

单边Lipschitz的Lur'e型微分包含系统的非脆弱同步设计

施敏杰¹, 黄俊^{1†}, 陈良¹, 韩正之²

(1. 苏州大学 机电工程学院, 江苏 苏州 215000; 2. 上海交通大学 电子信息与电气工程学院, 上海 200240)

摘要: 本文针对单边Lipschitz的Lur'e型微分包含系统提出了一种非脆弱同步设计方法. 首先, 本文给出了单边Lipschitz的Lur'e型微分包含系统的主系统和从系统的数学模型以及相关的假设条件, 并简要回顾了单边Lipschitz函数的概念及性质. 随后, 基于系统的输出, 设计了能使误差系统渐近稳定的非脆弱控制器, 同时指出设计该类控制器的必要性. 最后, 以转子系统为实际背景, 借助Scilab给出了线性矩阵不等式和线性矩阵等式的混合问题的可行解, 并利用Simulink进行了数值仿真, 仿真结果验证了非脆弱控制器的有效性.

关键词: 微分包含; 单边Lipschitz; 同步; 非脆弱

中图分类号: TP273 文献标识码: A

Design of non-fragile synchronization of one-sided Lipschitz Lur'e differential inclusion system

SHI Min-jie¹, HUANG Jun^{1†}, CHEN Liang¹, HAN Zheng-zhi²

(1. School of Mechanical and Electrical Engineering, Soochow University, Suzhou Jiangsu 215000, China;

2. School of Electronic Information and Electrical Engineering, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China)

Abstract: This paper proposes a design method for non-fragile synchronization of one-sided Lipschitz Lur'e differential inclusion system. Firstly, mathematical models of master system and slave system as well as some related assumptions are presented. Both the definitions and properties of one-sided Lipschitz functions are also introduced briefly. Then, based on the output, a non-fragile controller is designed to make the error system asymptotically stable. The necessity of designing this controller is also stated. Finally, the rotor system is considered as an example and then simulated by Simulink. The simulation results show the effectiveness of the proposed non-fragile controller by using Scilab which provides the feasible solution for mixed problem of the linear matrix inequality and linear matrix equality.

Key words: differential inclusion; one-sided Lipschitz; synchronization; non-fragile

1 引言(Introduction)

随着科学的发展和研究的深入, Lur'e型微分包含系统因其具有广泛的工程应用背景而被大量研究^[1-6]. Lur'e型微分包含系统也随之成为控制领域的研究热点之一, 该系统最大的特点是非线性部分含有集合值函数. 当前, 对于Lur'e型微分包含系统的研究主要集中于如下3个方面: 首先是有关稳定与镇定问题的研究^[7-9], 其主要任务是给出Lur'e型微分包含系统稳定的条件, 或是设计控制器使得系统稳定. 其次是观测器的设计^[10-14], 由于集合值函数不同, 观测器的设计方法也不尽相同. 文献[10]是基于耗散性的方法设计Lur'e型微分包含系统的观测器, 集合值函数满足上半

连续、闭、凸、有界且耗散. 文献[11-14]则是利用正实性的方法设计Lur'e型微分包含系统的观测器, 文献[11-13]要求集合值函数满足上半连续、闭、凸、有界且单调, 而文献[14]不需要集合值函数满足有界、紧, 仅要求集合值函数是极大单调的. 文献[15]是在集合值函数保证随机微分包含系统存在解的情况下, 设计出系统的随机指数观测器. 再次是有关同步问题的研究^[16-18]. 一般来说, 同步问题的研究主要集中在如何设计出一个合适的控制器, 使从系统能渐近跟踪主系统. 文献[16]主要研究了具有一般形式的Lur'e型微分包含系统的主、从系统, 并考虑输入受限的情形下, 给出了系统控制器的设计方法. 而文献[17]是考虑主、

收稿日期: 2016-07-27; 录用日期: 2017-08-03.

†通信作者. E-mail: cauchyhot@163.com; Tel.: +86 18020275530.

本文责任编辑: 段志生.

国家自然科学基金项目(61403267, 21206100), 江苏省自然科学基金项目(BK20130322), 江苏省高校自然科学基金项目(13KJB510032), 中国博士后科学基金项目(2017M611903)资助.

Supported by National Natural Science Foundation of China (61403267, 21206100), Natural Science Foundation of Jiangsu Province (BK20130322), Natural Science Fund for Colleges and Universities in Jiangsu Province (13KJB510032) and China Postdoctoral Science Foundation (2017M611903).

从系统在均含有未知参数的情形下, 设计自适应控制律使得误差系统渐近稳定. 文献[18]则研究了Lur'e型微分包含系统的非脆弱同步问题, 在系统中的非线性项假设满足Lipschitz条件时, 设计出了系统的非脆弱控制器.

同时作者注意到, 在传统Lipschitz条件中, Lipschitz常数是一个正实数^[19-21], 而在单边Lipschitz条件中, 单边Lipschitz常数是一个实数, 这也就意味着单边Lipschitz常数相比Lipschitz常数取值范围更广, 即单边Lipschitz条件比传统Lipschitz条件更具有一般性, 因此针对单边Lipschitz非线性系统的研究也备受研究者关注^[22-28]. 文献[22]最先研究了一类单边Lipschitz非线性系统, 并基于矩阵的特征值分析, 给出了系统存在渐近观测器的充分条件. 在此基础上, 文献[23]又给出了该类系统的一种降维观测器的设计方法. 文献[24]研究了一类单边Lipschitz系统, 并针对该系统提出了一种观测器的设计方法. 文献[25-26]改进了文献[24]的设计方法, 分别利用线性矩阵不等式和Riccati方程对单边Lipschitz系统进行了研究, 并给出了更具一般性的观测器设计方法. 文献[27-28]分别考虑了一类单边Lipschitz非线性系统的镇定和跟踪控制等问题. 近来, 文献[29]在不考虑任何缩放矩阵的情况下, 基于单边Lipschitz非线性系统, 提出了一种指数观测器的设计方法, 其中包括全维观测器和降维观测器. 文献[30-31]则针对具有未知输入的单边Lipschitz时滞系统, 在不同的条件下, 分别提出了两种不同的观测器设计方法. 与文献[30-31]不同的是, 文献[32]对单边Lipschitz时变时滞系统进行了研究, 引入2次内有界条件的同时, 结合自由加权矩阵法, 提出了一种非线性观测器的设计方法. 需要指出的是, 当前Lur'e型微分包含系统的非线性项均假设满足Lipschitz条件^[12-13, 18], 而对假设满足单边Lipschitz条件的Lur'e型微分包含系统的研究却鲜见报道.

