

严格反馈非线性系统的自适应神经网络输出反馈控制

孙国法^{1†}, 田宇², 王素珍¹

(1. 青岛理工大学 自动化工程学院, 山东 青岛 266520;

2. 北京航天自动控制研究所; 宇航智能控制技术国家级重点实验室, 北京 100854)

摘要: 基于非线性反馈函数, 文章设计神经网络状态观测器, 解决一类非线性系统的输出反馈控制问题. 非线性反馈神经网络观测器在系统存在不确定性函数的情况下实时估计系统状态. 利用所获得的状态信号, 设计了自适应神经网络动态面控制器, 同时保证了闭环系统的稳定性和所有信号的有界性. 通过调节设计参数的取值能够达到期望的闭环跟踪性能. 数值仿真表明, 所设计的状态观测器不需要对原系统做状态变换, 能够克服输出反馈滑模控制器带来的抖震问题.

关键词: 状态观测器; 动态面控制; 自抗扰控制; 神经网络

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Adaptive neural output feedback control for strict feedback nonlinear system

SUN Guo-fa^{1†}, TIAN Yu², WANG Su-zhen¹

(1. College of Automation Engineering, Qingdao University of Technology, Qingdao Shandong 266520, China;

2. Beijing Aerospace Automatic Control Institute; National Key Laboratory of Science and Technology on Aerospace Intelligence, China Academy of Launch Vehicle Technology, Beijing 100854, China)

Abstract: Based on nonlinear feedback function, this paper investigates output feedback control problem for a class of nonlinear systems. In the case of systems with uncertain functions, nonlinear feedback neural network observer estimates system states in real time. Employing the obtained state signals, an adaptive neural network controller is designed to guarantee the stability of the closed-loop system and the boundedness of all signals. The desired closed-loop tracking performance can be achieved by adjusting the value of the design parameters. Numerical simulation results show that, without state transformation, the state observer overcomes the chattering problem caused by the output feedback sliding mode controller.

Key words: state observer; dynamic surface control; active disturbance rejection control; neural network

1 引言(Introduction)

非线性系统的反步法控制由Polycarpou等^[1]提出以来, 成为一种设计非线性不确定性系统自适应^[2]鲁棒控制策略的有力工具. 在过去几十年中, 学者们基于反步法控制思想, 解决了许多复杂的非线性系统控制问题, 提出了一些自适应控制策略. 例如, 自适应神经网络控制器^[3]、模糊逻辑反步法^[4]等. 在此基础上, Ren等^[5]研究了带有输入端滞环的一类纯反馈形式非线性系统的自适应神经网络控制. 针对自适应反步法的“复杂性爆炸”问题, Swaroop等^[6]提出动态面控制算法^[7], 避免了对虚拟控制信号的重复微分, 从而简化了反步法控制器的设计过程. 这些神经网络与自适应反步法控制相结合的控制策略解决了多种非线性

系统的反馈控制问题. 然而, 状态观测问题一直阻碍着这类控制算法的实际应用. 于是, 在解决输出反馈控制问题上, 又涌现出很多有创意的成果.

输出反馈控制需要设计一个合适的状态观测器^[8-10], 实现在系统状态未测量情况下的反馈控制. 伴随着自适应反步法控制的深入研究, 基于状态观测器的研究工作也逐步展开. 此处, 列举其中的一些代表性成果. 利用高增益观测器来估计系统输出的高阶导数, Ge等^[8]对一类一般化的非线性系统提出了一种自适应神经网络输出反馈控制器. 同样基于神经网络, Hua和Guan^[9]研究了一类带有输入端时延的耦合非线性系统动态输出反馈控制问题, 首次提出了独立于时延的解耦观测器. 针对不确定性飞行器的姿态控制问

收稿日期: 2016-07-13; 录用日期: 2016-12-29.

[†]通信作者. E-mail: sunguofa.bo@163.com; Tel.: +86 18562753779.

本文责任编辑: 夏元清.

中国博士后科学基金项目(2013M541939), 国家自然科学基金项目(61640302)资助.

Supported by China Postdoctoral Science Foundation (2013M541939) and National Natural Science Foundation of China (61640302).

题, Zou等^[10]应用四元数法提出了两种基于切比雪夫神经网络(Chebyshev neural networks, CNN)的自适应输出反馈控制器. 非线性降阶观测器被用来估计飞行器输出的微分信号. 从上述已有的结果来看, 状态观测器的性能受到系统的结构不确定性和外部干扰信号的影响. 同时, 观测效果直接影响闭环系统的控制性能. 而扩张状态观测器能够同时观测系统的状态信号和总扰动信号, 在实际应用中获得了很好的控制效果.

扩张状态观测器是自抗扰控制(active disturbance rejection control, ADRC)的核心部分之一, 直接影响到非线性反馈的能否实现及闭环系统的稳定性. 在自抗扰控制算法中, 从传统PID控制原理出发并分析其优缺点, 韩京清^[11]利用非线性机制开发了具有特殊功能的非线性函数, 提出了最速非线性反馈函数来实现快速无超调信号跟踪. 扩张状态观测器同时观测系统状态和扰动信号形成符合控制反馈信号来保证闭环系统的控制性能. 然而, 在不确定性非线性系统中, 扩张状态观测器^[12]很难观测系统的实际状态, 观测状态变换之后的状态又会出现高增益反馈的弊端. 本文将采用自抗扰算法中的非线性反馈函数设计自适应神经网络观测器, 避免高增益观测器由于反馈参数取值过高而产生的抖震问题. 由此, 设计自适应输出反馈动态面控制器, 提高控制系统的闭环跟踪性能.

本文的组织结构如下: 在第2节中, 给出一类严格反馈控制非线性的系统的数学模型及其控制目标; 在第3节中, 针对非线性系统直接设计神经网络观测器, 给出网络权值调节律; 在第4节中, 基于神经网络观测器, 设计输出反馈自适应动态面控制器; 第5节对所设计的输出反馈控制信号及整个闭环系统的稳定性做了分析; 第6节中, 数值算例结果及其分析验证了本文所提出方法的有效性; 第7节对本文的工作做了总结.

