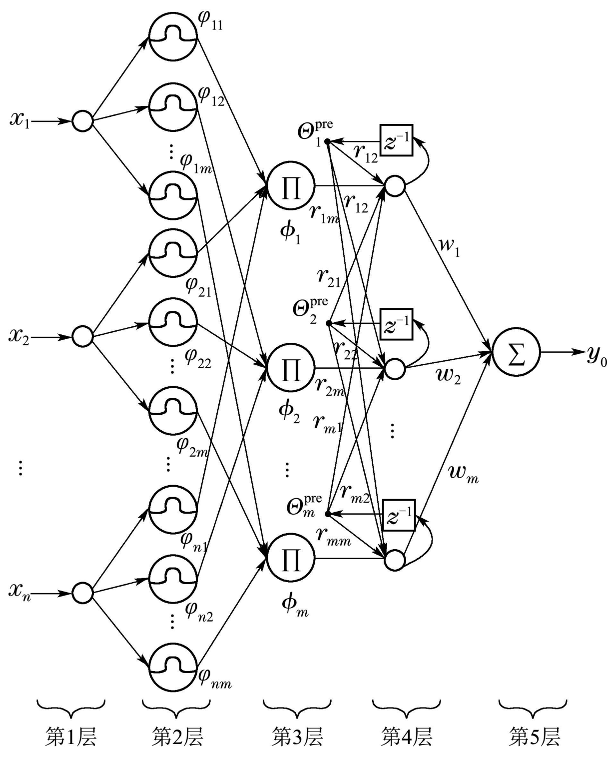



图 1 递归扰动模糊神经网络结构

Fig. 1 Structure of RPFNN

在图1中, 定义第$i$条模糊规则为

$R^i$ :

If $x_1$ is $A_1^i$, and $x_2$ is $A_2^i$, $\cdots$, and $x_n$ is $A_n^i$, and $\Theta_1^{\rm pre}$ is $r_{1i}$, and $\Theta_2^{\rm pre}$ is $r_{2i}$, and, $\cdots$, and $\Theta_m^{\rm pre}$ is $r_{mi}$,

Then $y$ is $y^i$, $i=1,2,\cdots,m$,

式中: $x_j(j=1,2,\cdots,n)$和$y$分别为RPFNN的输入变量和输出变量, $\Theta_j^{\rm pre}(j=1,2,\cdots,m)$为第$j$个记忆单元上一时刻的激活强度, $r_{ji}(j=1,2,\cdots,m)$和$y^i$为模糊单点, RPFNN的5层具体描述如下:

第1层为输入层. 其作用与文献[16]模糊神经网络第1层相同.

第2层为隶属函数层,其作用与文献[16]模糊神经网络第2层相同. 但为提高估计的准确性, 即松弛文献[16]选取大量隶属函数的条件, 借鉴文献[22]自组织方法, 本节将sine-cosine干扰函数引入到Gauss函数, 定义RPFNN的隶属度函数为

$$\mu_{ij}=\begin{cases}\exp(\frac{(x_i-c_{ij})^2}{(b_{ij})^2})+h_{ij}\sin(\omega_{ij}(x_i-c_{ij}))\cdot\\ \cos(\omega_{ij}(x_i-c_{ij})),\ x_i\geqslant c_{ij},\\ \exp(\frac{(x_i-c_{ij})^2}{(b_{ij})^2})-h_{ij}\sin(\omega_{ij}(x_i-c_{ij}))\cdot\\ \cos(\omega_{ij}(x_i-c_{ij})),\ x_i< c_{ij},\end{cases}\tag{4}$$

$$\varphi_{ij}=\begin{cases}0, & \mu_{ij}\leqslant 0,\\ 1, & \mu_{ij}\geqslant 1,\\ \mu_{ij}, & 0<\mu_{ij}<1,\end{cases}\quad j=1,2,\cdots,m,\tag{5}$$

式中: $c_{ij},b_{ij},h_{ij}$和$\omega_{ij}$分别为第$j$条规则下, 第$i$个输入变量对应隶属度函数的中心、宽度、幅值和频率.

第3层为规则层. 每一个节点代表一条模糊规则, 其作用是用来匹配模糊规则前件. 取第$k$条规则激活度为

$$\phi_k=\prod_{i=1}^n\varphi_{ik},\ k=1,2,\cdots,m.\tag{6}$$

第4层为递归层. 其作用与文献[23]RNN相同. 取第$k$个记忆单元激活函数为

$$\Theta_k=\sum_{i=1}^m r_{ik}\Theta_i^{\rm pre},\ k=1,2,\cdots,m,\tag{7}$$

式中$r_{ik}$为第$i$个记忆单元和第$k$个记忆单元之间的权值.

第5层为输出层. 该层的输出为

$$y=\sum_{i=1}^m w_i\Theta_i=\boldsymbol{W}^{\rm T}\boldsymbol{\Theta}(\boldsymbol{c},\boldsymbol{b},\boldsymbol{h},\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{r}),\tag{8}$$

式中:

$$\boldsymbol{W}^{\rm T}=[w_1\ w_2\ \cdots\ w_m]^{\rm T},$$
$$\boldsymbol{\Theta}=[\Theta_1\ \Theta_2\ \cdots\ \Theta_m]^{\rm T},$$
$$\boldsymbol{c}=[c_{11}\ c_{21}\ \cdots\ c_{n1}\ \cdots\ c_{1m}\ c_{2m}\ \cdots\ c_{nm}]^{\rm T},$$
$$\boldsymbol{b}=[b_{11}\ b_{21}\ \cdots\ b_{n1}\ \cdots\ b_{1m}\ b_{2m}\ \cdots\ b_{nm}]^{\rm T},$$
$$\boldsymbol{h}=[h_{11}\ h_{21}\ \cdots\ h_{n1}\ \cdots\ h_{1m}\ h_{2m}\ \cdots\ h_{nm}]^{\rm T},$$
$$\boldsymbol{\omega}=[\omega_{11}\ \omega_{21}\ \cdots\ \omega_{n1}\ \cdots\ \omega_{1m}\ \omega_{2m}\ \cdots\ \omega_{nm}]^{\rm T},$$
$$\boldsymbol{r}=[r_{11}\ r_{12}\ \cdots\ r_{1m}\ \cdots\ r_{m1}\ r_{m2}\ \cdots\ r_{mm}]^{\rm T}.$$

**注 1**　值得说明的是所提出的RPFNN具有两个特点: 1) 若式(4)中$h_{ij}=\omega_{ij}=0(i=1,2,\cdots,n,\ j=1,2,\cdots,m)$, 则其与文献[16]中的隶属函数相同. 而文献[16]的隶属函数只能靠经验来选择, 即存在着自适应性不足等问题, 这势必会影响未知函数估计的准确性. 本文将sine-cosine扰动函数和Gauss函相结合, 使得隶属度函数适应性增强. 2) 通过引入递归层使得RPFNN具有递归神经网络便于实现和记忆等优势. 因此, 所提出RPFNN兼顾了FNN和RNN优点, 这使得RPFNN既能保证未知函数干扰准确性又便于工程应用.

### 3.2　RPFNNDO设计(Design of RPFNNDO)

为利用RPFNN估计式(1)的复合干扰, 在此给出RPFNNDO设计方法, 现做如下合理的假设.