另一方面, 在实际应用中, 由于元器件老化、温度变化等外部因素的影响, 执行器中常常出现误差或漂移, 致使普通的控制器难以满足实际应用的要求. 而非脆弱控制器能在具有一定程度的增益扰动的情形下保持良好的稳定性^[33-37]. 文献[33]是一篇有关非脆弱控制的启动性文章, 首次提出了非脆弱控制器的概念, 并针对镇定非脆弱控制器和最优非脆弱控制问题分别予以研究. 随后, 有关非脆弱问题成为了控制界研究的热点问题. 针对一类奇异系统, 文献[34]提出了一种基于观测器的非脆弱 H_∞ 输出反馈控制器的设计方法, 而文献[35]考虑了一类非线性时滞系统, 并设计出了一种基于观测器的新型时滞相关非脆弱 H_∞ 控制器. 文献[36]则对一类不确定随机非线性时滞系统进行研究, 并设计出一种无记忆非脆弱状态反馈控制器. 基于非周期性采样的马尔可夫跳变系统, 结合

线性矩阵不等式, 文献[37]给出了一种非脆弱采样控制器的设计方法.

基于以上讨论, 本文主要研究单边Lipschitz的Lur'e型微分包含系统的非脆弱同步问题. 本文的主要贡献可以归结为两个方面: 一方面, 基于观测器的设计思想, 本文给出了从系统的具体形式, 并针对从系统设计一种合适有效的非脆弱控制器, 该控制器能够允许增益存在一定的偏差; 另一方面, 本文讨论含有单边Lipschitz项微分包含系统, 文中给出了比Lipschitz常数更具有一般性的单边Lipschitz常数, 因此结果更具有一般性.

2 问题描述(Problems description)

本文所考虑的Lur'e型微分包含系统的模型可描述为

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + G\omega + f(x), \\ \omega \in -\rho(Hx), \\ y = Cx, \end{cases} \quad (1)$$

其中: $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^q$ 分别是系统的状态和输出; $\rho: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ 是集合值函数, $\omega \in \mathbb{R}^m$ 是 ρ 的输出; $f(x) \in \mathbb{R}^n$ 是光滑的非线性矩阵值函数; $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $G \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $H \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 和 $C \in \mathbb{R}^{q \times n}$ 是常值矩阵, 不失一般性, 假设 H 和 C 行满秩, 即 $\text{rank}(H) = m < n$, $\text{rank}(C) = q < n$. 在本文中, 将系统(1)称为主系统.

本文将主系统(1)描述为一种实验用的电机转子系统^[11]. 转子系统主要由上、下转盘和金属缆线构成. 上转盘由直流电机驱动, 并通过低刚度的金属缆线相连, 绕各自的几何中心旋转, 下转盘连接产生摩擦力的制动装置. 上、下转盘的角位置通过增量式编码器进行计量, 然后利用数值微分法对获得的角位置量进行处理, 再将所得结果经由低通滤波器进行滤波, 最后得出上、下转盘的角速度. 转子系统的运行机理在于, 上、下转盘连接着低刚度的金属缆线, 电动机上电之后带动下转盘先转起来, 在金属缆线的作用下, 下转盘也会跟着转起来. 根据动力学知识, 该系统可描述为

$$\begin{cases} J_u \ddot{\theta}_u + k_\theta(\theta_u - \theta_l) + T_{fu}(\dot{\theta}_u) = k_m u, \\ J_l \ddot{\theta}_l - k_\theta(\theta_u - \theta_l) + T_{fl}(\dot{\theta}_l) = 0, \end{cases}$$

其中: θ_u 和 θ_l 分别是上、下转盘的角位置; u 是电动机的电压; J_u 和 J_l 分别是上、下转盘相对质量的惯性; k_θ 和 k_m 分别是金属缆线的刚度和电动机常数; $T_{fu}(\dot{\theta}_u)$ 和 $T_{fl}(\dot{\theta}_l)$ 分别是上、下转盘的摩擦转矩. 这里, 本文可以用三阶状态空间对系统进行描述, 即 $x = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$, 其中: x_1 是上、下两个转盘的角位置差, x_2 和 x_3 分别是上、下转盘的角速度, 即 $x_1 = \theta_u - \theta_l$, $x_2 = \dot{\theta}_u$, $x_3 = \dot{\theta}_l$, 且有

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - x_3, \\ \dot{x}_2 = \frac{k_m}{J_u} u - \frac{k_\theta}{J_u} x_1 - \frac{1}{J_u} T_{fu}(x_2), \\ \dot{x}_3 = \frac{k_\theta}{J_l} x_1 - \frac{1}{J_l} T_{fl}(x_3), \end{cases}$$

即为主系统(1). 最后, 利用非线性最小二乘法对系统中的各个参数进行估计, 可得到转子系统的简化模型, 即主系统(1). 通过对控制器的合理设计, 最终的目的是使得上、下转盘的转速达到一致.

接下来, 本文简要回顾单边Lipschitz函数及其相关函数的主要性质, 详细内容请见文献[24–26].

对于 $\forall x_1, x_2 \in D$, 若存在常数 $\lambda > 0$, 满足

$$\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq \lambda \|x_1 - x_2\|, \quad (2)$$

则 $f(x)$ 在定义域 D 内是一个局部Lipschitz函数, 且最小的常数 $\lambda > 0$ 为Lipschitz常数. 同样地, 若式(2)在 $\mathbb{R}^n$ 中成立, 则 $f(x)$ 是一个全局Lipschitz函数. 对于 $\forall x_1, x_2 \in D$, 若存在常数 $\eta \in \mathbb{R}$, 满足

$$\langle f(x_1) - f(x_2), x_1 - x_2 \rangle \leq \eta \|x_1 - x_2\|^2, \quad (3)$$

则称 $f(x)$ 是一个单边Lipschitz函数, 常数 $\eta \in \mathbb{R}$ 称单边Lipschitz常数. 由式(2)可知

$$\begin{aligned} |\langle f(x_1) - f(x_2), x_1 - x_2 \rangle| &\leq \\ \|f(x_1) - f(x_2)\| \|x_1 - x_2\| &\leq \\ \lambda \|x_1 - x_2\|^2, \end{aligned} \quad (4)$$