2 问题描述(Problem description)

考虑如下形式的严格反馈不确定性系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1) + x_2, \\ \dot{x}_i = f_i(x_i) + x_{i+1}, \\ \dot{x}_n = f_n(x_n) + u, \\ y = x_1, \quad i = 2, \dots, n-1, \end{cases} \quad (1)$$

其中: $f_p(x_p)$ ($p = 1, \dots, n$) 是光滑的未知非线性函数, $y = x_1$ 是系统输出信号, u 表示系统控制输入信号, x_p 代表 p 维状态向量.

注 1 式(1)能够表示更广泛的一类实际系统. 事实上, 由传递函数描述的时延线性系统通过选取合适的状态变量, 能够化为由式(1)描述的被控对象. 因此, 在接下来的控制器设计中, 本文将针对由模型(1)描述的非线性系统设计输出反馈自适应动态面控制器, 设计的控制同样适用于由传递函数描述的线性时变系统.

如图1所示, 对于含有未知非线性函数的非线性系统(1), 本文的控制目标是设计一个自适应输出反馈动态面控制器, 使得系统的输出信号 $y = x_1$ 能够跟踪给定的参考信号 x_d , 整个闭环系统在李雅普诺夫意义下是稳定的, 且跟踪误差 e_1 能够在有限时间内收敛到原点附近一个邻域中, 通过调节设计参数可以使得该邻域的任意小. 另外, 调节控制器设计参数, 能够保证输出信号 y 具有很好的跟踪性能.

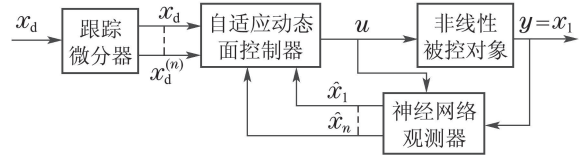


图1 闭环控制系统框图

Fig. 1 Closed-loop control diagram

引理 1 径向基函数神经网络(radical basis function neural networks, RBFNN)^[3,5,13]能够逼近未知光滑连续非线性函数 $f(X) : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}$, 形式如下:

$$f(X) = \Theta^T \Phi(X) + \varepsilon, \quad (2)$$

其中: $X = [X_1 \ X_2 \ \dots \ X_q]^T \in \mathbb{R}^q$ 为神经网络的输入向量, $\Theta \in \mathbb{R}^q$ 是神经网络的权值向量, $\Phi(X) = [\Phi_1(X) \ \Phi_2(X) \ \dots \ \Phi_q(X)]^T \in \mathbb{R}^q$ 为神经网络的基函数向量; ε 为估计误差且满足 $|\varepsilon| < \bar{\varepsilon}$; 其中 $\bar{\varepsilon}$ 为估计误差的上界.

在下述观测器设计中, 用 $\hat{\theta}$ 来表示对神经网络权值向量 θ 的估计, 估计误差用 $\tilde{\theta}$ 来表示. 而在控制器设计中, 用 $\hat{\Theta}$ 来表示对神经网络权值向量 Θ 的估计, 估计误差用 $\tilde{\Theta}$ 来表示.

3 观测器设计(Observer design)

定义状态观测器的形式为

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = \hat{f}_1(\hat{x}_1) + \hat{x}_2 + \alpha_1, \\ \dot{\hat{x}}_i = \hat{f}_i(\hat{x}_i) + \hat{x}_{i+1} + \alpha_i, \\ \dot{\hat{x}}_n = \hat{f}_n(\hat{x}_n) + u + \alpha_n, \end{cases} \quad (3)$$

其中: \hat{x}_p ($p = 1, \dots, n$) 表示对系统状态 x_p 的估计, $\hat{f}_p(\hat{x}_p)$ 表示采用神经网络对未知函数 $f_p(x_p)$ ($p = 1, \dots, n$) 的估计, 非线性反馈项选为

$$\begin{cases} \alpha_1 = -\beta_1 \text{fal}(\eta_1, \delta_1, \kappa_1), \\ \alpha_i = -\beta_i \text{fal}(\eta_i, \delta_i, \kappa_i), \\ \alpha_n = -\beta_n \text{fal}(\eta_n, \delta_n, \kappa_n), \end{cases} \quad (4)$$

式中: β_p ($p = 1, \dots, n$) 为反馈增益. 韩京清教授在自抗扰控制算法文献^[11]中提出的非线性函数 $\text{fal}(\eta, \delta, \kappa)$ 的表达式为

$$\text{fal}(\kappa, \delta, \eta) = \begin{cases} |\eta|^\kappa \text{sgn } \eta, & |\eta| > \delta, \\ \frac{\eta}{\delta^{1-\kappa}}, & |\eta| \leq \delta, \end{cases} \quad (5)$$

其中: κ 是一个正的设计参数, $\delta > 0$ 表示误差的边界, η 代表扩张状态观测器的跟踪误差.

神经网络权值调节律选为

$$\dot{\hat{\theta}}_i = -G_i(\tilde{x}_i \phi(\mathbf{x}_i) - \sigma_i \hat{\theta}_i). \quad (6)$$

定义观测器的跟踪误差为

$$\begin{cases} \eta_1 = \hat{x}_1 - x_1, \\ \eta_2 = \hat{x}_2 - \alpha_1, \\ \eta_i = \hat{x}_i - \alpha_{i-1}, \\ \eta_n = \hat{x}_n - \alpha_{n-1}. \end{cases} \quad (7)$$

由式(1)(3)可得, 观测误差满足的动态方程为

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = \tilde{\theta}_1^T \phi(x_1) + \epsilon_1 + \tilde{x}_2 + \alpha_1, \\ \dot{\tilde{x}}_i = \tilde{\theta}_i^T \phi(\mathbf{x}_i) + \epsilon_i + \tilde{x}_{i+1} + \alpha_i, \\ \dot{\tilde{x}}_n = \tilde{\theta}_n^T \phi(\mathbf{x}_n) + \epsilon_n + \alpha_n. \end{cases} \quad (8)$$

考虑如下形式的李雅普诺夫候选泛函:

$$V_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \tilde{x}_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \tilde{\theta}_i^T G_i^{-1} \tilde{\theta}_i. \quad (9)$$