**假设 3**　令$\boldsymbol{x}\in M_x$, 其中$M_x$是系统状态的一个紧集, 存在最优输出层权值向量$\boldsymbol{W}^*$、隶属度层中心向量$\boldsymbol{c}^*$、宽度向量$\boldsymbol{b}^*$、幅值向量$\boldsymbol{h}^*$、频率向量$\boldsymbol{\omega}^*$和递归层权值向量$\boldsymbol{r}^*$, 使得$|\epsilon|\leqslant\epsilon^*$, $\epsilon$为RPFNN辨识误差, $\epsilon^*$为大于零的常数, 并且存在正实数$\bar{W},\bar{c},\bar{b},\bar{h},\bar{\omega}$及$\bar{r}$, 满足$\|\boldsymbol{W}^*\|\leqslant\bar{W}$, $\|\boldsymbol{c}^*\|\leqslant\bar{c}$, $\|\boldsymbol{b}^*\|\leqslant\bar{b}$, $\|\boldsymbol{h}^*\|\leqslant\bar{h}$, $\|\boldsymbol{\omega}^*\|\leqslant\bar{\omega}$和$\|\boldsymbol{r}^*\|\leqslant\bar{r}$.

记$\hat{\boldsymbol{W}},\hat{\boldsymbol{\Theta}},\hat{\boldsymbol{c}},\hat{\boldsymbol{b}},\hat{\boldsymbol{h}},\hat{\boldsymbol{\omega}}$和$\hat{\boldsymbol{r}}$分别为RPFNN的理想$\boldsymbol{W}^*,\boldsymbol{\Theta}^*,\boldsymbol{c}^*,\boldsymbol{b}^*,\boldsymbol{h}^*,\boldsymbol{\omega}^*,\boldsymbol{r}^*$的估计值, 相应的估计误差为

$$\tilde{\boldsymbol{W}}=\boldsymbol{W}^*-\hat{\boldsymbol{W}},\ \tilde{\boldsymbol{\Theta}}=\boldsymbol{\Theta}^*-\hat{\boldsymbol{\Theta}},$$
$$\tilde{\boldsymbol{c}}=\boldsymbol{c}^*-\hat{\boldsymbol{c}},\ \tilde{\boldsymbol{b}}=\boldsymbol{b}^*-\hat{\boldsymbol{b}},$$
$$\tilde{\boldsymbol{h}}=\boldsymbol{h}^*-\hat{\boldsymbol{h}},\ \tilde{\boldsymbol{\omega}}=\boldsymbol{\omega}^*-\hat{\boldsymbol{\omega}},\ \tilde{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{r}^*-\hat{\boldsymbol{r}}.$$

基于文献[24]的函数估计原理, 式(1)中的复合干扰$D$可用理想的RPFNN式(4)–(8)表示为

$$D=\boldsymbol{W}^{*\rm T}\boldsymbol{\Theta}^*(\boldsymbol{x},\boldsymbol{c}^*,\boldsymbol{b}^*,\boldsymbol{h}^*,\boldsymbol{\omega}^*,\boldsymbol{r}^*)+\epsilon^*.\tag{9}$$

实际中无法直接获得理想$\boldsymbol{W}^*,\boldsymbol{\Theta}^*,\boldsymbol{c}^*,\boldsymbol{b}^*,\boldsymbol{h}^*,\boldsymbol{\omega}^*$和$\boldsymbol{r}^*$. 因此, 在假设2–3下, 利用RPFNN式(4)–(8)对式(1)中的复合干扰$D$进行估计, 有

$$\hat{D}=\hat{\boldsymbol{W}}^{\rm T}\hat{\boldsymbol{\Theta}}(\boldsymbol{x},\hat{\boldsymbol{c}},\hat{\boldsymbol{b}},\hat{\boldsymbol{h}},\hat{\boldsymbol{\omega}},\hat{\boldsymbol{r}}).\tag{10}$$

**定理 1**　针对不确定仿射非线性系统式(1), 在假设2–3下, 考虑动态系统为

$$\dot{z}=-k_{\rm d}z+\Gamma(\boldsymbol{x},\hat{\boldsymbol{W}},\hat{\boldsymbol{c}},\hat{\boldsymbol{b}},\hat{\boldsymbol{h}},\hat{\boldsymbol{\omega}},\hat{\boldsymbol{r}}),\tag{11}$$

式中: $z$为RPFNNDO辅助状态, $k_{\rm d}>0$为设计常数,

$\Gamma(\boldsymbol{x},\hat{\boldsymbol{W}},\hat{\boldsymbol{c}},\hat{\boldsymbol{b}},\hat{\boldsymbol{h}},\hat{\boldsymbol{\omega}},\hat{\boldsymbol{r}})=k_{\rm d}x_n+f+gu+u_{\rm d}$. 定义RPFNNDO误差为$e_{\rm d}=x_n-z$. 若选取RPFNN参数自适应律为式(12), 干扰观测器的干扰估计$u_{\rm d}$为式(13), 则干扰估计误差$e_{\rm d}$是一致最终有界的.

$$\begin{cases}\dot{\hat{\boldsymbol{W}}}=\eta_W e_{\rm d}\hat{\Theta},\ \dot{\hat{\boldsymbol{c}}}=\eta_{\rm c}e_{\rm d}\boldsymbol{\Theta}_{\rm c}^{\rm T}\hat{\boldsymbol{W}},\\ \dot{\hat{\boldsymbol{b}}}=\eta_{\rm b}e_{\rm d}\boldsymbol{\Theta}_{\rm b}^{\rm T}\hat{\boldsymbol{W}},\ \dot{\hat{\boldsymbol{h}}}=\eta_{\rm h}e_{\rm d}\boldsymbol{\Theta}_{\rm h}^{\rm T}\hat{\boldsymbol{W}},\\ \dot{\hat{\boldsymbol{\omega}}}=\eta_\omega e_{\rm d}\boldsymbol{\Theta}_\omega^{\rm T}\hat{\boldsymbol{W}},\ \dot{\hat{\boldsymbol{r}}}=\eta_{\rm r}e_{\rm d}\boldsymbol{\Theta}_{\rm r}^{\rm T}\hat{\boldsymbol{W}},\end{cases}\tag{12}$$

$$u_d=\hat{D}+r_{\rm d},\tag{13}$$

$$r_{\rm d}=\lambda_{\rm d}e_{\rm d},\tag{14}$$

式中: $\eta_W,\eta_{\rm c},\eta_{\rm b},\eta_{\rm h},\eta_\omega,\eta_{\rm r}>0$为设计常数,

$$\boldsymbol{\Theta}_{\rm c}=\frac{\partial\boldsymbol{\Theta}}{\partial\boldsymbol{c}^{\rm T}}|_{c=\hat{\boldsymbol{c}}},\ \boldsymbol{\Theta}_{\rm b}=\frac{\partial\boldsymbol{\Theta}}{\partial\boldsymbol{b}^{\rm T}}|_{b=\hat{\boldsymbol{b}}},$$
$$\boldsymbol{\Theta}_{\rm h}=\frac{\partial\boldsymbol{\Theta}}{\partial\boldsymbol{h}^{\rm T}}|_{h=\hat{\boldsymbol{h}}},\ \boldsymbol{\Theta}_\omega=\frac{\partial\boldsymbol{\Theta}}{\partial\boldsymbol{\omega}^{\rm T}}|_{\omega=\hat{\boldsymbol{\omega}}},$$
$$\boldsymbol{\Theta}_{\rm r}=\frac{\partial\boldsymbol{\Theta}}{\partial\boldsymbol{r}^{\rm T}}|_{r=\hat{\boldsymbol{r}}},$$

$\hat{D}$为RPFNN的输出,即式(10), $r_{\rm d}$为干扰观测器的鲁棒项, $\lambda_{\rm d}>0$为设计常数.