即

$$\begin{aligned} -\lambda \|x_1 - x_2\|^2 &\leq \\ \langle f(x_1) - f(x_2), x_1 - x_2 \rangle &\leq \\ \lambda \|x_1 - x_2\|^2, \end{aligned} \quad (5)$$

即任一Lipschitz函数均为单边Lipschitz函数, 反之则结论不成立. 同时, 对于 $\forall x_1, x_2 \in \tilde{D}$, 若存在常数 $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$, 满足

$$\begin{aligned} (f(x_1) - f(x_2))^T (f(x_1) - f(x_2)) &\leq \\ \beta \|x_1 - x_2\|^2 + \gamma \langle f(x_1) - f(x_2), x_1 - x_2 \rangle, \end{aligned} \quad (6)$$

则 $f(x)$ 在定义域 $\tilde{D}$ 内是一个2次内有界函数. 由式(2)和式(6)易知, 任一Lipschitz函数均为2次内有界函数(如 $\beta > 0$ 且 $\gamma = 0$), 反之则结论不成立. 事实上, 当 $f(x)$ 在同一定义域上同时满足单边Lipschitz和2次内有界, 且令 $\gamma > 0$ 时, 即可得

$$\begin{aligned} (f(x_1) - f(x_2))^T (f(x_1) - f(x_2)) &\leq \\ \beta \|x_1 - x_2\|^2 + \gamma \langle f(x_1) - f(x_2), x_1 - x_2 \rangle &\leq \\ \beta \|x_1 - x_2\|^2 + \gamma \eta \|x_1 - x_2\|^2, \end{aligned} \quad (7)$$

即 $f(x)$ 必是一个Lipschitz函数, 而 $\gamma < 0$ 时结论并不成立. 因此, 本文可以得出Lipschitz, 单边Lipschitz及2次内有界关系图, 如图1所示.

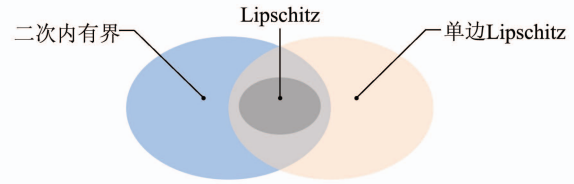


图1 Lipschitz, 单边Lipschitz及2次内有界关系图

Fig. 1 The Lipschitz, one-sided Lipschitz and quadratically inner-bounded function sets

往下, 本文假设 $f(x)$ 在定义域 D 中是一个单边Lipschitz函数, 同时, $f(x)$ 在定义域 $\tilde{D}$ 中是一个2次内有界函数, 即对于 $\forall x_1, x_2 \in D \cap \tilde{D}$, $f(x)$ 同时满足式(3)(6).

针对系统(1), 首先设计Lur'e型微分包含系统的从系统, 从系统可描述为

$$\begin{cases} \dot{z} = Az + G\hat{\omega} + f(z) + u, \\ \dot{\hat{\omega}} \in -\rho(Hz + F(y - Cz)), \end{cases} \quad (8)$$

其中 $z \in \mathbb{R}^n$ 和 $u \in \mathbb{R}^n$ 分别是系统的状态和控制器. 将控制器 u 设计为

$$u = (K + \Delta K(t))(y - Cz), \quad (9)$$

其中 $\Delta K(t)$ 是一个连续的非线性矩阵值函数, 表示系统中的漂移增益或增益误差, 且 $\Delta K(t)$ 满足

$$\|\Delta K(t)\| \leq \delta, \quad (10)$$

式中的 δ 是一个大于0的常数, 即漂移增益或增益误差的上界为已知条件. 需要指出的是, $\Delta K(t)$ 的表达形式不唯一, 但是只要其上界给定, 通过合理的设计 K , 那么 $\Delta K(t)$ 在表达形式上的差异并不会影响系统的稳定性能.

注1 一般来说, 系统(1)的观测器具有如下形式:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + G\hat{\omega} + f(\hat{x}) + Ly, \\ \dot{\hat{\omega}} \in -\rho((H - FC)\hat{x} + Fy), \end{cases} \quad (11)$$

上述观测器形式是设计从系统(8)的主要依据, 但在形式上略有不同, 从系统中还需要设计控制律 u , 从而使得 $\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t) - z(t)) = 0$.

注2 将式(9)写成 $u = \bar{u} + \Delta u$, 其中: $\bar{u} = K(y - Cz)$, $\Delta u = \Delta K(t)(y - Cz)$. 在实际问题中, Δu 表示执行器所产生的误差. 也就是说, 在控制器 u 中, 本文需要对 $\bar{u}$ 进行设计, 即设计 K . 从本质上来说, $\Delta K(t)$ 是由系统本身产生的增益误差, 作者对这一部分的漂移增益事先进行考虑, 使得最后所设计的 K 能够在有增益误差的情形下, 也能让控制器保持良好的控制性能. 而对于 $\Delta K(t)$, 本文不需要对其进行设计, 也不需要知道 $\Delta K(t)$ 的形式, 只需要知道 $\Delta K(t)$ 的界. 本文要求 $\Delta K(t)$ 满足式(10), 即 $\Delta K(t)^T \Delta K(t) \leq \delta^2 I$, 其中 δ 为已知常数. 该条件为非脆弱控制问题中的一般性假设条件, 类似的假设条件可见文献[34]的式(4)、文献[35]的式(3d)和(3e)、文献

[36]的式(6)和式(9)、以及文献[37]的式(3)等. 对于非脆弱问题, 都要求增益误差有界, 且误差的界需要事先给出.

为了得出本文的主要结果, 作者需要对上述设计中的 F 和 K 进行设计, 同时, 还需要给出以下定义、假设和引理^[5,26].

定义 1 在集合值函数 $\mathcal{G}(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 中, 如果所有的 $(x, y), (x^*, y^*) \in \text{Graph}(\mathcal{G})$ 均满足 $(y - y^*)^T(x - x^*) \geq 0$, 则称集合值函数 $\mathcal{G}(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 具有单调性.

定义 2 $\mathcal{G}(t, x(t))$ 是一个集合值函数, 若 $x(t)$ 绝对连续且当 $t \in [t_0, \infty)$ 时能满足 $\dot{x}(t) \in \mathcal{G}(t, x(t))$, 则 $x: [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是微分包含 $\dot{x}(t) \in \mathcal{G}(t, x(t))$ 的解, 且 $x(t_0) = x_0$.