对李雅普诺夫泛函求时间的导数, 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_e &= \sum_{i=1}^n \tilde{x}_i \dot{\tilde{x}}_i + \sum_{i=1}^n \tilde{\theta}_i^T G_i^{-1} \dot{\tilde{\theta}}_i = \\ & \sum_{i=1}^n \tilde{x}_i (\tilde{\theta}_i^T \phi(\mathbf{x}_i) + \tilde{x}_{i+1} + \epsilon_i + \alpha_i) + \\ & \sum_{i=1}^n \tilde{\theta}_i^T (-\tilde{x}_i \phi(\mathbf{x}_i) - \sigma_i \hat{\theta}_i) = \\ & \sum_{i=1}^n (\tilde{x}_i \tilde{x}_{i+1} + \tilde{x}_i \epsilon_i + \tilde{x}_i \alpha_i) - \sum_{i=1}^n \sigma_i \tilde{\theta}_i^T \hat{\theta}_i \leq \\ & \sum_{i=1}^n (\tilde{x}_i \tilde{x}_{i+1} + |\tilde{x}_i| \epsilon_i^* + \tilde{x}_i \alpha_i) - \sum_{i=1}^n \sigma_i \tilde{\theta}_i^T \hat{\theta}_i. \end{aligned} \quad (10)$$

在上式中, 不难证明下列不等式成立:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_i \tilde{x}_{i+1} &\leq \frac{1}{2} \tilde{x}_i^2 + \frac{1}{2} \tilde{x}_{i+1}^2, \\ |\tilde{x}_i| \epsilon_i^* &\leq \frac{\tilde{x}_i^2}{4c_i} + c_i \epsilon_i^{*2}, \\ \sigma_i \tilde{\theta}_i^T \hat{\theta}_i &\leq -\frac{\sigma_i \|\tilde{\theta}_i\|^2}{2} + \frac{\sigma_i \|\theta_i^*\|^2}{2}, \end{aligned} \quad (11)$$

其中参数 $c_i > 0$.

将不等式(11)代入式(10)得

$$\dot{V}_e \leq -\rho_e V_e + \gamma_e, \quad (12)$$

式中 ρ_e 和 γ_e 定义为

$$\begin{cases} \rho_e = \min\left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{4c_1}, 1 + \frac{1}{4c_i}, \frac{1}{2} + \frac{1}{4c_1}, \sigma_i \lambda_{\min}(G_i)\right\}, \\ \gamma_e = c_i \epsilon_i^{*2} + \frac{\sigma_i \|\theta_i^*\|^2}{2}, \end{cases} \quad (13)$$

其中 $i = 2, \dots, n-1$.

对式(12)左右两边同时乘以 $e^{\rho_e t}$ 并在区间 $[0, t]$ 上积分得

$$V_e(t) \leq \frac{\gamma_e}{\rho_e} + (V(0) - \frac{\gamma_e}{\rho_e}) e^{-\rho_e t}. \quad (14)$$

上式表明, 通过神经网络权值调节律的设计参数, 能够保证观测器系统的观测误差和神经网络权值的估计误差是有界的, 改变参数值能够提高观测性能.

基于本节中设计的神经网络观测器(8), 在下面一节中, 将设计自适应输出反馈动态面控制信号并给出稳定性分析.

4 动态面控制器设计(Dynamic surface controller design)

本节中, 将应用反步法并结合神经网络函数逼近器, 研究系统(1)的自适应神经网络控制器. 反步法设计过程将分为 n 步, 并且包含如下坐标变换:

$$\begin{cases} e_1 = \hat{x}_1 - x_d, \\ e_i = \hat{x}_i - \vartheta_{i-1}, \\ e_n = \hat{x}_n - \vartheta_{n-1}, \end{cases} \quad (15)$$

其中 $\alpha_j (j = 1, \dots, n-1)$ 是针对第 j 个子系统设计基于合适的李雅普诺夫泛函 V_j 的虚拟控制信号. 控制信号 u 在最后一步设计, 来稳定整个闭环系统并实现输出反馈控制.

Step 1 既然有 $e_1 = \hat{x}_1 - x_d$ 和 $e_2 = \hat{x}_2 - \vartheta_1$, 那么 e_1 的微分信号可以写为

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= \dot{\hat{x}}_1 - \dot{x}_d = \hat{f}_1(x_1) + \hat{x}_2 + \alpha_1 - \dot{x}_d = \\ & e_2 + \vartheta_1 + Q_1(X_1), \end{aligned} \quad (16)$$

其中: $Q_1(X_1) = \hat{f}_1(x_1) - \dot{x}_d$ 的输入向量为 $X_1 = [x_1 \ x_d]^T \in \Omega_{X_1} \subset \mathbb{R}^2$. 为了补偿未知函数 $Q_1(X_1)$, 在紧集 Ω_{X_1} , 采用神经网络 $\theta_1^T \Phi(X_1)$ 来逼近该函数如下:

$$Q_1(X_1) = \theta_1^T \Phi(X_1) - \hat{\theta}_1^T \Phi(X_1) + \epsilon_1, \quad (17)$$

其中: $\hat{\theta}_1 \in \mathbb{R}^{l \times 1}$ 和 $\Phi_1(X_1) \in \mathbb{R}^{l \times 1}$ 分别表示网络权值和基向量, l 是结点的个数. 函数逼近误差 ϵ_1 满足不等式 $|\epsilon_1| \leq \epsilon_1^*$, ϵ_1^* 为正常数.

把式(17)代入式(16)得

$$\dot{e}_1 = e_2 + \vartheta_1 + \hat{\theta}_1^T \Phi(X_1) - \hat{\theta}_1^T \Phi(X_1) + \epsilon_1. \quad (18)$$

选取虚拟控制信号及参数自适应律为

$$\begin{cases} \vartheta_1 = -k_1 e_1 - \hat{\theta}_1^T \Phi(X_1), \\ \dot{\hat{\theta}}_1 = \Gamma(e_1 \Phi(X_1) - \varrho_1 \hat{\theta}_1), \end{cases} \quad (19)$$

其中: $\Gamma^T = \Gamma \in \mathbb{R}^{l \times l}$, $k_1 > 0$ 和 $\varrho_1 > 0$ 是设计参数.