**证** 基于式(1)(11)和式(13), 并代入式(9)和式(10), $e_{\rm d}$动态过程为

$$\begin{aligned}&\dot{e}_{\rm d}=\dot{x}_n-\dot{z}=\\&f+gu+D+k_{\rm d}z-\Gamma(\boldsymbol{x},\hat{\boldsymbol{W}},\hat{\boldsymbol{c}},\hat{\boldsymbol{b}},\hat{\boldsymbol{h}},\hat{\boldsymbol{\omega}},\hat{\boldsymbol{r}})=\\&-ke_{\rm d}+D-\hat{D}-r_{\rm d}=\\&-k_{\rm d}e_{\rm d}+\boldsymbol{W}^{*\rm T}\boldsymbol{\Theta}^*(\boldsymbol{x},\boldsymbol{c}^*,\boldsymbol{b}^*,\boldsymbol{h}^*,\boldsymbol{\omega}^*,\boldsymbol{r}^*)+\epsilon^*-\\&\hat{\boldsymbol{W}}^{\rm T}\hat{\boldsymbol{\Theta}}(\boldsymbol{x},\hat{\boldsymbol{c}},\hat{\boldsymbol{b}},\hat{\boldsymbol{h}},\hat{\boldsymbol{\omega}},\hat{\boldsymbol{r}})-r_{\rm d}.\end{aligned}\tag{15}$$

利用Taylor级数, 将式(9)的$\boldsymbol{\Theta}^*$在估计值$\hat{\boldsymbol{\Theta}}$展开, 可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Theta}^*=&\hat{\boldsymbol{\Theta}}+\boldsymbol{\Theta}_{\rm c}\tilde{\boldsymbol{c}}+\boldsymbol{\Theta}_{\rm b}\tilde{\boldsymbol{b}}+\boldsymbol{\Theta}_{\rm h}\tilde{\boldsymbol{h}}+\\&\boldsymbol{\Theta}_\omega\tilde{\boldsymbol{\omega}}+\boldsymbol{\Theta}_{\rm r}\tilde{\boldsymbol{r}}+{\rm O}(\cdot),\end{aligned}\tag{16}$$

式中${\rm O}(\cdot)$为展开高阶项.

在$\boldsymbol{W}^*=\tilde{\boldsymbol{W}}+\hat{\boldsymbol{W}}$下, 将式(16)代入式(15), 有

$$\begin{aligned}&\dot{e}_{\rm d}=\\&-k_{\rm d}e_{\rm d}+\boldsymbol{W}^{*\rm T}(\hat{\boldsymbol{\Theta}}+\boldsymbol{\Theta}_{\rm c}\tilde{\boldsymbol{c}}+\boldsymbol{\Theta}_{\rm b}\tilde{\boldsymbol{b}}+\boldsymbol{\Theta}_{\rm h}\tilde{\boldsymbol{h}}+\\&\boldsymbol{\Theta}_\omega\tilde{\boldsymbol{\omega}}+\boldsymbol{\Theta}_{\rm r}\tilde{\boldsymbol{r}}+{\rm O}(\cdot))+\epsilon^*-\hat{\boldsymbol{W}}^{\rm T}\hat{\boldsymbol{\Theta}}-r_{\rm d}=\\&-k_{\rm d}e_{\rm d}+\tilde{\boldsymbol{W}}^{\rm T}\hat{\boldsymbol{\Theta}}+\hat{\boldsymbol{W}}^{\rm T}(\boldsymbol{\Theta}_{\rm c}\tilde{\boldsymbol{c}}+\boldsymbol{\Theta}_{\rm b}\tilde{\boldsymbol{b}}+\\&\boldsymbol{\Theta}_{\rm h}\tilde{\boldsymbol{h}}+\boldsymbol{\Theta}_\omega\tilde{\boldsymbol{\omega}}+\boldsymbol{\Theta}_{\rm r}\tilde{\boldsymbol{r}})-r_{\rm d}+\zeta,\end{aligned}\tag{17}$$

式中$\zeta=\tilde{\boldsymbol{W}}^{\rm T}(\boldsymbol{\Theta}_{\rm c}\tilde{\boldsymbol{c}}+\boldsymbol{\Theta}_{\rm b}\tilde{\boldsymbol{b}}+\boldsymbol{\Theta}_{\rm h}\boldsymbol{\Theta}+\boldsymbol{\Theta}_\omega\tilde{\boldsymbol{\omega}}+\boldsymbol{\Theta}_{\rm r}\tilde{\boldsymbol{r}}+{\rm O}(\cdot))+\epsilon^*$.

选取Lyapunov函数为

$$\begin{aligned}V_{\rm d}=&\frac{1}{2}e_{\rm d}^2+\frac{\tilde{\boldsymbol{W}}^{\rm T}\tilde{\boldsymbol{W}}}{2\eta_W}+\frac{\tilde{\boldsymbol{c}}^{\rm T}\tilde{\boldsymbol{c}}}{2\eta_{\rm c}}+\\&\frac{\tilde{\boldsymbol{b}}^{\rm T}\tilde{\boldsymbol{b}}}{2\eta_{\rm b}}+\frac{\tilde{\boldsymbol{h}}^{\rm T}\tilde{\boldsymbol{h}}}{2\eta_{\rm h}}+\frac{\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{\rm T}\tilde{\boldsymbol{\omega}}}{2\eta_\omega}+\frac{\tilde{\boldsymbol{r}}^{\rm T}\tilde{\boldsymbol{r}}}{2\eta_{\rm r}}.\end{aligned}\tag{18}$$

基于$\dot{\tilde{\boldsymbol{W}}}=-\dot{\hat{\boldsymbol{W}}}$, $\dot{\tilde{\boldsymbol{c}}}=-\dot{\hat{\boldsymbol{c}}}$, $\dot{\tilde{\boldsymbol{b}}}=-\dot{\hat{\boldsymbol{b}}}$, $\dot{\tilde{\boldsymbol{h}}}=-\dot{\hat{\boldsymbol{h}}}$, $\dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}}=-\dot{\hat{\boldsymbol{\omega}}}$和$\dot{\tilde{\boldsymbol{r}}}=-\dot{\hat{\boldsymbol{r}}}$下, 沿着式(17), 对式(18)求导, 有

$$\begin{aligned}&\dot{V}_{\rm d}=\\&e_{\rm d}\dot{e}_{\rm d}+\frac{1}{\eta_W}\tilde{\boldsymbol{W}}^{\rm T}\dot{\tilde{\boldsymbol{W}}}+\frac{1}{\eta_{\rm c}}\tilde{\boldsymbol{c}}^{\rm T}\dot{\tilde{\boldsymbol{c}}}+\frac{1}{\eta_{\rm b}}\tilde{\boldsymbol{b}}^{\rm T}\dot{\tilde{\boldsymbol{b}}}+\\&\frac{1}{\eta_{\rm h}}\tilde{\boldsymbol{h}}^{\rm T}\dot{\tilde{\boldsymbol{h}}}+\frac{1}{\eta_\omega}\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{\rm T}\dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}}+\frac{1}{\eta_{\rm r}}\tilde{\boldsymbol{r}}^{\rm T}\dot{\tilde{\boldsymbol{r}}}=e_{\rm d}\big(-k_{\rm d}e_{\rm d}+\\&\tilde{\boldsymbol{W}}^{\rm T}\hat{\boldsymbol{\Theta}}+\hat{\boldsymbol{W}}^{\rm T}(\boldsymbol{\Theta}_{\rm c}\tilde{\boldsymbol{c}}+\boldsymbol{\Theta}_{\rm b}\tilde{\boldsymbol{b}}+\boldsymbol{\Theta}_{\rm h}\tilde{\boldsymbol{h}}+\\&\boldsymbol{\Theta}_\omega\tilde{\boldsymbol{\omega}}+\boldsymbol{\Theta}_{\rm r}\tilde{\boldsymbol{r}})-r_{\rm d}+\zeta\big)-\frac{1}{\eta_W}\tilde{\boldsymbol{W}}^{\rm T}\dot{\hat{\boldsymbol{W}}}-\\&\frac{1}{\eta_{\rm c}}\tilde{\boldsymbol{c}}^{\rm T}\dot{\hat{\boldsymbol{c}}}-\frac{1}{\eta_{\rm b}}\tilde{\boldsymbol{b}}^{\rm T}\dot{\hat{\boldsymbol{b}}}-\frac{1}{\eta_{\rm h}}\tilde{\boldsymbol{h}}^{\rm T}\dot{\hat{\boldsymbol{h}}}-\frac{1}{\eta_\omega}\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{\rm T}\dot{\hat{\boldsymbol{\omega}}}-\frac{1}{\eta_{\rm r}}\tilde{\boldsymbol{r}}^{\rm T}\dot{\hat{\boldsymbol{r}}}.\end{aligned}\tag{19}$$