假设 1 集合值映射 $\rho(\cdot)$ 满足上半连续、非空、凸、闭、有界且单调.

引理 1 若集合值函数 $\mathcal{G}(t, x(t))$ 对于任意 $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$ 均满足上半连续、闭、凸且有界, 则定义在 $[0, \infty)$ 上的绝对连续函数 $x(t)$ 是 $\dot{x}(t) \in \mathcal{G}(t, x(t))$ 初值问题的解, 且 $x(0) = x_0, x_0 \in \mathbb{R}^n$.

引理 2 对于给定的对称矩阵 $S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12}^T & S_{22} \end{bmatrix}$,

其中: $S_{11}^T = S_{11}, S_{22}^T = S_{22}$, 则如下结论是等价的:

- 1) $S < 0$;
- 2) $S_{11} < 0, S_{22} - S_{12}^T S_{11}^{-1} S_{12} < 0$;
- 3) $S_{22} < 0, S_{11} - S_{12} S_{22}^{-1} S_{12}^T < 0$.

3 主要结果(Main results)

本节中, 将主系统(1)减去从系统(8), 可得如下误差系统:

$$\begin{cases} \dot{e} = Ae + G(\omega - \hat{\omega}) + (f(x) - f(z)) - (K + \Delta K(t))(y - Cz), \\ \omega \in -\rho(Hx), \\ \hat{\omega} \in -\rho(Hz + F(y - Cz)), \end{cases} \quad (12)$$

其中 $e = x - z$. 基于误差系统, 本文将得出如下定理.

定理 1 考虑主系统(1), 从系统(8)和误差系统(12). 若假设1成立, 且存在常数 $\mu > 0, \varepsilon > 0, \varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0$, 存在矩阵 $P \in \mathbb{R}^{n \times n} > 0, K \in \mathbb{R}^{n \times q}, F \in \mathbb{R}^{m \times q}$, 使得

$$\begin{aligned} & P(A - KC) + (A - KC)^T P + \mu \delta^2 C^T C + \frac{1}{\mu} P^2 + \\ & (\eta \varepsilon_1 + \beta \varepsilon_2 + \varepsilon) I + \frac{1}{\varepsilon_2} (P + \frac{\gamma \varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2} I)^2 \leq 0, \end{aligned} \quad (13)$$

$$G^T P = H - FC, \quad (14)$$

则误差系统(12)是渐近稳定的, 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$.

证 取Lyapunov函数 $V = e^T P e$, 则其沿着误差

系统(12)的导数为

$$\begin{aligned} \dot{V} &= 2e^T P \dot{e} = \\ & 2e^T P[(A - (K + \Delta K(t))C)e + \\ & G(\omega - \hat{\omega}) + (f(x) - f(z))] = \\ & 2e^T P(A - KC)e + 2e^T P(f(x) - f(z)) + \\ & 2e^T P G(\omega - \hat{\omega}) - 2e^T P \Delta K(t) C e. \end{aligned} \quad (15)$$

由 $\rho(\cdot)$ 的单调性和定义1, 并结合误差系统(12)中 $\omega \in -\rho(Hx), \hat{\omega} \in -\rho(Hz + F(y - Cz))$ 以及式(14)可得

$$\begin{aligned} & 2e^T P G(\omega - \hat{\omega}) = \\ & 2e^T (H - FC)^T (\omega - \hat{\omega}) = \\ & -2[Hx - ((H - FC)z + Fy)]^T \\ & [-\omega - (-\hat{\omega})] \leq 0. \end{aligned} \quad (16)$$

由式(10)可知

$$\begin{aligned} & -2e^T P \Delta K(t) C e \leq \\ & \mu \|e^T C^T (\Delta K(t))^T \Delta K(t) C e\| + \frac{1}{\mu} \|e^T P^2 e\| \leq \\ & \mu \delta^2 e^T C^T C e + \frac{1}{\mu} e^T P^2 e. \end{aligned} \quad (17)$$

令 $\tilde{f} = f(x) - f(z)$, 由式(15)–(17)可得

$$\dot{V} \leq e^T \Gamma e + 2e^T P \tilde{f} = \begin{bmatrix} e \\ \tilde{f} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Gamma & P \\ P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ \tilde{f} \end{bmatrix}, \quad (18)$$

其中

$$\begin{aligned} \Gamma &= P(A - KC) + (A - KC)^T P + \\ & \mu \delta^2 C^T C + \frac{1}{\mu} P^2. \end{aligned}$$

此时, 由式(3)可知 $\eta e^T e - e^T \tilde{f} \geq 0$, 由此可得

$$\varepsilon_1 \begin{bmatrix} e \\ \tilde{f} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \eta I & -\frac{1}{2} I \\ * & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ \tilde{f} \end{bmatrix} \geq 0. \quad (19)$$

类似地, 由式(6)可得

$$\varepsilon_2 \begin{bmatrix} e \\ \tilde{f} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \beta I & \frac{\gamma}{2} I \\ * & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ \tilde{f} \end{bmatrix} \geq 0. \quad (20)$$

将式(19)–(20)不等号的左侧与式(18)不等号的右侧相加得

$$\dot{V} \leq \begin{bmatrix} e \\ \tilde{f} \end{bmatrix}^T A \begin{bmatrix} e \\ \tilde{f} \end{bmatrix}, \quad (21)$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} \Gamma + \eta \varepsilon_1 I + \beta \varepsilon_2 I & P + \frac{\varepsilon_2 \gamma - \varepsilon_1}{2} I \\ * & -\varepsilon_2 I \end{bmatrix}. \quad (22)$$

利用引理2, 式(14)等价于

$$\begin{bmatrix} \Gamma + \eta\varepsilon_1 I + \beta\varepsilon_2 I + \varepsilon I & P + \frac{\varepsilon_2\gamma - \varepsilon_1}{2} I \\ * & -\varepsilon_2 I \end{bmatrix} =$$

$$A + \begin{bmatrix} \varepsilon I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \leq 0. \quad (23)$$

将式(23)代入式(21), 得

$$\dot{V} \leq -\varepsilon e^T e, \quad (24)$$

则 $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ 恒成立, 从而得证.