考虑如下形式的李雅普诺夫候选泛函:

$$V_1 = \frac{1}{2} e_1^2 + \frac{1}{2} \hat{\theta}_1^T \Gamma^{-1} \hat{\theta}_1. \quad (20)$$

对上述函数求时间的微分, 并考虑式(16)(19)得

$$\dot{V}_1 = e_1 \dot{e}_1 + \hat{\theta}_1^T \Gamma^{-1} \dot{\hat{\theta}}_1 =$$

$$\begin{aligned} & -k_1 e_1^2 + e_1 e_2 + \varepsilon_1 e_1 - \varrho_1 \tilde{\Theta}_1^T \hat{\Theta}_1 \leq \hat{f}_i(\mathbf{x}_i) + \hat{x}_{i+1} + \alpha_i - \dot{\vartheta}_i. \quad (29) \\ & -k_1 e_1^2 + e_1 e_2 + \varepsilon_1^* |e_1| - \varrho_1 \tilde{\Theta}_1^T \hat{\Theta}_1. \quad (21) \end{aligned}$$

在上式中, 可以证明下列不等式成立:

$$\begin{cases} e_1 e_2 \leq \frac{e_1^2}{2} + \frac{e_2^2}{2}, \\ \varepsilon_1^* |e_1| \leq \frac{e_1^2}{4c_{11}} + c_{11} \varepsilon_1^{*2}, \\ -\varrho_1 \tilde{\Theta}_1^T \hat{\Theta}_1 \leq -\frac{\varrho_1 \|\tilde{\Theta}_1\|^2}{2} + \frac{\varrho_1 \|\Theta_1^*\|^2}{2}, \end{cases} \quad (22)$$

其中参数 $c_{11} > 0$.

把式(22)代入式(21)得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 & \leq -\left(k_1 - \frac{1}{4c_{11}} - \frac{1}{2}\right)e_1^2 - \frac{\varrho_1 \|\tilde{\Theta}_1\|^2}{2} + \\ & c_{11} \varepsilon_1^{*2} + \frac{\varrho_1 \|\Theta_1^*\|^2}{2} + \frac{e_2^2}{2} \leq \\ & -\rho_1 V_1 + \gamma_1 + \frac{e_2^2}{2}, \end{aligned} \quad (23)$$

其中 γ_1 和 ρ_1 是正常数, 定义为

$$\begin{cases} \rho_1 = \min\left\{2\left(k_1 - \frac{1}{4c_{11}} - \frac{1}{2}\right), \varrho_1 \lambda_{\min}(\Gamma_1)\right\}, \\ \gamma_1 = c_{11} \varepsilon_1^{*2} + \frac{\varrho_1 \|\Theta_1^*\|^2}{2}. \end{cases} \quad (24)$$

上述不等式两边同乘以 $e^{\rho_1 t}$ 得

$$\frac{d}{dt}(V_1 e^{\rho_1 t}) \leq \gamma_1 e^{\rho_1 t} + \frac{e_2^2}{2} e^{\rho_1 t}. \quad (25)$$

对式(25)两端在时间域 $[0, t]$ 上积分, 得到

$$\begin{aligned} V_1(t) & \leq \frac{\gamma_1}{\rho_1} + (V_1(0) - \frac{\gamma_1}{\rho_1})e^{-\rho_1 t} + \\ & e^{-\rho_1 t} \int_0^t \frac{e_2^2}{2} e^{\rho_1 \tau} d\tau. \end{aligned} \quad (26)$$

上式最后一项具有如下性质:

$$\begin{aligned} & e^{-\rho_1 t} \int_0^t \frac{e_2^2}{2} e^{\rho_1 \tau} d\tau \leq \\ & \frac{1}{2} \sup_{\tau \in [0, t]} e_2^2(\tau) e^{-\rho_1 t} \int_0^t e^{\rho_1 \tau} d\tau \leq \\ & \frac{1}{2\rho_1} \sup_{\tau \in [0, t]} e_2^2(\tau). \end{aligned} \quad (27)$$

因此, 如果 e_2 能够在有限时间 $[0, t_f]$ 之内保持有界, 就能得到式(27)最后一项的有界性. 那么, 式就可以写为

$$V_1(t) \leq \frac{\bar{\gamma}_1}{\rho_1} + (V_1(0) - \frac{\gamma_1}{\rho_1})e^{-\rho_1 t}, \quad (28)$$

其中 $\bar{\gamma}_1 = \gamma_1 + \frac{1}{2} \sup_{\tau \in [0, t]} e_2^2(\tau)$.

Step i 由式(9)的第2式直接对时间 t 求导可得

$$\dot{e}_i = \dot{\hat{x}}_i - \dot{\vartheta}_{i-1} =$$

式(29)可以改写为

$$\dot{e}_i = e_{i+1} + \vartheta_i + \alpha_i + Q_i(X_i), \quad (30)$$

其中: $Q(X_i) = f_i(\mathbf{x}_i) - \dot{\vartheta}_{i-1}$ 是一个能够被神经网络 $\Theta_i^T \Phi(X_i)$ 来逼近的未知的光滑非线性函数, 神经网络的输入向量为 $X_i = [\mathbf{x}_i \ \dot{\vartheta}_{i-1}] \in \Omega_{X_i} \subset \mathbb{R}^{i+1}$. 于是, 在紧集 Ω_{X_i} 上有

$$Q_i(X_i) = \hat{\Theta}_i^T \Phi(X_i) - \tilde{\Theta}_i^T \Phi(X_i) + \varepsilon_i, \quad (31)$$

其中, 函数逼近误差满足 $|\varepsilon_i| \leq \varepsilon_i^*$, ε_i 为正常数. 将式(31)代入式(30)可得

$$\dot{e}_i = \hat{x}_{i+1} + \vartheta_i + \hat{\Theta}_i^T \Phi(X_i) - \tilde{\Theta}_i^T \Phi(X_i) + \varepsilon_i. \quad (32)$$

此时, 考虑如下的虚拟控制信号以及神经网络参数调节律:

$$\begin{cases} \dot{\vartheta}_i = -k_i e_i^2 - \hat{\Theta}_i^T \Phi(X_i), \\ \dot{\hat{\Theta}}_i = \Gamma_i (e_i \Phi(X_i) - \varrho_i \hat{\Theta}_i), \end{cases} \quad (33)$$

其中: $\Gamma_j = \Gamma_j^T > 0$, k_i 和 ϱ_i 都是正常数.

