

离散多平衡点正切换系统有限区间稳定与镇定

刘 志, 张宪福[†], 王玉振

(山东大学 控制科学与工程学院, 山东 济南 250061)

摘要: 在切换事件中, 外界环境的干扰或者事物自身的发展变化会导致多平衡点现象. 此时, 多平衡点切换系统模型比传统的切换系统模型更适合描述此类事件. 因此本文研究离散多平衡点正切换线性系统在有限时间区间上的稳定性与镇定性. 第1, 给出离散多平衡点线性切换系统为正的充要条件. 第2, 提出离散多平衡点正切换线性系统在有限时间区间上稳定的概念. 第3, 通过构造合适的Lyapunov函数以及合理分配系统的驻留时间与切换次数, 针对部分子系统不稳定的离散多平衡点正切换线性系统, 建立所考虑的自治系统有限时间稳定的充分条件. 第4, 给出非自治多平衡点正切换线性系统的控制器设计. 最后, 仿真例子验证理论结果的正确性.

关键词: 正切换线性系统; 多平衡点; 不稳定子系统; 有限时间稳定; 镇定

中图分类号: TP273 文献标识码: A

Stability and stabilization for discrete-time positive switched multiple equilibria systems on finite time intervals

LIU Zhi, ZHANG Xian-fu[†], WANG Yu-zhen

(School of Control Science and Engineering, Shandong University, Jinan Shandong 250061, China)

Abstract: The interference of the external environment or the development and changes of things will lead to the phenomenon of multiple equilibria in the switching events. Compared with the model of general switched systems, the model of multiple equilibria switched systems are better to describe these situations. This paper studies the stability and stabilization for discrete-time multiple equilibria positive switched systems (DT-MEPSSs) on finite time intervals. Firstly, the necessary and sufficient condition of positivity for the switched multiple equilibria systems is proposed. Secondly, the definition of finite time stability for the MEPSSs is given. Thirdly, by establishing a suitable Lyapunov function and managing the dwell time and the number of switching times, a sufficient condition of finite time stability for the DT-MEPSS with unstable subsystems is provided. Fourthly, the controller design for the non-autonomous MEPSS is presented. Finally, a simulation example is given to verify the correctness of the obtained results.

Key words: positive switched linear systems; multiple equilibria; unstable subsystems; finite time stability; stabilization

1 引言(Introduction)

正系统^[1], 是指对任意的非负初值, 系统的解轨迹仍然停留在正象限里. 作为一类特殊的切换系统^[2-3], 正切换系统^[4]是由多个正的子系统和一个指挥所有子系统运行方式的切换信号构成. 与一般的系统相比较而言, 正系统或者正切换系统有着其自身的一些特性, 例如D-stability^[5-6]和对时滞的不敏感性^[7-10]等, 这是一般的切换系统所不具备的. 另外, 研究一般切换系统行为的大部分方法可以直接应用到正切换系统上, 反过来却不一定可行, 例如, 研究正切换系统稳定性用到的线性Lyapunov泛函方法. 由于正切换系统

在实际生活中(例如网络通信、化学反应、人口预测、药物治疗等等)的广泛应用, 越来越多的学者开始关注正切换系统稳定性分析与控制问题(见文献[11-15]). 目前, 关于正切换线性系统的稳定性理论也逐渐完善.

通常, 对于切换系统而言, 多数情况下学者们默认所有的子系统拥有共同且唯一的平衡点, 也就是常见的零平衡点. 然而, 由于外界因素的干扰或者事物自身的发展变化, 使得平衡点发生改变或者导致多平衡点现象(例如机械系统中的器械振动、博弈中的策略改变、电力系统中的切负荷控制等). 特别地, 在生态

收稿日期: 2016-08-01; 录用日期: 2017-03-14.

[†]通信作者. E-mail: zhangxianfu@sdu.edu.cn; Tel.: +86 13173021022.

本文责任编辑: 吴立刚.

国家自然科学基金项目(61374065, 61573215, 61473133), 山东省泰山学者基金项目(ts20110822)资助.

Supported by National Natural Science Foundation of China (61374065, 61573215, 61473133), and Research Fund for Taishan Scholar Project of Shandong Province (ts20110822).

系统中, 某个生物种群在种群密度低的情况下, 其种群的数量主要受生态系统中该种群的捕食者的数量调控, 并且能够达到一个平衡状态也就是所谓的平衡点. 当种群密度比较高时, 激烈的食物竞争成为制约种群数量发展的关键因素. 由于食物的紧张导致该种群的数量将会达到一个新的平衡点. 显然, 用传统的单平衡点切换系统模型来描述该类典型的切换事件将不再合适, 而更具一般性的多平衡点切换系统模型更加精确和可靠.