注3 设计非脆弱控制器的必要性源自两方面: 一方面, 控制系统在实际运用过程中, 由于数模、模数转换、字长限制、舍入误差等客观因素的影响, 系统控制器在设计时需要足够的裕度来允许误差的出现, 以避免控制器在误差的影响下失效; 另一方面, 在控制系统中, 任一控制器都无法满足系统所有的性能需求, 这也就意味着, 在设计控制器时, 需要事先为控制器系数留有足够的调整空间, 以保证系统的控制性能^[33]. 类似于前人的工作^[34-37], 本文中, 作者用式(10)对这个变化空间进行界定, 且不需要确定 $\Delta K(t)$ 的具体形式, 只要对增益 K 进行合理设计, 即满足式(13)–(14), 就能保证所设计控制器的性能.

注4 在对式(13)–(14)进行求解时, 作者注意到式(13)是一个非线性矩阵不等式, 无法利用 Scilab 对式(13)–(14)直接进行求解. 因此, 此处可以利用引理2对式(13)做如下处理:

$$P(A - KC) + (A - KC)^T P + \mu\delta^2 C^T C + \frac{1}{\mu} P^2 +$$

$$(\eta\varepsilon_1 + \beta\varepsilon_2 + \varepsilon)I + \frac{1}{\varepsilon_2} (P + \frac{\gamma\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2} I)^2 =$$

$$P(A - KC) + (A - KC)^T P + \mu\delta^2 C^T C +$$

$$(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\varepsilon_2})P^2 + \frac{\gamma\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2} P +$$

$$(\eta\varepsilon_1 + \beta\varepsilon_2 + \varepsilon + \frac{(\gamma\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^2}{4\varepsilon_2})I \leq 0. \quad (25)$$

令 $Y = PK$, 由引理2, 可将式(25)转换为

$$\begin{bmatrix} \Psi & \sqrt{\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\varepsilon_2}} P \\ \sqrt{\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\varepsilon_2}} P & -I \end{bmatrix} \leq 0, \quad (26)$$

其中

$$\Psi = PA + A^T P - YC - C^T Y^T +$$

$$\frac{\gamma\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2} P + \mu\delta^2 C^T C +$$

$$(\eta\varepsilon_1 + \beta\varepsilon_2 + \varepsilon + \frac{(\gamma\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^2}{4\varepsilon_2})I. \quad (27)$$

至此, 本文将式(13)转换为一个线性矩阵不等式, 而式(14)是一个线性矩阵等式, 此时, 则可以利用 Scilab 求出该混合问题的可行解. 在转换过程中, 分别两次解决了不等式中的非线性问题, 首先是令 $Y = PK$, 将式中包含 PK 的非线性项用一个新的未知矩阵来替换. 其次是利用舒尔补定理来拆分式中的 P^2 项, 使得转换后的式子成为一个能被 Scilab 解算的线性不等式. 值得一提的是, 本文的充分条件式(13)–(14)因含有等式约束而无法使用 LMI 工具箱, 但是, Scilab 却能够处理此类问题.

4 数值仿真(Numerical simulations)

本节以转子系统为实际背景^[11], 考虑系统(1), 其中:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -0.1526 & -4.6688 & 0 \\ 2.2301 & 0 & 0.6442 \end{bmatrix},$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 30.6748 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 0 \ 0],$$

$$f(x) = \begin{bmatrix} -x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ -x_2(x_1^2 + x_2^2) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad H = [0 \ 0 \ 1].$$

集合值函数如下所示:

$$\rho(\kappa) = \begin{cases} [0.1642 + 0.0603(1 - \frac{2}{1 + e^{5.7468|\kappa|}})] - \\ 0.2267(1 - \frac{2}{1 + e^{0.2941|\kappa|}})] \times \\ \operatorname{sgn} \kappa + 0.0319\kappa, & \kappa \neq 0, \\ [-0.1642, 0.1642], & \kappa = 0. \end{cases} \quad (28)$$

又由文献[24–26]可知, $f(x)$ 是一个全局单边 Lipschitz 函数, 且单边 Lipschitz 常数 $\eta = 0$. 考虑 $\tilde{D} = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| \leq r\}$, 且

$$r = \min(\sqrt{-\frac{\gamma}{4}}, \sqrt[4]{\beta + \frac{\gamma^2}{4}}),$$

$$\gamma < 0, \quad \beta + \frac{\gamma^2}{4} > 0.$$

易知 $f(x)$ 在定义域 $\tilde{D}$ 内是一个2次内有界函数, 又因为 $f(x)$ 是一个全局单边 Lipschitz 函数, 即定义域 $D = \mathbb{R}^3$, $D \cap \tilde{D} = \tilde{D}$, γ 和 β 可在定义域 $\tilde{D}$ 内选取适当的值.

这里, 本文选取 $\mu = 2$, $\gamma = -4$, $\beta = -3$, $\delta = 0.1$. 在选取后, 本文利用 Scilab 解算出式(13)–(14), 即线性矩阵不等式与线性矩阵等式的混合问题的可行解, 解得

$$P = \begin{bmatrix} 0.1264 & -0.0052 & 0.0324 \\ -0.0052 & 0.0999 & 0 \\ 0.0324 & 0 & 0.0326 \end{bmatrix},$$

$$K = \begin{bmatrix} 63.3961 \\ 2.6133 \\ -59.1625 \end{bmatrix}, \quad F = -0.9937,$$

$$\varepsilon = 0.0012, \quad \varepsilon_1 = 0.0015, \quad \varepsilon_2 = 0.0372.$$

在仿真过程中, 本文首先选取 $\Delta K(t) = \bar{K}_1(t) = [0.1 \sin t \ 0 \ 0]^T$. 此时, 可计算得从系统的方程组, 如下所示:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 - z_3 - z_1(z_1^2 + z_2^2) + u_1, \\ \dot{z}_2 = -0.1526z_1 - 4.6688z_2 - \\ \quad z_2(z_1^2 + z_2^2) + u_2, \\ \dot{z}_3 = 2.2301z_1 + 0.6442z_3 + 30.6748\hat{\omega} + u_3, \end{cases} \quad (29)$$

其中控制器 $u = [u_1 \ u_2 \ u_3]^T$, 且

$$\begin{cases} u_1 = (63.3961 + 0.1 \sin t)(x_1 - z_1), \\ u_2 = 2.6133(x_1 - z_1), \\ u_3 = -59.1625(x_1 - z_1). \end{cases} \quad (30)$$

再另取 $\Delta K(t) = \bar{K}_2(t) = [0.1 \sin t \ 0.1 \cos t \ 0]^T$, 此时控制器 u 为

$$\begin{cases} u_1 = (63.3961 + 0.1 \sin t)(x_1 - z_1), \\ u_2 = (2.6133 + 0.1 \cos t)(x_1 - z_1), \\ u_3 = -59.1625(x_1 - z_1). \end{cases} \quad (31)$$

随后, 本文利用 MATLAB 中的 Simulink 分别针对 $\Delta K(t) = \bar{K}_1(t)$ 和 $\Delta K(t) = \bar{K}_2(t)$ 进行仿真验证, 见图 2~5. 如图 2 和图 4 所示, 误差系统的状态轨迹均收敛至平衡点. 如图 3 和图 5 所示, 控制器最终都收敛至零.