代入式(12)(14), 式(19)可改写为

$$\dot{V}_{\rm d}\leqslant-k_{\rm d}e_{\rm d}^2+|e_{\rm d}||\zeta|-e_{\rm d}r_{\rm d}\leqslant-k_{\rm d}e_{\rm d}^2+C_{\rm d},\tag{20}$$

式中$C_{\rm d}=|\zeta|^2/4\lambda_{\rm d}$.

基于式(20), 当$|e_{\rm d}|>\sqrt{C_{\rm d}/k_{\rm d}}$时, $\dot{V}_{\rm d}<0$. 因此, 由文献[25]定理4.18可得$e_{\rm d}$是一致最终有界的.

**注 2** 依据式(20)可得, 设计参数$k$和$\lambda_{\rm d}$可以调节RPFNNDO的性能. 此外, RPFNNDO的输出值式(13)为RPFNN输出和鲁棒项之和. 与单纯的RPFNN估计相比, 通过引入鲁棒项可以减少RPFNN固有的未知逼近误差对估计产生的不利影响.

## 4 基于RPFNNDO的自适应二阶动态terminal滑模控制器设计(Adaptive second order dynamic TSMC via RPFNNDO)

定义上标$(k)$, $k=1,2,\cdots,n+1$, 代表对应变量的$k$阶导数, ${\rm sgn}(\cdot)$为符号函数, ${\rm exp}^{(\cdot)}$为指数函数.

### 4.1 带有指数函数的滑模面设计(Sliding mode surface with exponential function)

定义系统跟踪误差$e=y-y_{\rm d}$, 扩充系统跟踪误差为$\boldsymbol{E}=[e_1\ \ e_2\ \ \cdots\ \ e_n]^{\rm T}=[e\ \ \dot{e}\ \ \cdots\ \ e^{(n-1)}]^{\rm T}$.

设计带有指数函数的滑模面为

$$s=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}(t)-\boldsymbol{\varLambda}\boldsymbol{E}(0)),\tag{21}$$

式中: $\boldsymbol{A}=[a_1,a_2,\cdots,a_{n-1},1]$为设计的滑模面增益向量且使得$e^{(n-1)}+a_{n-1}e^{(n-2)}+\cdots+a_1e$满足Hurwitz稳定, 即$s_{\rm a}=AE$为稳定的滑模面; $\boldsymbol{\varLambda}={\rm diag}\{\exp(-k_1t),\ \exp(-k_2t),\ \cdots,\ \exp(-k_nt)\}>0$为对角矩阵, $k_i(i=1,2,\cdots,n)$为设计的正常数; $\boldsymbol{E}(0)$为$\boldsymbol{E}(t)$在$t=0$时刻的误差.

基于式(21), 若$s$处于滑动阶段, 即$s=0$, 则

$$s_{\mathrm{a}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{E}(0) \tag{22}$$

记$\underline{k}=\min\{k_i\},\ i=1,2,\cdots,n$. 依据式(22), 有

$$|s_{\mathrm{a}}(t)|\leqslant\exp(-\underline{k}t)|s_{\mathrm{a}}(0)|, \tag{23}$$

式中$s_{\mathrm{a}}(0)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}(0)$.

由式(23)可知, 当$t\to\infty$时, $s_{\mathrm{a}}(t)=0$. 进而根据$s_{\mathrm{a}}=AE$为稳定滑模面, $\boldsymbol{E}(t)$渐近收敛于零点. 因此带有指数函数的滑模面式(21)是稳定滑模面.

**注 3** 式(21)中, 当$t=0$时, 带有指数函数的滑模面$s(t)=0$. 由此, 与滑模面$s_{\mathrm{a}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}(t)$相比, $s(t)$从初始时刻就保持在滑动阶段. 这有效地避免了滑模到达阶段存在, 即增强了系统的鲁棒性.

针对系统式(1), 在RPFNNDO式(11)–(14)估计复合干扰下, 为保持式(22)滑动阶段成立, 即$s\dot{s}<0$, 需设计控制量$u$为

$$u=\frac{1}{g}(-f-\sum_{i=1}^{n-1}a_ie_{i+1}-u_{\mathrm{d}}-k_{\mathrm{s}}\operatorname{sgn}s-\sum_{i=1}^{n}a_ik_i\exp(-k_it)e_i(0)+y_{\mathrm{d}}^{(n)}), \tag{24}$$

式中: $a_n=1$, $u_{\mathrm{d}}$为RPFNNDO式(13)的输出值, $k_{\mathrm{s}}>|D-u_{\mathrm{d}}|$为设计常数.

虽然带有指数函数的滑模面式(21)能使系统具有较好地鲁棒性等优势, 但从式(24)可知: 因符号函数在$u$中存在, 则必定存在控制量抖振问题. 为避免此问题, 在式(21)基础上, 利用快速terminal滑模面提出二阶滑模面构造及控制器设计过程.

### 4.2 基于带有指数函数滑模面的快速terminal滑模面及控制器设计(Second order sliding mode surface with exponential function sliding mode and controller design)

为有效地避免控制量抖振, 借助文献[20]构造滑模面过程, 设计带有指数函数滑模面式(21)的快速terminal滑模面如下:

$$\sigma(e)=\dot{s}(e)+\chi s(e)+\upsilon s^{\beta}(e), \tag{25}$$

式中: $\chi,\upsilon>0$为设计常数, $\beta=p/q$, $p$和$q$为正奇数, 且满足$1/2<\beta<1$.