定义新的李雅普诺夫候选泛函为

$$V_i = \frac{1}{2} e_i^2 + \frac{1}{2} \tilde{\Theta}_i^T \Gamma_i^{-1} \tilde{\Theta}_i. \quad (34)$$

对 V_2 求导数可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 & = e_2 \dot{e}_2 + \tilde{\Theta}_i^T \Gamma_i^{-1} \dot{\hat{\Theta}}_i = \\ & -k_i^2 e_i^2 - \varrho_i \tilde{\Theta}_i^T \dot{\hat{\Theta}}_i. \end{aligned} \quad (35)$$

类似于步骤1中的推导过程, 利用Young不等式, 可得 V_i 的微分为

$$\begin{aligned} \dot{V}_i & \leq -\left(k_i - \frac{1}{4c_{i1}} - \frac{1}{2}\right)e_i^2 - \frac{\varrho_i \|\tilde{\Theta}_i\|^2}{2} + \\ & c_{i1} \varepsilon_i^* + \frac{\varrho_i \|\Theta_i^*\|^2}{2} + \frac{e_{i+1}^2}{2} \leq \\ & -\rho_i V_i + \gamma_i + \frac{e_{i+1}^2}{2}, \end{aligned} \quad (36)$$

其中正常数 ρ_i 和 γ_i 定义为

$$\begin{cases} \rho_i = \min\left\{2\left(k_i - \frac{1}{4c_{i1}} - \frac{1}{2}\right), \varrho_i \lambda_{\min}(\Gamma_i)\right\}, \\ \gamma_i = c_{i1} \varepsilon_i^{*2} + \frac{\varrho_i \|\Theta_i^*\|^2}{2}. \end{cases} \quad (37)$$

不等式(36)两边同乘以 $e^{\rho_i t}$ 然后在区间 $[0, t]$ 上得

$$\begin{aligned} V_i(t) & \leq \frac{\gamma_i}{\rho_i} + (V_i(0) - \frac{\gamma_i}{\rho_i})e^{-\rho_i t} + \\ & e^{-\rho_i t} \int_0^t \frac{e_{i+1}^2}{2} e^{\rho_i \tau} d\tau. \end{aligned} \quad (38)$$

与第1步中的分析类似, 上式中最后一项可以表示为

$$e^{-\rho_i t} \int_0^t \frac{e_{i+1}^2}{2} e^{\rho_i \tau} d\tau \leq \frac{1}{2\rho_i} \sup_{\tau \in [0, t]} e_{i+1}^2(\tau). \quad (39)$$

因此, 如果 e_{i+1} 能够在有限时间 $[0, t_f]$ 后保持有界, 就能保证式

$$V_i(t) \leq \frac{\bar{\gamma}_i}{\rho_i} + (V_i(0) - \frac{\gamma_i}{\rho_i})e^{-\rho_i t}, \quad (40)$$

其中 $\bar{\gamma}_i = \gamma_i + \frac{1}{2} \sup_{\tau \in [0, t]} e_{i+1}^2(\tau)$.

Step n 在这一步骤中, 本文将设计实际控制信号 $u(t)$. 考虑跟踪误差 $e_n = \hat{x}_n - \vartheta_{n-1}$, 其对时间的微分为

$$\begin{aligned} \dot{e}_n &= \dot{\hat{x}}_n - \dot{\vartheta}_{n-1} = \\ &\hat{f}_n(\mathbf{x}_n) + u + \alpha_n - \dot{\vartheta}_{n-1} = \\ &u + Q(X_n) + \alpha_n = \\ &u + \hat{\Theta}_n \Phi(X_n) - \tilde{\Theta}_n \Phi(X_n) + \varepsilon_n + \alpha_n, \end{aligned} \quad (41)$$

其中: $\hat{\Theta}_n \Phi(X_n)$ 用来在紧集 $\Omega_{X_n} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 上逼近未知函数 $Q_n(X_n) = \hat{f}_n(\mathbf{x}_n) - \dot{\vartheta}_{n-1}$, 输入向量为 $X_n = [\mathbf{x}_n \ \dot{\vartheta}_{n-1}]$. 函数逼近误差 $|\varepsilon_n| \leq \varepsilon_n^*$ (ε_n^* 为正常数).

实际控制信号选为

$$u = -k_n e_n - \hat{\Theta}_n \Phi(X_n) + \omega_n, \quad (42)$$

其中神经网络参数自适应律为

$$\dot{\hat{\Theta}}_n = \Gamma(e_n \Phi(X_n) - \varrho_n \hat{\Theta}_n), \quad (43)$$

式中: $\Gamma_n^T = \Gamma_n > 0$, k_n, ϱ_n 为正常数.

考虑如下形式的李雅普诺夫候选泛函:

$$V_n = \frac{1}{2} e_n^2 + \frac{1}{2} \tilde{\Theta}_n \Gamma_n^{-1} \tilde{\Theta}_n. \quad (44)$$

对 V_n 求时间的导数, 得到

$$\begin{aligned} \dot{V}_n &= e_n \dot{e}_n + \Theta_n \Gamma_n^{-1} \dot{\hat{\Theta}}_n = \\ &e_n [u + \hat{\Theta}_n \Phi(X_n) - \tilde{\Theta}_n \Phi(X_n) + \\ &\varepsilon_n + \alpha_n] + \Theta_n \Gamma_n^{-1} \dot{\hat{\Theta}}_n. \end{aligned} \quad (45)$$

把式(42)-(43)代入式(45)有

$$\dot{V}_n = -k_n e_n^2 - \varrho_n \tilde{\Theta}_n \Gamma_n^{-1} \hat{\Theta}_n. \quad (46)$$

在此利用Young不等式, 得到

$$\begin{aligned} \dot{V}_n &= -\left(k_n - \frac{1}{4c_{n1}}\right) e_n^2 - \frac{\varrho_n \|\tilde{\Theta}_n\|^2}{2} + \\ &c_{n1} \varepsilon_n^* + \frac{\varrho_{n1} \|\Theta_n^*\|^2}{2} \leq \\ &-\rho_n V_n + \gamma_n, \end{aligned} \quad (47)$$

其中常数 ρ_n 和 γ_n 定义为

$$\begin{cases} \rho_n = \min\left\{2\left(k_n - \frac{1}{4c_{n1}}\right), \varrho_n \lambda_{\min}(\Gamma_n)\right\}, \\ \gamma_n = c_{n1} \varepsilon_n^{*2} + \frac{\varrho_{n1} \|\Theta_n^*\|^2}{2}. \end{cases} \quad (48)$$

对不等式(47)两边同乘以 $e^{\rho_n t}$ 并在区间 $[0, t]$ 上积分得

$$V_n(t) \leq \frac{\gamma_n}{\rho_n} + (V_n(0) - \frac{\gamma_n}{\rho_n})e^{-\rho_n t}. \quad (49)$$

考虑不等式(28)(40)和(49), 下节中将给出整个闭环系统的稳定性证明及所有信号的有界性.