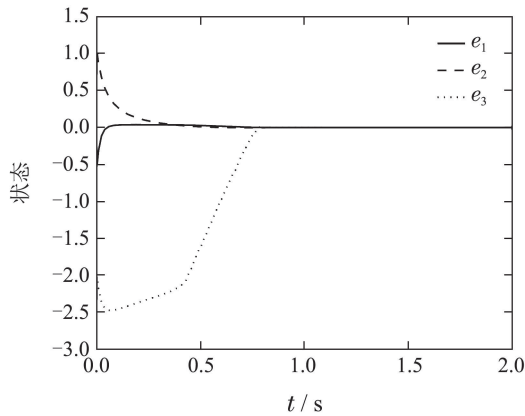


图 2 $\Delta K(t) = \bar{K}_1(t)$ 时系统状态的误差 e

Fig. 2 The response of the system status error e when $\Delta K(t) = \bar{K}_1(t)$

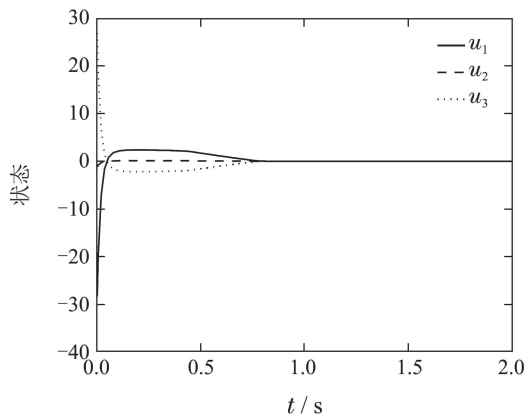


图 3 $\Delta K(t) = \bar{K}_1(t)$ 时非脆弱控制器 u

Fig. 3 The response of the non-fragile controller u when $\Delta K(t) = \bar{K}_1(t)$

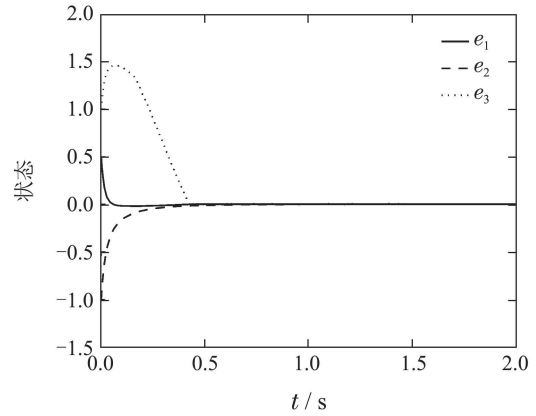


图 4 $\Delta K(t) = \bar{K}_2(t)$ 时系统状态的误差 e

Fig. 4 The response of the system status error e when $\Delta K(t) = \bar{K}_2(t)$

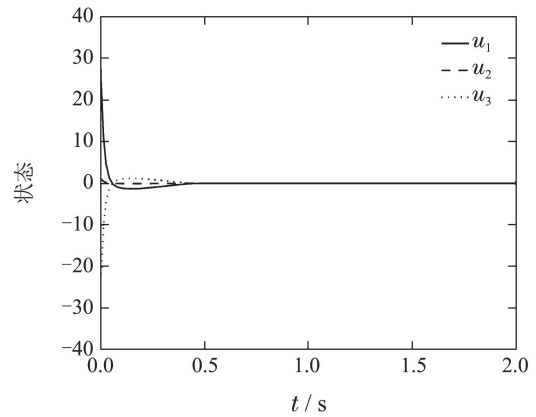


图 5 $\Delta K(t) = \bar{K}_2(t)$ 时非脆弱控制器 u

Fig. 5 The response of the non-fragile controller u when $\Delta K(t) = \bar{K}_2(t)$

当选取 $\delta = 1$ 时, 利用 Scilab 求得

$$P = \begin{bmatrix} 0.5527 & -0.1092 & 0.0443 \\ -0.1092 & 0.3883 & 0 \\ 0.0443 & 0 & 0.0326 \end{bmatrix},$$

$$K = \begin{bmatrix} 15.1031 \\ -0.4796 \\ -23.6111 \end{bmatrix}, \quad F = -1.3578,$$

$$\varepsilon = 0.0063, \quad \varepsilon_1 = 0.0064, \quad \varepsilon_2 = 0.0501.$$

在仿真过程中, 本文首先选取 $\Delta K(t) = \bar{K}_3(t) = [\cos t \ 0 \ 0]^T$, 即控制器 u 为

$$\begin{cases} u_1 = (15.1031 + \cos t)(x_1 - z_1), \\ u_2 = -0.4796(x_1 - z_1), \\ u_3 = -23.6111(x_1 - z_1). \end{cases} \quad (32)$$

取 $\Delta K(t) = \bar{K}_4(t) = [\frac{1}{2} \cos t \ \frac{1}{2} \sin t \ \frac{\sqrt{2}}{2} \sin t]^T$, 即控制器 u 为

$$\begin{cases} u_1 = (15.1031 + 0.5 \cos t)(x_1 - z_1), \\ u_2 = (-0.4796 + 0.5 \sin t)(x_1 - z_1), \\ u_3 = (-23.6111 + 0.7071 \sin t)(x_1 - z_1). \end{cases} \quad (33)$$

本文分别针对

$$\Delta K(t) = \bar{K}_3(t), \Delta K(t) = \bar{K}_4(t)$$

进行仿真验证. 仿真图像如图6-9所示, 其中图6和图8表明系统误差均收敛到零. 图7和图9表明所设计的控制器是有效的.