为使得$\sigma\dot{\sigma}<0$, 设计控制量$u$及鲁棒项$r_{\mathrm{c}}$为

$$u=\int\frac{1}{g}(-k_{\sigma}\sigma-k_{\sigma1}\operatorname{sgn}\sigma|\sigma|^{\eta_{\sigma}}-\varPi_1-\varPi_4u-\varPi_3u_{\mathrm{d}}-\dot{u}_{\mathrm{d}}+r_{\mathrm{c}}+y_{\mathrm{d}}^{(n+1)})\mathrm{d}t, \tag{26}$$

$$r_{\mathrm{c}}=-\frac{\xi}{\varrho+(1-\varrho)\exp(-\alpha|\sigma|^{\breve{\alpha}})}\operatorname{sgn}\sigma, \tag{27}$$

式中: $k_{\sigma},k_{\sigma1},\xi>0$, $0<\eta_{\sigma}<1$和$0<\varrho<1$均为设计常数, $\alpha,\breve{\alpha}$为设计正整数, $u_{\mathrm{d}}$为RPFNNDO式(13)的输出值, $\xi$且满足$\xi>|\varPi_3\tilde{D}+\dot{\tilde{D}}|$, $\tilde{D}=D-u_{\mathrm{d}}$, $\dot{\tilde{D}}=\dot{D}-\dot{u}_{\mathrm{d}}$, $\varPi_i$, $i=1,2,3,4$如下:

$$\begin{aligned}
&\varPi_1=\\
&\sum_{i=1}^{n-2}a_ie^{(i+1)}-\sum_{i=1}^{n}a_ik_i^2\exp(-k_it)e^{(i-1)}(0)+\\
&\chi(\sum_{i=1}^{n-1}a_ie^{(i)}+\sum_{i=1}^{n}a_ik_i\exp(-k_it)e^{(i-1)}(0))+\\
&\upsilon\beta\varPi_2(\sum_{i=1}^{n-1}a_ie^{(i)}+\sum_{i=1}^{n}a_ik_i\exp(-k_it)e^{(i-1)}(0))+\\
&(a_{n-1}+\chi+\upsilon\beta(\sum_{i=1}^{n}a_i(e^{(i-1)}-k_i\exp(-k_it)\times\\
&e^{(i-1)}(0)))^{\beta-1})+\Pi_3(f-y_{\mathrm{d}}^{(n)})+\dot{f},
\end{aligned} \tag{28}$$

$$\varPi_2=(\sum_{i=1}^{n}a_i(e^{(i-1)}-k_i\exp(-k_it)e^{(i-1)}(0)))^{\beta-1},$$

$$\varPi_3=a_{n-1}+\chi+\upsilon\beta\varPi_2,$$

$$\varPi_4=\varPi_3g+\dot{g}.$$

**注 4** 基于带有指数函数滑模面的快速terminal滑模面本质上是二阶滑模面. 若滑模变量$\sigma(e)=0$, 则意味着$s$及$\dot{s}$将在有限时间内到达零点.

### 4.3 稳定性分析(Stability analysis)

**定理 2** 针对满足假设1–3的不确定非线性系统式(1), 若取RPFNNDO式(11)–(14), 带有指数函数滑模面式(21), 有限时间收敛terminal滑模面式(25), 控制律式(26)及鲁棒项式(27), 则$\sigma(e)$有限时间内收敛于零, $s(e)$指数收敛于零, 跟踪误差收敛于零.

证 依据$E,e$的定义和式(1), 有

$$\begin{cases}
e^{(i)}=y^{(i)}-y_{\mathrm{d}}^{(i)}=x_{i+1}-y_{\mathrm{d}}^{(i)},\ 1\leqslant i\leqslant n-1,\\
e^{(n)}=y^{(n)}-y_{\mathrm{d}}^{(n)}=f+gu+D-y_{\mathrm{d}}^{(n)},\\
e^{(n+1)}=x_1^{(n+1)}-y_{\mathrm{d}}^{(n+1)}=\\
\qquad\dot{f}+\dot{g}u+g\dot{u}+\dot{D}-y_{\mathrm{d}}^{(n+1)}.
\end{cases} \tag{29}$$

由式(21), 可得

$$\begin{cases}
\dot{s}=\boldsymbol{A}(\dot{\boldsymbol{E}}(t)+\boldsymbol{K}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{E}(0))=\\
\quad\sum_{i=1}^{n}a_i(e^{(i)}+k_i\exp(-k_it)e^{(i-1)}(0)),\\
\ddot{s}=\boldsymbol{A}(\ddot{\boldsymbol{E}}(t)-\boldsymbol{K}^2\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{E}(0))=\\
\quad\sum_{i=1}^{n}a_i(e^{(i+1)}-k_i^2\exp(-k_it)e^{(i-1)}(0)),
\end{cases} \tag{30}$$

式中:

$$a_n=1,\ e^{(0)}=e,$$

$$\boldsymbol{K}=\operatorname{diag}\{k_1,k_2,\cdots,k_n\}.$$

基于式(25)(29)和式(30), $\sigma(e)$动态过程可描述为

$$\dot{\sigma}=\ddot{s}+\chi\dot{s}+\upsilon\beta\dot{s}s^{\beta-1}=$$

$$\sum_{i=1}^{n-2}a_ie^{(i+1)}+a_{n-1}e^{(n)}+e^{(n+1)}-$$

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n} a_i k_i^2 \exp(-k_i t)e^{(i-1)}(0) + \chi(\sum_{i=1}^{n-1} a_i \times e^{(i)} +\\&\sum_{i=1}^{n} a_i k_i \exp(-k_i t)e^{(i-1)}(0)) + \chi e^{(n)} +\\&\upsilon\beta(\sum_{i=1}^{n} a_i(e^{(i-1)} - k_i \exp(-k_i t)e^{(i-1)}(0)))^{\beta-1}e^{(n)} +\\&\upsilon\beta(\sum_{i=1}^{n} a_i(e^{(i-1)} - k_i \exp(-k_i t)e^{(i-1)}(0)))^{\beta-1} \cdot\\&(\sum_{i=1}^{n-1} a_i e^{(i)} + \sum_{i=1}^{n} a_i k_i \exp(-k_i t)e^{(i-1)}(0)).\end{aligned} \tag{31}$$

将式(29)中的$e^n$和$e^{n+1}$的表达式代入式(31), 有

$$\begin{aligned}&\dot{\sigma} =\\&\sum_{i=1}^{n-2} a_i e^{(i+1)} - \sum_{i=1}^{n} a_i k_i^2 \exp(-k_i t)e^{(i-1)}(0) +\\&\chi \times (\sum_{i=1}^{n-1} a_i e^{(i)} + \sum_{i=1}^{n} a_i k_i \exp(-k_i t)e^{(i-1)}(0)) +\\&\upsilon\beta(\sum_{i=1}^{n} a_i(e^{(i-1)} - k_i \exp(-k_i t)e^{(i-1)}(0)))^{\beta-1}\\&(\sum_{i=1}^{n-1} a_i e^{(i)} + \sum_{i=1}^{n} a_i k_i \exp(-k_i t)e^{(i-1)}(0)) +\\&(a_{n-1} + \chi + \upsilon\beta(\sum_{i=1}^{n} a_i(e^{(i-1)} -\\&k_i \exp(-k_i t)e^{(i-1)}(0)))^{\beta-1})(f + gu + D - y_{\mathrm{d}}^{(n)}) +\\&\dot{f} + \dot{g}u + g\dot{u} + \dot{D} - y_{\mathrm{d}}^{(n+1)} =\\&\Pi_1 + \Pi_4 u + \Pi_3 D + g\dot{u} + \dot{D} - y_{\mathrm{d}}^{(n+1)}.\end{aligned} \tag{32}$$