5 稳定性证明(Stability proof)

定理 1 考虑由被控对象(1), 虚拟控制律(19)(33), 控制律(42)和参数自适应律(43)组成的闭环系统. 给定任意的初始状态 $\hat{\Theta}(0)$ 属于集合 Ω_0 , 整个闭环神经网络控制系统所有信号都是有界的. 系统状态和网络权值将保持在一个紧集 Ω 中, Ω 定义为

$$\Omega = \{e_i, \tilde{\Theta}_i \mid |e_i| \leq \sqrt{2\mu_i}, \|\tilde{\Theta}_i\| \leq \sqrt{2\lambda_{\max}(\Gamma_i)\mu_i}\}, \quad (50)$$

并逐渐收敛到紧集 Ω_s , Ω_s 定义为

$$\Omega_s = \{e_i, \tilde{\Theta}_i \mid |e_i| \leq \sqrt{2\mu_i^*}, \|\tilde{\Theta}_i\| \leq \sqrt{2\lambda_{\max}(\Gamma_i)\mu_i^*}\}, \quad (51)$$

其中 μ_i 和 μ_i^* ($i=1, \dots, n$)将在定理证明中给出定义.

证 考虑 V_n 的定义(44)及其满足的不等式(49). 在式(49)中, 令 $\mu_n = \gamma_n/\rho_n + V(0)$, 得到

$$|e_n| \leq \sqrt{2\mu_n}, \|\tilde{\Theta}_n\| \leq \sqrt{2\lambda_{\max}(\Gamma_n)\mu_n}. \quad (52)$$

类似地, 在Step $(n-1)$ 到Step 1, 令 $\mu_j = \rho_j/\gamma_j + V(0)$, 有

$$\begin{cases} |e_j| \leq \sqrt{2\mu_j}, \|\tilde{\Theta}_j\| \leq \sqrt{2\lambda_{\max}(\Gamma_j)\mu_j}, \\ j = 1, \dots, n-1. \end{cases} \quad (53)$$

对不等式两边取极限, 在 $t \rightarrow \infty$ 时, 有 $V_n \leq \mu_n^*$, 其中 $\mu_n^* = \rho_n/\gamma_n$.

因此, 根据 V_n 的定义式(44), 可以判定当 $t \rightarrow \infty$ 时, 下列不等式是成立的:

$$|e_n| \leq \sqrt{2\mu_n^*}, \|\tilde{\Theta}_n\| \leq \sqrt{2\lambda_{\max}(\Gamma)\mu_n^*}. \quad (54)$$

因此, 误差 e_n 是最终一致有界的.

同样可以得到关于 e_j 和 $\tilde{\Theta}_j$ 的如下结论:

$$|e_j| \leq \sqrt{2\mu_j^*}, \|\tilde{\Theta}_j\| \leq \sqrt{2\lambda_{\max}(\Gamma)\mu_j^*}. \quad (55)$$

由此可知, 误差 e_j 是最终一致有界的.

从式(50)-(51)对紧集 Ω 和 Ω_s 边界的定义以及 γ_i, ρ_i 的定义式, 可以看出紧集 Ω 和 Ω_s 的大小依赖于控制器设计参数 k_i 和 $\lambda_{\min}(\Gamma_i)$ 的选择. 特别的, 当增加 k_i 时, 能够减小 μ_i 和 μ_i^* , 紧集 Ω 和 Ω_s 的大小随之减小. 因此, 只要系统初始状态起始于 Ω_0 , 存在控制参数取值, 使得状态和权值向量保持在一个紧集 Ω 中, 并最终收敛到紧集 Ω_s 中. 证毕.

6 仿真算例(Simulation example)

本节采用数值仿真验证本文所提出输出反馈控制算法的有效性. 考虑如下形式的不确定严格反馈系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1) + x_2, \\ \dot{x}_2 = f_2(x_2) + u, \end{cases} \quad (56)$$

其中系统的不确定性函数取为

$$\begin{cases} f_1(x_1) = 0.1x_1^2, \\ f_2(x_2) = 0.2e^{-x_2} + x_1 \sin x_2. \end{cases} \quad (57)$$

仿真中, 参考信号取为

$$x_d = \sin t.$$

观测器, 控制器以及神经网络参数取值如表1所示.

表 1 控制算法参数表

Table 1 Parameter values of control algorithm

参数	c_1	c_2	β_1	β_2	G_1	G_2	σ_1	σ_2
取值	10	9	20	60	$2 \cdot I_{25}$	$2 \cdot I_{25}$	0.1	0.02
参数	κ_1	κ_2	δ_1	δ_2	Γ_1	Γ_2	ρ_1	ρ_2
取值	0.15	0.15	0.1	0.1	$1 \cdot I_{35}$	$3 \cdot I_{35}$	0.08	0.05

仿真结果如图2-6所示. 图2-3给出的是神经网络观测器的两个状态信号 \hat{x}_1 和 \hat{x}_2 . 图4中的曲线表示输出信号的跟踪效果. 图5给出的是观测器中采用的两个神经网络的权值范数, 而图6中给出的是自适应控制信号中采用的两个神经网络的权值范数. 从图2中的估计状态曲线可以看出, 系统状态估计及观测误差是有界的. 其中, 系统的第2个状态 x_2 的跟踪误差稍大, 这归因于神经网络没有达到持续激励条件而导致的较大的函数逼近误差. 然而, 从图4可以看出, 系统的输出信号依然具有很好的跟踪效果. 为进一步提高跟踪性能, 还需要对神经网络的持续激励条件做深入研究.