直观上, 多平衡点正切换系统模型可以看作是单平衡点正切换系统模型的推广, 但是关于多平衡点正切换系统稳定性的定义和相关的研究技巧却不能直接在单平衡点正切换系统的基础上进行简单的推广. 这是因为多平衡点正切换系统的每一个子系统都有不同于其他子系统的平衡点, 所以, 多平衡点正切换系统即使稳定也不会像单平衡点正切换系统那样稳定到一个点, 取而代之的是一个包含所有平衡点的有界闭域. 因此, 多平衡点正切换系统稳定的定义就要做重新的界定. 同时, 由于平衡点的多样化使得多平衡点正切换系统的所有子系统更加的复杂, 所以在稳定性分析中构造合适的Lyapunov函数将会是研究多平衡点正切换系统稳定性问题中首先要解决的事情, 而这也将会与单平衡点正切换系统有着本质的区别.

鉴于多平衡点切换系统的实用性, 近年来部分学者开始关注多平衡点切换系统稳定性理论的研究^[16-20]. 针对一般的切换系统, 文献[16]构造了一个包含所有平衡点的超集, 并且证明了系统轨迹最终全局收敛到并且停留在这个超集里. 郭和王在文献[17-18]中利用类二次Lyapunov函数法研究了多平衡点线性切换系统的区域稳定性, 并提供了一些粗略估计稳定域的方法. 根据正切换系统自身的特性, 文献[20]研究了连续多平衡点正切换线性系统的区域稳定性, 并且给出了一个保守性较低的稳定域的估计. 需要注意的是, 以上所提到的关于多平衡点切换系统的结果都是在无穷时间上进行分析而得到的.

众所周知, Lyapunov渐近稳定考察的是当时间趋向于无穷时系统轨迹的渐近行为. 但是这种稳定性定义不一定适合所有的控制系统. 例如, 导弹发射系统的运行时间, 化学反应的时间, 药物治疗的时间, 无人机的运行时间等等都是有限的. 为了更加合理的描述此类系统的解轨迹性态, 20世纪五六十年代, 学者们给出了有限时间区间稳定的概念^[21-22]. 对于给定的有界初始状态, 如果在一个固定的时间区间上所考虑的系统状态总是不超过预设的一个上界, 就称这个系统是有限时间区间稳定的. 需要强调的是, 有限时间区间稳定描述的是一个系统在有限区间上的瞬时行为, 而不是它的渐近行为. 因此, 有限时间区间稳定性与Lyapunov渐近稳定性是两个不同且没有必然联系

的概念.

目前, 关于单平衡点(正切换)系统有限时间区间稳定性分析与控制已经有一些结果(见文献[23-26]). 而多平衡点正切换系统由于每个子系统的平衡点不再相同, 导致无论是Lyapunov函数的构造还是具体的有限时间区间上的解轨迹性态分析都变得复杂而富有挑战性. 此外, 当所考虑多平衡点系统的部分子系统出现不稳定的情况时, 如何分配稳定子系统与不稳定子系统的驻留时间, 以及如何找到切换总次数的一个临界值, 这都是实际系统运行过程中必然面临的问题, 也是理论上急需讨论的课题.

基于以上分析, 本文研究离散多平衡点正切换线性系统的有限时间稳定与镇定问题. 主要创新与贡献如下:

1) 给出离散多平衡点线性切换系统为正的充要条件. 同时, 单平衡点线性切换系统为正的充要条件作为其特殊情况被包含其中.

2) 将单平衡点正切换线性系统有限时间区间稳定的概念推广到离散多平衡点正切换线性系统, 并且将传统概念中的两个预设上界(初值上界 r_1 和状态最终上界 r_2)的大小关系($r_1 < r_2$ 或者 $r_1 = r_2$)修正为 $r_1 \geq r_2$, 使其能够适用的范围更广并且得到的结果更符合实际需求(见注2).

3) 不同于参考文献[17-18]中用到的较为保守的类二次Lyapunov函数方法, 本文根据离散多平衡点正切换线性系统自身的特点, 构造简洁直观的一次Lyapunov函数, 从而有效的解决部分子系统不稳定时, 所考虑的自治多平衡点正切换系统在有限时间区间上的稳定问题. 同时通过量化切换总次数与稳定子系统的总驻留时间和不稳定子系统的总驻留时间之间的关系, 给出切换总次数的一个上界.

4) 通过设计合理的状态反馈控制器, 保证所有子系统为正且镇定. 并给出所考虑非自治离散多平衡点系统有限时间区间稳定的充分条件.