选择Lyapunov函数为$V = \dfrac{\sigma^2}{2}$, 对其求导, 并代入式(26)–(27)和式(32), 有

$$\begin{aligned}&\dot{V} = \sigma\dot{\sigma} =\\&\sigma(\Pi_1 + \Pi_4 u + \Pi_3 D + g\dot{u} + \dot{D} - y_{\mathrm{d}}^{(n+1)}) =\\&\sigma(-k_\sigma\sigma - k_{\sigma1}\operatorname{sgn}\sigma|\sigma|^{\eta_\sigma} +\\&\Pi_3(D - \hat{D}) + \dot{D} - \dot{\hat{D}} + r_{\mathrm{c}}) \leqslant\\&-k_\sigma\sigma^2 - k_{\sigma1}|\sigma|^{\eta_\sigma+1} + |\sigma|\xi -\\&\frac{\xi}{\varrho + (1-\varrho)\exp^{-\alpha|\sigma|^{\breve{\alpha}}}}|\sigma| =\\&-k_\sigma\sigma^2 - k_{\sigma1} \times |\sigma|^{\eta_\sigma+1} -\\&|\sigma|\xi(\frac{1}{\varrho + (1-\varrho)\exp(-\alpha|\sigma|^{\breve{\alpha}})} - 1) <\\&-k_\sigma\sigma^2 - k_{\sigma1}|\sigma|^{\eta_\sigma+1} = -\tau_1 V - \tau_2 V^\eta,\end{aligned} \tag{33}$$

式中:

$$\tau_1 = 2k_\sigma,\ \tau_2 = 2^\eta k_{\sigma1},\ \eta = (\eta_\sigma + 1)/2.$$

基于引理1和式(33)可得, $\sigma(e)$有限时间内收敛于零. 当$\sigma(e) = 0$成立时, 由文献[20]和式(25)有$s(e)$指数收敛于零, 进而根据式(23)得到跟踪误差$e$收敛于零的结论.

**注 5** 控制器式(26)中涉及$f$和$g$等函数的导数. 在实际应用中, 它们均可由作者前期工作[26]给出的快速收敛微分估计器获得.

**注 6** 鲁棒项式(27)中的参数$\xi > |\Pi_3\tilde{D} + \dot{\tilde{D}}|$. 此条件过于苛刻. 为松弛此条件, 可采用作者前期自适应[22]或fuzzy方法[27]等对干扰误差上界进行估计.

## 5 仿真验证(Simulation)

为说明本文方法的有效性, 本节考虑混沌陀螺系统同步控制问题. 混沌陀螺动力学方程如下[28]:

$$\begin{aligned}&\ddot{\theta}_{\mathrm{d}} + \gamma^2\frac{(1-\cos\theta_{\mathrm{d}})^2}{\sin^3\theta_{\mathrm{d}}} - \beta\sin\theta_{\mathrm{d}} +\\&c_1\dot{\theta}_{\mathrm{d}} + c_2\dot{\theta}_{\mathrm{d}}^3 = \bar{f}\sin(\omega t)\sin\,\theta_{\mathrm{d}},\end{aligned} \tag{34}$$

式中: $\theta_{\mathrm{d}}$为陀螺仪转轴与垂直轴之间的夹角, $\bar{f}\sin(\omega t)\sin\theta_{\mathrm{d}}$为参数激励项, 模拟基座的激励, $c_1\dot{\theta}_{\mathrm{d}}$和$c_2\dot{\theta}_{\mathrm{d}}^3$分别为线性和非线性阻尼项, $\gamma^2(1-\cos\theta_{\mathrm{d}})^2/\sin^3\theta_{\mathrm{d}} - \beta\sin\theta_{\mathrm{d}}$是非线性恢复力.

定义$x_{1\mathrm{d}} = \theta_{\mathrm{d}}$和$x_{2\mathrm{d}} = \dot{\theta}_{\mathrm{d}}$, 在参数$\gamma = 10,\ \beta = 1,\ c_1 = 0.5,\ c_2 = 0.05,\ \omega = 2$和$\bar{f} = 35.5$下, 若$x_{1\mathrm{d}}(0) = -1$和$x_{2\mathrm{d}}(0) = 0$时, 混沌陀螺系统具有混沌行为, 相应状态曲线及相位图如图2–3所示.

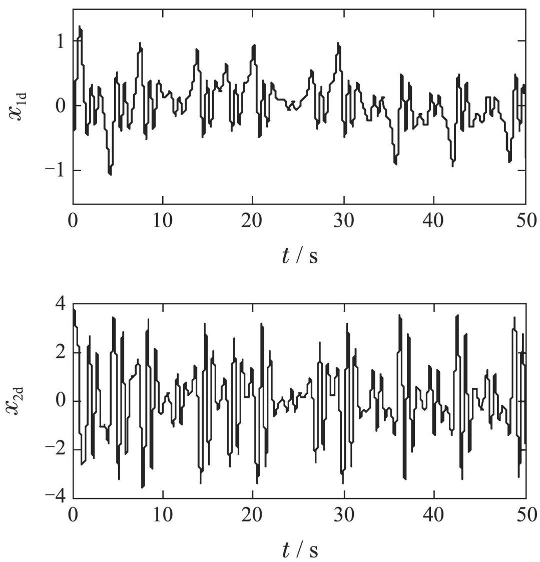



图 2 混沌陀螺系统状态轨迹

Fig. 2 The state trajectory of chaotic gyro system

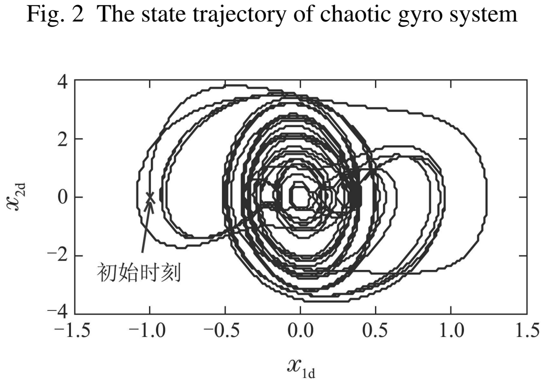



图 3 混沌陀螺系统相位图

Fig. 3 The phase portrait of chaotic gyro system

记式(34)为驱动系统, 设其被控响应系统为

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2,\\ \dot{x}_2 = f + u + D,\end{cases} \tag{35}$$

式中: $x_1 = \theta,\ x_2 = \dot{\theta},\ f = -\gamma^2(1-\cos x_1)^2/\sin^3 x_1 - c_1x_2 - c_2x_2^3 + (\beta + \bar{f}\sin(\omega t))\sin\theta_{\rm d}$, $D$为系统的复合干扰. 同时假定仿真初始条件$x_1(0) = 2,\ x_2(0) = 0.5,\ D = -0.5\sin\,x_1 + 0.6\sin\,t$.

为实现式(34)与式(35)同步, 选取本文所设计的RFPFNN式(4)–(8)的初始参数为

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{W}(0) = [0.12, 0.2, 0.5, 0.75, 0.85, 1.2]^{\rm T},\\ &\boldsymbol{c}(0) = [0.1, 0.2, 0.3, 0.3, 0.4, 0.4,\\ &\qquad 0.7, 0.7, 0.8, 0.8, 1.2, 1.2]^{\rm T},\\ &b_{ij}(0) = h_{ij}(0) = 0.5,\ \omega_{ij}(0) = 0.15,\\ &i = 1,2,\ j = 1,2,\cdots,6,\ \boldsymbol{r}(0) = I_{6\times6}.\end{aligned}$$

RFPFNNDO式(11)–(14)的参数为

$$\begin{aligned}&k_{\rm d} = 2,\ \lambda_{\rm d} = 20,\ \eta_W = 0.15,\\ &\eta_{\rm c} = 0.02,\ \eta_{\rm b} = 0.07,\ \eta_{\rm h} = 0.2,\\ &\eta_\omega = 0.4,\ \eta_{\rm r} = 0.1.\end{aligned}$$

带有指数函数滑模面式(21)的参数为$\boldsymbol{A} = [12, 3]$, $k_1 = 10$, $k_2 = 5$. 有限时间收敛Terminal滑模面式(25)的参数为$\chi = 6$, $\upsilon = 26$, $p = 7$和$q = 9$. 控制器式(26)的参数为$k_\sigma = 30$, $k_{\sigma1} = 3$, $\eta_\sigma = 0.6$. 鲁棒项式(27)的参数为$\xi = 0.08$和$\varrho = 0.5$, $\alpha = 3$, $\breve{\alpha} = 2$. 由此, 得到仿真结果如图4–6所示.