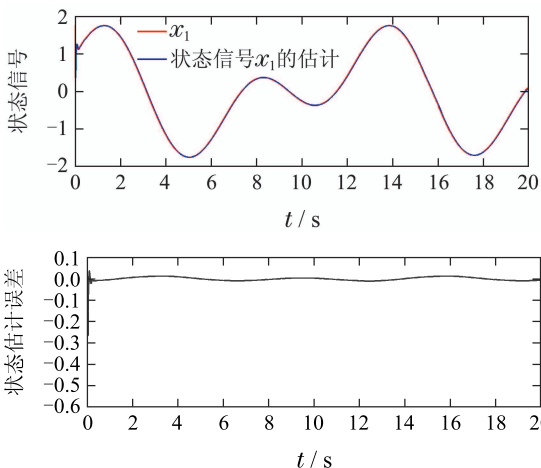


图 2 状态观测器的第1个状态
Fig. 2 First state of observer

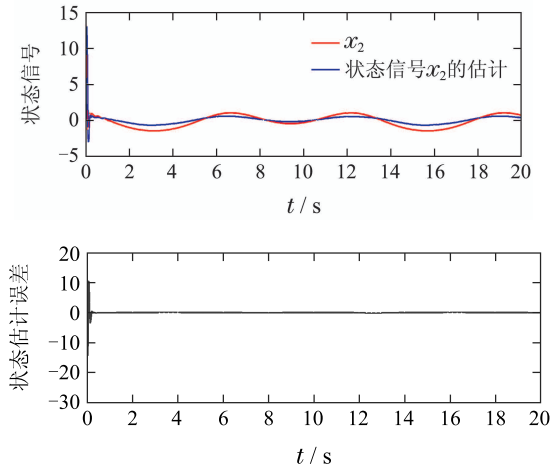


图 3 状态观测器的第2个状态
Fig. 3 Second state of observer

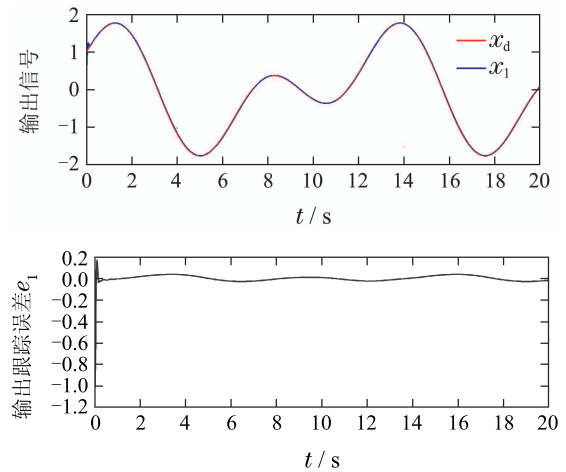


图 4 输出信号跟踪效果
Fig. 4 Output signal of tracking performance

另外, 从图5-6可以看出, 仿真中所采用的神经网络的权值范数也是有界的.

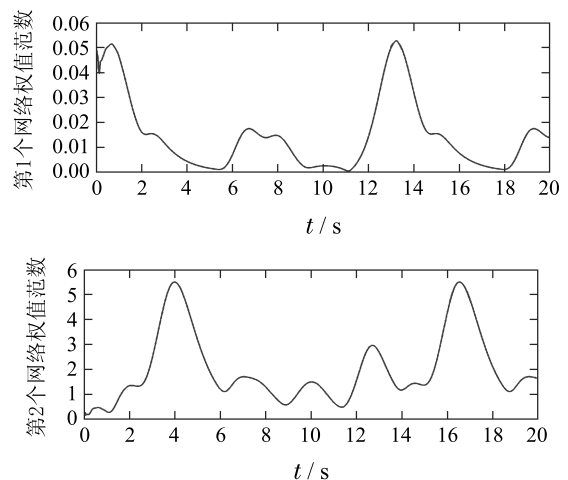


图 5 观测器神经网络权值范数
Fig. 5 NN weight norm of observer

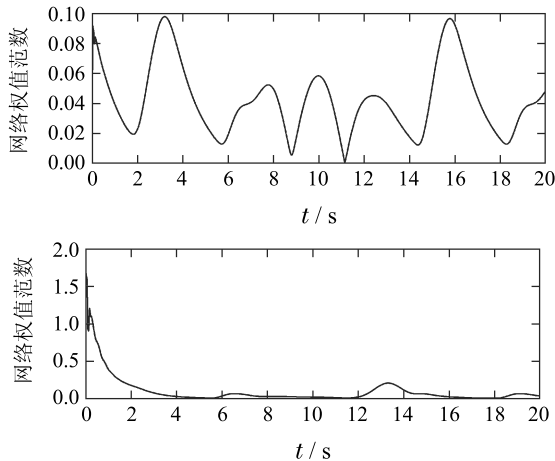


图 6 观测器神经网络权值范数
Fig. 6 NN weight norm of observer

作为对比, 同时对被控对象(57)设计了基于高增益观测器的滑模控制算法. 高增益观测器的形式取为

$$\begin{cases} \dot{\hat{z}}_1 = \hat{z}_2 - L_1 e_1, \\ \dot{\hat{z}}_2 = u - L_2 \text{fal}(\kappa, \delta, e_1), \end{cases} \quad (58)$$

其中 L_1 和 L_2 是反馈增益. 由于观测器的第2个微分方程也采用观测误差 e_1 作为反馈信号, 提高观测精度就要求 L_2 的取值很高.

从图7-8中的曲线可以看出, 虽然状态对 $z_1 = x_1$ 具有较高精度的观测, 但是状态 z_2 的观测值出现了明显的抖动. 这是由于观测器(59)的第2个状态采用高增益反馈形式产生的结果.