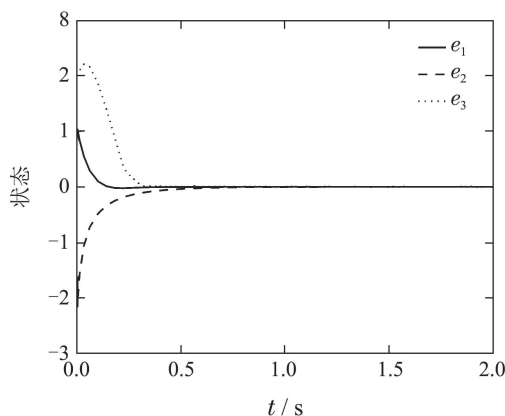


图6 $\Delta K(t) = \bar{K}_3(t)$ 时系统状态的误差 e

Fig. 6 The response of the system status error e when

$$\Delta K(t) = \bar{K}_3(t)$$

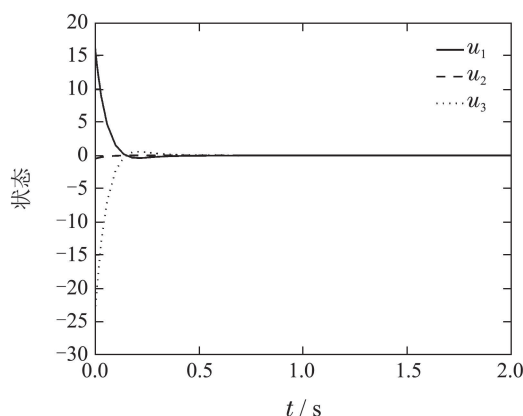


图7 $\Delta K(t) = \bar{K}_3(t)$ 时非脆弱控制器 u

Fig. 7 The response of the non-fragile controller u when

$$\Delta K(t) = \bar{K}_3(t)$$

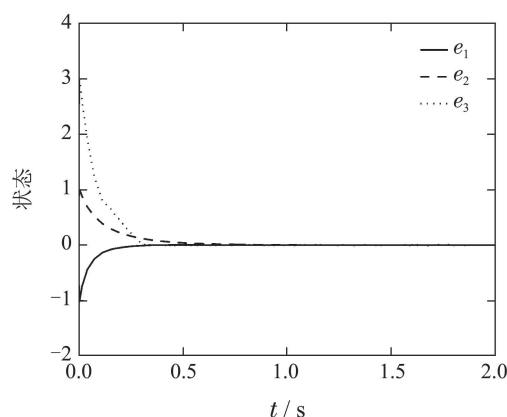


图8 $\Delta K(t) = \bar{K}_4(t)$ 时系统状态的误差 e

Fig. 8 The response of the system status error e when

$$\Delta K(t) = \bar{K}_4(t)$$

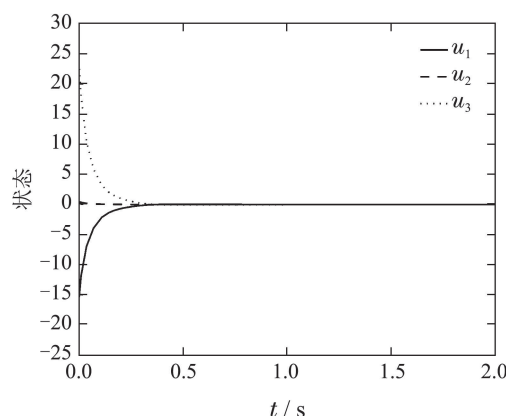


图9 $\Delta K(t) = \bar{K}_4(t)$ 时非脆弱控制器 u

Fig. 9 The response of the non-fragile controller u when

$$\Delta K(t) = \bar{K}_4(t)$$

5 结论(Conclusions)

本文针对单边Lipschitz的Lur'e型微分包含系统的非脆弱同步设计问题进行了研究, 并给出了有效的非脆弱控制器, 使误差系统最终趋于渐近稳定. 首先, 文中以单边Lipschitz的Lur'e型微分包含系统为基础, 给出了主、从系统的数学模型, 并提出了相关的假设条件; 随后, 设计出非脆弱控制器, 使得误差系统渐近稳定; 最后, 以转子系统为实际背景, 使用Simulink对系统进行仿真, 并成功验证了本文所设计出的非脆弱控制器的有效性.

参考文献(References):

- [1] JULOSKI A, HEEMELS W, FERRARI-TRECCATE G. Data-based hybrid modelling of the component placement process in pick-and-place machines [J]. *Control Engineering Practice*, 2004, 12(10): 1241 – 1252.
- [2] ACARY V, BROGLIATO B. *Numerical Methods for Nonsmooth Dynamical Systems, Applications in Mechanics and Electronics* [M]. Berlin: Springer, 2008.
- [3] BROGLIATO B. Some perspectives on the analysis and control of complementarity systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, 48(6): 918 – 935.
- [4] PFEIFFER F, HAJEK M. Stick-slip motions of turbine blade dampers [J]. *Philosophical Transactions: Physical Sciences and Engineering*, 1992, 338(1651): 503 – 517.
- [5] HAN Zhengzhi, CAI Xiushan, HUANG Jun. *The Theory for Control Systems Described by Differential Inclusions* [M]. Shanghai: Profile of Shanghai Jiao Tong University Press, 2013. (韩正之, 蔡秀珊, 黄俊. 微分包含控制系统理论 [M]. 上海: 上海交通大学出版社, 2013.)
- [6] HUANG Jun. *The stabilization and observer design of differential inclusion systems* [D]. Shanghai: Shanghai Jiao Tong University Press, 2012. (黄俊. 微分包含系统的镇定与观测器设计 [D]. 上海: 上海交通大学, 2012.)
- [7] JAYAWARDHANA B, LOGEMANN H, RYAN E. Input-to-state stability of differential inclusions with applications to hysteretic and quantized feedback systems [J]. *Siam Journal on Control and Optimization*, 2009, 48(2): 1031 – 1054.