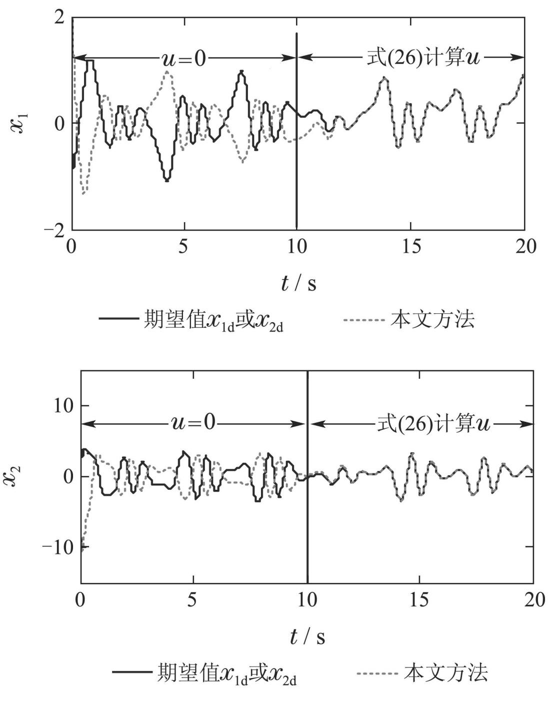



图 4　混沌陀螺系统同步控制状态轨迹

Fig. 4　The state trajectory of chaotic gyro system under synchronization control

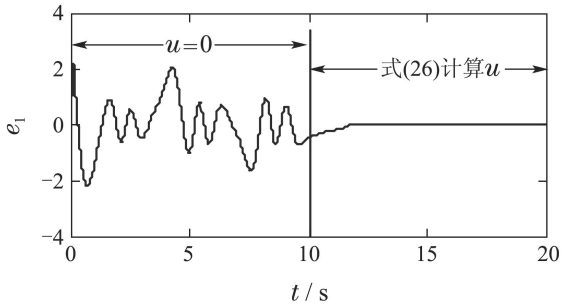



图 5　混沌陀螺系统同步控制角度误差轨迹

Fig. 5　The angle error trajectory of chaotic gyro system under synchronization control

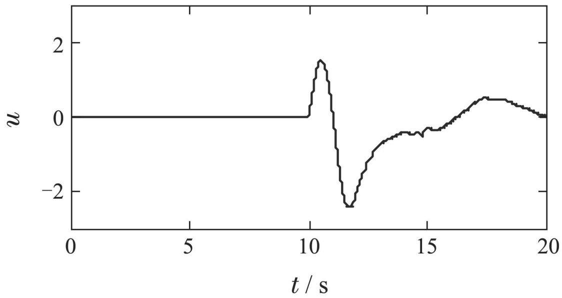


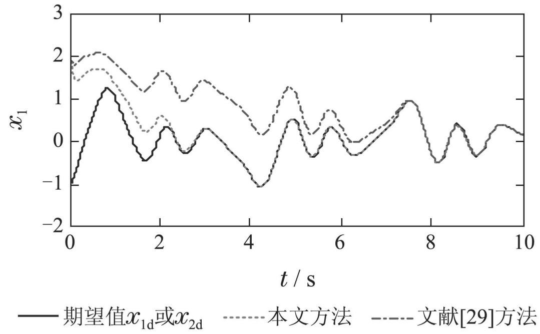
图 6　混沌陀螺系统同步控制量

Fig. 6　The control value of chaotic gyro system under synchronization control

由图4和5可知: 当$t < 10$ s时, 在被控响应系统式(35)中$u = 0$下, 因式(35)和式(34)初始状态不同, 无论角度变化还是角速度变化, 两个系统均存在明显的不同, 即无法实现同步; 当$t \geqslant 10$ s时, 在被控响应系统式(35)中施加由本文方法计算$u$下, 虽然式(35)和式(34)在$t = 10$ s状态不同, 但式(35)的角度和角速度很快地跟踪驱动系统的状态变化, 实现两个系统同步跟踪任务, 这说明了本文方法有效性.

由图6可知: 控制量变化连续, 这说明本文所设计的控制器能够明显减弱滑模控制中的控制量抖振现象.

为充分说明本文方法与已有成果控制效果不同, 本文采用文献[29] 的方法设计控制器. 在此过程中, 选取意义相同的参数一致以保证对比曲线更具有说服力, 得到仿真结果如图7–9所示.



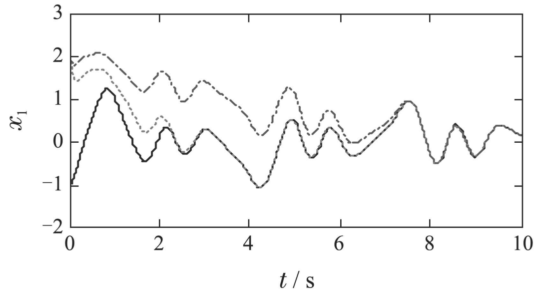



图 7 不同方法下混沌陀螺系统同步控制状态轨迹

Fig. 7 The state trajectory of chaotic gyro system under synchronization control with different methods

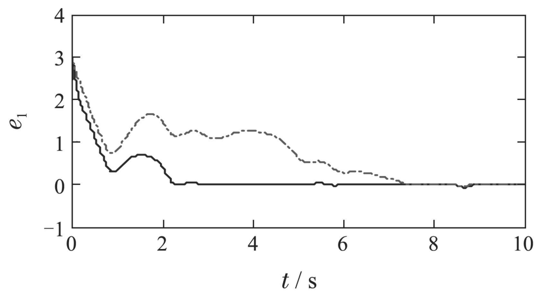



图 8 不同方法下混沌陀螺系统同步控制角度误差轨迹

Fig. 8 The angle error trajectory of chaotic gyro system under synchronization control with different methods

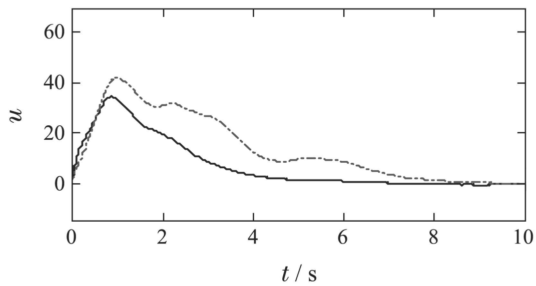



图 9 不同方法下混沌陀螺系统同步控制量

Fig. 9 The control value of chaotic gyro system under synchronization control with different methods

由图7可知: 本文方法和文献[29]均能够实现混沌陀螺系统同步跟踪任务, 但本文方法能够使响应系统更快地跟踪驱动系统, 同时具有调节时间更短的能力. 由图8跟踪角度误差可知: 本文所提出的基于RPFNNDO的二阶动态terminal滑模控制方法能够使跟踪误差收敛至零的速度更快, 即收敛速度快.