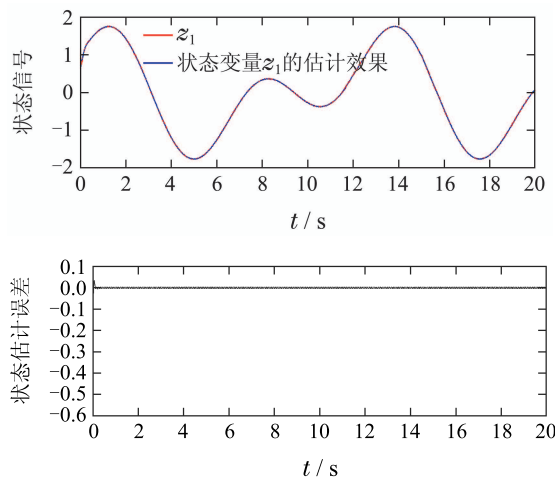


图 7 高增益观测器的第1个状态
Fig. 7 First state of high gain observer

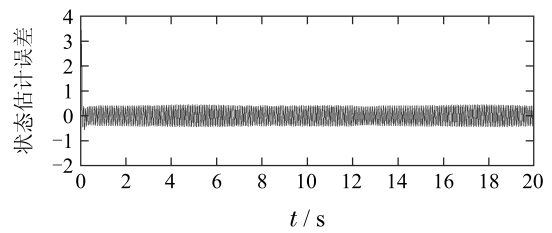
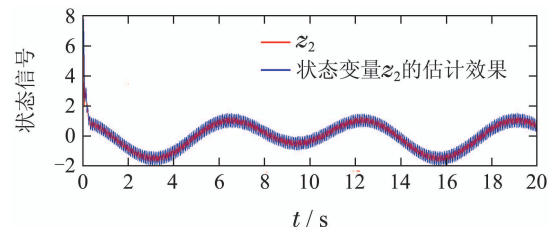


图 8 高增益观测器的第2个状态
Fig. 8 Second state of high gain observer

7 结论(Conclusions)

在本文中, 针对一类非线性系统状态未测量反馈控制问题, 在输出反馈自适应控制框架下对系统分别设计了神经网络观测器和自适应动态面控制器. 该输出反馈控制算法不需要对系统原模型作状态变换, 避免了采用系统输出信号作反馈时的高增益问题, 从而克服了高增益观测的抖震问题. 闭环系统稳定性分析和数值仿真结果验证了这种方法的有效性. 下一步的工作是如何通过对神经网络施加持续激励信号, 提高非线性函数逼近精度从而提高系统状态观测精度.

参考文献(References):

- [1] POLYCARPOUS M M, IOANNOU P A. A robust adaptive nonlinear control design [J]. *Automatica*, 1996, 32(3): 423 – 427.
- [2] CHEN Hai, HE Kaifeng, QIAN Weiqi. Attitude control of flight vehicle based on a nonlinear L_1 adaptive dynamic inversion approach [J]. *Control Theory & Applications*, 2016(8): 1111 – 1118. (陈海, 何开锋, 钱炜祺. 基于非线性 L_1 自适应动态逆的飞行器姿态角控制 [J]. *控制理论与应用*, 2016(8): 1111 – 1118.)
- [3] WANG D, HUANG J. Adaptive neural network control for a class of uncertain nonlinear systems in pure-feedback form [J]. *Automatica*, 2002, 38(8): 1365 – 1372.
- [4] ZOU A M, HOU Z G, TAN M. Adaptive control of a class of nonlinear pure-feedback systems using fuzzy backstepping approach [J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2008, 16(4): 886 – 897.
- [5] REN B B, GE S S, SU C Y, et al. Adaptive neural control for a class of uncertain nonlinear systems in pure-feedback form with hysteresis input [J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics*, 2009, 39(2): 431 – 443.
- [6] SWAROOP D, HEDRICK J K, YIP P P, et al. Dynamic surface control for a class of nonlinear systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, 45(10): 1893 – 1899.
- [7] Liu Yonghua. Dynamic surface control for pure-feedback nonlinear systems [J]. *Control Theory & Applications*, 2014, 31(9): 801 – 804. (刘勇华. 一类纯反馈非线性系统的反推控制 [J]. *控制理论与应用*, 2014, 31(9): 801 – 804.)
- [8] GE S S, HANG C C, ZHANG T. Adaptive neural network control of nonlinear systems by state and output feedback [J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics*, 1999, 29(6): 818 – 828.
- [9] HUA C C, GUAN X P. Output feedback stabilization for time-delay nonlinear interconnected systems using neural networks [J]. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2008, 19(4): 673 – 688.
- [10] ZOU A M, KUMAR K D, HOU Z G. Quaternion-based adaptive output feedback attitude control of spacecraft using Chebyshev Neural

- Networks [J]. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2010, 21(9): 1457 – 1471.
- [11] HAN Jingqing. From PID technology to “active disturbance rejection control” [J]. *Control Engineering of China*, 2002, 9(3): 13 – 18.
(韩京清. 从PID技术到“自抗扰控制”技术 [J]. 控制工程, 2002, 9(3): 13 – 18.)
- [12] ZENG Zhezha, WU Liangdong, YANG Zhenyuan, et al. Self-learning sliding-mode disturbance rejection control for non-affine systems [J]. *Control Theory & Applications*, 2016, 33(7): 980 – 987.
(曾喆昭, 吴亮东, 杨振源, 等. 非仿射系统的自学习滑模抗扰控制 [J]. 控制理论与应用, 2016, 33(7): 980 – 987.)
- [13] FAN Jiahua, MA Lei, ZHOU Pan, et al. Modeling and control of piezoelectric actuator based on radial basis function neural network. *Control Theory & Applications*, 2016, 33(7): 856 – 862.
(范家华, 马磊, 周攀, 等. 基于径向神经网络的压电作动器建模与控制 [J]. 控制理论与应用, 2016, 33(7): 856 – 862.)

作者简介:

孙国法 (1985–), 男, 博士, 讲师, 目前研究方向为非线性系统智能自适应控制、自抗扰控制研究及应用、动态面、观测器设计等, E-mail: sunguofa_bo@163.com;

田宇 (1983–), 男, 工程师, 目前研究方向为控制理论和飞行控制, E-mail: 13810612573@163.com;

王素珍 (1975–), 女, 副教授, 目前研究方向为可编程逻辑控制器(PLC)、建筑电气及其智能化, E-mail: wangsuzhen2020@163.com.