- [8] HUANG J, HAN Z, CAI X, et al. Robust absolute stability criterion for uncertain Lur'e differential inclusion systems with time delay [J]. *Circuits Systems and Signal Processing*, 2012, 31(6): 2001 – 2017.
- [9] BRUIN J, DORIS A, WOUW N, et al. Control of mechanical motion systems with non-collocation of actuation and friction: a popov-criterion approach for input-to-state stability and set-valued nonlinearities [J]. *Automatica*, 2009, 45(2): 405 – 415.
- [10] OSORIO M, MORENO J. Dissipative design of observer for multi-valued nonlinear systems [C] // *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control*. San Diego: IEEE, 2006: 5400 – 5405.
- [11] DORIS A, JULOSKI A, MIHAJLOVIC N, et al. Observer design for experimental non-smooth and discontinuous systems [J]. *IEEE Transactions on Control System Technology*, 2008, 16(6): 1323 – 1332.
- [12] HUANG J, HAN Z, CAI X, et al. Adaptive full-order and reduced-order observers for the Lur'e differential inclusion system [J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2011, 16(7): 2869 – 2879.
- [13] ZHANG J, HAN Z, ZHU F, et al. Further results on adaptive full-order and reduced-order observers for Lur'e differential inclusions [J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2014, 19(5): 1582 – 1590.
- [14] BROGLIATO B, HEEMELS W. Observer design for Lur'e systems with multivalued mappings: a passivity approach [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, 54(8): 1996 – 2001.
- [15] HUANG J, WANG P, HAN Z, et al. Observer design for the Lur'e differential inclusion system with Markovian jumping parameters [J]. *International Journal of System Science*, 2013, 44(12): 2338 – 2348.
- [16] HUANG J, XIA S, ZHANG M, et al. Synchronization of Lur'e differential inclusion system with input saturation [C] // *Proceedings of the 25th Chinese Control and Decision Conference*. Gui Yang: IEEE, 2013: 3886 – 3890.
- [17] ABOOE A, HAERI M. Free chattering synchronization of two Lur'e differential inclusions with sector input nonlinearity [C] // *IEEE Conference on Control Applications*. Antibes: IEEE, 2014: 1035 – 1040.
- [18] SHI M, HUANG J. Adaptive non-fragile synchronization of the Lur'e differential inclusion system [C] // *Proceedings of the 34th Chinese Control Conference*. Hangzhou: IEEE, 2015: 1146 – 1150.
- [19] ZHU Fanglai, HAN Zhengzhi. Design of an adaptive observer for Lipschitz nonlinear systems [J]. *Journal of Shanghai Jiao Tong University*, 2003, 37(6): 943 – 946.
(朱芳来, 韩正之. Lipschitz非线性系统自适应观测器设计 [J]. 上海: 上海交通大学学报, 2003, 37(6): 943 – 946.)
- [20] ZHU Fanglai, HAN Zhengzhi. The design of reduced-order observers for Lipschitz nonlinear systems [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2004, 30(4): 613 – 618.
(朱芳来, 韩正之. 非线性系统降维观测器设计 [J]. 自动化学报, 2004, 30(4): 613 – 618.)
- [21] ZHAO Lili, LI Ping, LI Xiuliang. Adaptive observer design for a class of nonlinear systems [J]. *Control Theory & Applications*, 2012, 29(1): 11 – 18.
(赵黎丽, 李平, 李修亮. 一类非线性系统的自适应观测器设计 [J]. 控制理论与应用, 2012, 29(1): 11 – 18.)
- [22] HU G. Observers for one-side Lipschitz non-linear systems [J]. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 2006, 23(4): 395 – 401.
- [23] XU M, HU G, ZHAO Y. Reduced-order observer design for one-side Lipschitz non-linear systems [J]. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 2009, 26(3): 299 – 317.
- [24] ABBASZADEH M, MARQUEZ H. Nonlinear observer design for one-sided Lipschitz systems [C] // *Proceedings of the American Control Conference*. Baltimore: IEEE, 2010: 5284 – 5289.
- [25] ZHANG W, SU H, LIANG Y, et al. Non-linear observer design for one-sided Lipschitz systems: an linear matrix inequality approach [J]. *IET Control Theory and Applications*, 2012, 6(9): 1297 – 1303.
- [26] ZHANG W, SU H, WANG H, et al. Full-order and reduced-order observers for one-sided Lipschitz nonlinear systems using Riccati equations [J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2012, 17(12): 4968 – 4977.
- [27] CAI X, GAO H, LIU L, et al. Control design for one-sided Lipschitz nonlinear differential inclusions [J]. *ISA Transactions*, 2014, 53(2): 298 – 304.
- [28] CAI X, WANG Z, LIU L. Control design for one-side Lipschitz nonlinear differential inclusion systems with time-delay [J]. *Neurocomputing*, 2015, 165(1): 182 – 189.
- [29] ZHANG W, SU H, ZHU F, et al. Improved exponential observer design for one-sided Lipschitz nonlinear systems [J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2016, DOI: 10.1002/rnc.3543.
- [30] NGUYEN M, TRINH H. Reduced-order observer design for one-sided Lipschitz time-delay systems subject to unknown inputs [J]. *IET Control Theory and Applications*, 2016, 10(10): 1097 – 1105.
- [31] NGUYEN M, TRINH H. Unknown input observer design for one-sided Lipschitz discrete-time systems subject to time-delay [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2016, 286: 57 – 71.
- [32] DONG Y, LIU W, LIANG S. Nonlinear observer design for one-sided Lipschitz systems with time-varying delay and uncertainties [J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2016, DOI: 10.1002/rnc.3648.
- [33] KEEL L, BHATTACHARYYA S. Robust, fragile, or optimal? [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1997, 42(8): 1098 – 1105.
- [34] KIM J. Observer-based non-fragile H_∞ control for singular systems [C] // *Proceedings of Sice-icase International Joint Conference*. Bexco: IEEE, 2006: 3191 – 3195.
- [35] CHEN J, YANG C, LIEN C, et al. New delay-dependent non-fragile H_∞ observer-based control for continuous time-delay systems [J]. *Information Sciences*, 2008, 178(24): 4699 – 4706.
- [36] ZHANG J, SHI P, YANG H. Non-fragile robust stabilization and H_∞ control for uncertain stochastic nonlinear time-delay systems [J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2009, 42(5): 3187 – 3196.
- [37] WU Y, SU H, LU R, et al. Passivity-based non-fragile control for Markovian jump systems with aperiodic sampling [J]. *Systems and Control Letters*, 2015, 84: 35 – 43.

作者简介:

施敏杰 (1990–), 男, 硕士研究生, 目前研究方向为非线性系统控制, E-mail: roylist@163.com;

黄俊 (1984–), 男, 博士, 副教授, 目前研究方向为非线性系统控制, E-mail: cauchyhot@163.com;

陈良 (1981–), 男, 博士, 副教授, 目前研究方向为智能控制系统, E-mail: chenl@suda.edu.cn;

韩正之 (1947–), 男, 博士, 教授, 目前研究方向为非线性系统控制, E-mail: zzhan@sjtu.edu.cn.