## 6 结论(Conclusions)

本文研究了一类不确定非线性系统的跟踪控制问题. 为实现准确且快速地估计未知干扰估计, 提出了回归扰动模糊神经网络结构及干扰观测器设计过程; 为增强闭环系统鲁棒性、避免控制抖振问题, 提出带有指数函数滑模面的快速terminal滑模面构造方法; 将回归扰动模糊神经网络干扰观测器与所设计的滑模面相结合, 给出控制器结构, 并严格证明了系统的稳定性和跟踪误差能在有限时间内收敛到平衡零点; 仿真结果表明所提出的基于递归扰动模糊神经网络干扰观测器自适应二阶动态terminal滑模控制方法收敛速度快, 跟踪精度高, 并对强烈的外界扰动和系统不确定性具良好的鲁棒性.

本文所提出的回归扰动模糊神经网络存在着大量调整参数以及二阶动态terminal控制器结构过于复杂, 如何减少和优化调整参数数量以及降低控制器设计复杂度将是下一步需要深入探讨的问题.

## 参考文献(References):


[1] SU X J, YANG X Z, SHI P, et al. Fuzzy control of nonlinear electromagnetic suspension systems [J]. *Mechatronics*, 2014, 24(4): 328 – 335.

[2] GRUNE L, PANNEK J. *Nonlinear Model Predictive Control* [M]. London: Springer-Verlag, 2011.

[3] SHEN Q K, SHI P. Distributed command filtered backstepping consensus tracking control of nonlinear multiple agent systems in strict-feedback form [J]. *Automatica*, 2015, 53(3): 120 – 124.

[4] CHEN M, CHEN W H. Sliding mode control for a class of uncertain nonlinear system based on disturbance observer [J]. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 2010, 24(1): 51 – 64.

[5] BAEK J. A new adaptive sliding-mode control scheme for application to robot manipulators [J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2016, 63(6): 3628 – 3637.

[6] SHI P, LIU M, ZHANG L. Fault-tolerant sliding mode observer synthesis of Markovian jump systems using quantized measurements [J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2015, 62(9): 5910 – 5918.

[7] KUO C L. Design of a fuzzy sliding-mode synchronization controller for two different chaos systems [J]. *Computers & Mathematics with Applications*, 2011, 61(8): 2090 – 2095.

[8] RAY A S, BHATTACHARYA A. Improved tracking of shunt active power filter by sliding mode control [J]. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, 2016, 78(6): 916 – 925.

[9] ELMOKADEM T, ZRIBI M. Trajectory tracking sliding mode control of underactuated AUVs [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2016, 84(2): 1 – 13.

[10] LU Y S, CHIU C W. Global sliding-mode control with generalized sliding dynamics [J]. *Asian Journal of Control*, 2009, 11(4): 449 – 456.

[11] MOBAYEN S. An LMI-based robust controller design using global nonlinear sliding surfaces and application to chaotic systems [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2015, 79(2): 1075 – 1084.

[12] LU Y S, CHIU C W, CHEN J S. Time-varying sliding-mode control for finite-time convergence [J]. *Electrical Engineering*, 2010, 92(7): 257 – 268.

[13] JIANG B, XU D Z, SHI P, et al. Adaptive neural observer-based backstepping fault tolerant control for near space vehicle under control effector damage [J]. *IET Control Theory & Applications*, 2014, 8(9): 658 – 666.

[14] CHEN P C, CHEN C W, CHIANG W L. GA-based modified adaptive fuzzy sliding mode controller for nonlinear systems [J]. *Expert Systems with Applications*, 2009, 36(3): 5872 – 5879.

[15] PU Ming, WU Qingxian, JIANG Changsheng, et al. Adaptive second-order dynamic sliding-mode control based on fuzzy disturbance-observer [J]. *Control Theory & Applications*, 2011, 28(6): 805 – 812. (蒲明, 吴庆宪, 姜长生, 等. 基于模糊干扰观测器的自适应二阶动态滑模控制 [J]. 控制理论与应用, 2011, 28(6): 805 – 812.)

[16] LIN F J, HWANG W J, WAI R J. A supervisory fuzzy neural network control system for tracking periodic inputs [J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 1999, 7(1): 41 – 52.

[17] LIN C M, LI H Y. Adaptive dynamic sliding-mode fuzzy CMAC for voice coilmotor using asmmetric Gaussian membership function [J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2014, 61(10): 5662 – 5671.

[18] LIN C M, LI H Y. Dynamic petri fuzzy cerebellar model articulation controller design for a magnetic levitation system and a two-axis linear piezoelectric ceramic motor drive system [J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2015, 23(2): 693 – 699.

[19] LU H C, CHANG M H, TSAI C H. Parameter estimation of fuzzy neural network controller based on a modified differential evolution [J]. *Neurocomputing*, 2012, 89(7): 178 – 192.

[20] YU X H, MAN Z H. Fast terminal sliding mode control design for nonlinear dynamic systems [J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems, Part I：Fundamental Theory and Applications*, 2002, 39(2): 261 – 264.

[21] MEI R, WU Q X, JIANG C S. Robust adaptive backstepping control for a class of uncertain nonlinear systems based on disturbance observers [J]. *Science China Information Sciences*, 2010, 53(6): 1201 – 1215.

[22] ZHANG Qiang, YU Hongliang, XU Dezhi. A robust adaptive integral terminal sliding mode control for uncertain nonlinear systems using self-organizing wavelet cerebella model articulation controller [J]. *Control Theory & Applications*, 2016, 33(3): 387 – 397. (张强, 于宏亮, 许德智, 等. 基于自组织小波小脑模型关节控制器的不确定非线性系统鲁棒自适应终端滑模控制 [J]. 控制理论与应用, 2016, 33(3): 387 – 397.)

[23] KIM Y H, LEWIS F L, ABDALLAH C T. A dynamic recurrent neural-network-based adaptive observer for a class of nonlinear systems [J]. *Automatica*, 1997, 33(8): 1539 – 1543.

[24] WANG L X. *Adaptive Fuzzy Systems and Control: Design and Stability Analysis* [M]. New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1994.

[25] KHALIL H K. *Nonlinear Systems* [M]. New Jersey: Prentice Hall, 2002.

[26] ZHANG Qiang, WU Qingxian, JIANG Changsheng, et al. Robust control for nonaffine nonlinear systems based on backstepping [J]. *Control and Decision*, 2014, 29(1): 19 – 26. (张强, 吴庆宪, 姜长生, 等. 基于backstepping的非仿射非线性系统鲁棒控制 [J]. 控制与决策, 2014, 29(1): 19 – 26.)

[27] NAGARALE R M, PATRE B M. Exponential function based fuzzy sliding mode control of uncertain nonlinear systems [J]. *International Journal of Dynamics & Control*, 2014, 4(1): 1 – 9.

[28] CHEN H K. Chaos and chaos synchronization of a symmetric gyro with linear-plus damping [J]. *Journal of Sound & Vibration*, 2003, 268(3): 632 – 634.

[29] YAU H T. Chaos synchronization of two uncertain chaotic nonlinear gyros using fuzzy sliding mode control [J]. *Mechanical Systems & Signal Processing*, 2008, 22(2): 408 – 418.

## 作者简介:

**张　强**　(1980–), 男, 副教授, 博士, 硕士生导师, 目前研究方向为非线性鲁棒自适应控制以及自治飞行控制等, E-mail: zhang_hongyu198023@163.com;

**袁铸钢**　(1964–), 男, 教授, 硕士生导师, 目前研究方向为鲁棒控制及智能控制等, E-mail: cse_yzg@ujn.edu.cn;

**许德智**　(1985–), 男, 副教授, 博士, 硕士生导师, 目前研究方向为复杂系统建模与容错控制等, E-mail: xudezhi@jiangnan.edu.cn.