本文用到的一些符号: $\mathbb{N}(\mathbb{N}_0)$ 表示全体(非负)整数的集合; $\mathbb{R}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+^n)$ 和 $\mathbb{R}^{n \times n}$ 分别是全体实数(非负实数、非负 n 维向量)集合和 $n \times n$ 维实数矩阵集合; I 代表单位矩阵; $\mathbf{0}$ 代表 \mathbb{R}^n 中的零向量; $l \doteq \{1, 2, \dots, l\}$, $\forall l \in \mathbb{N}$. $A \succeq 0$ (> 0 , ≤ 0 , < 0)是指矩阵 A 的所有元素是非负的(正的、非正的、负的); A^T 代表矩阵 A 的转置; $\|\cdot\|$ 代表欧几里得范数; $d(x_1, x_2) = \|x_1 - x_2\|$ 是 \mathbb{R}^n 中任意两点 x_1 和 x_2 的距离.

2 预备知识(Preliminaries)

考虑离散多平衡点系统

$$\begin{cases} x(k+1) = A_{\sigma(k)}(x(k) - x_{\sigma(k)}^e) + x_{\sigma(k)}^e, \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1)$$

和

$$\begin{cases} x(k+1) = A_{\sigma(k)}(x(k) - x_{\sigma(k)}^e) + x_{\sigma(k)}^e + \\ \quad B_{\sigma(k)}u_{\sigma(k)}(k), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (2)$$

这里: $k \in \mathbb{N}_0, x(k) \in \mathbb{R}_+^n$ 是状态变量, 切换信号 $\sigma(k) : \mathbb{N}_0 \rightarrow \underline{p} = \{1, 2, \dots, p\}$ (p 是子系统的个数), 切换序列为 $0 = k_0 < k_1 < k_2 < \dots < k_j < \dots$. 对于任意的 $i \in \underline{p}$, 如果 $\sigma(k) = i$, 则表示第 i 个子系统被激活, 系统矩阵 $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}, B_i \in \mathbb{R}^{n \times r}$, 控制输入 $u_i \in \mathbb{R}^r$, 每一个子系统有唯一且不同于其他所有子系统的平衡点, 即 $x_i^e = (x_{i1}^e, \dots, x_{in}^e)^T \in \mathbb{R}^n$, 且 $x_i^e \neq x_j^e$ ($\forall i, j \in \underline{p}, i \neq j$).

根据文献[1]对线性正系统的定义, 本文给出离散多平衡点线性切换系统为正的定義:

定义 1 离散多平衡点线性切换系统(2)称为正系统, 如果对于任意的初值 $x(0) \succeq 0$, 对于每一个平衡点 $x_i^e \in \mathbb{R}_+^n$, 对于每一个输入 $u_i \succeq 0$ ($i \in \underline{p}$) 和任意的切换信号 $\sigma(k)$, 相应的解轨迹 $x(k)$ 满足 $x(k) \succeq 0, \forall k \in \mathbb{N}_0$.

接下来的引理给出系统(2)为正的充要条件.

引理 1 系统(2)是正系统, 当且仅当 $A_{\sigma(k)} \succeq 0, (I - A_{\sigma(k)})x_{\sigma(k)}^e \succeq 0$, 并且 $B_{\sigma(k)} \succeq 0, \sigma(k) \in \mathcal{L}$.

证 此引理的证明可以通过以下步骤形成:

步骤 1 首先, 寻找第 $i \in \underline{p}$ 个子系统为正的充要条件. 这里第 i 个子系统表示如下:

$$x^{(i)}(k+1) = A_i(x(k) - x_i^e) + x_i^e + B_i u_i(k), \quad (3)$$

其中 $x^{(i)}(k)$ 表示第 i 个子系统的解.

充分性. 对于任意的 $x^{(i)}(0) \succeq 0, u_i(k) \succeq 0$, 根据数学归纳法, 能够得到

$$\begin{aligned} x^{(i)}(k+1) &= A_i^{k+1}x^{(i)}(0) + (A_i^k + \dots + A_i + I)(I - A_i)x_i^e + \\ &A_i^k B_i u_i(0) + \dots + A_i B_i u_i(k-1) + \\ &B_i u_i(k) = \\ &A_i^{k+1}x^{(i)}(0) + \sum_{j=0}^k A_i^j (I - A_i)x_i^e + \\ &\sum_{j=0}^k A_i^{k-j} B_i u_i(j). \end{aligned}$$

显然, 对任意的 $x^{(i)}(0) \succeq 0$ 和任意的 $u_i(k) \succeq 0$, 如果 $A_i \succeq 0, (I - A_i)x_i^e \succeq 0$, 并且 $B_i \succeq 0$, 则第 i 个子系统(3)为正.

必要性. 假设第 i 个子系统(3)为正, 即对任意的 $x^{(i)}(0) \succeq 0$ 和任意的 $u_i(k) \succeq 0$, 有 $x^{(i)}(k) \succeq 0, \forall k \in \mathbb{N}_0$. 下面用反证法证明如果第 i 个子系统(3)为正, 则 $A_i \succeq 0, (I - A_i)x_i^e \succeq 0$ 和 $B_i \succeq 0$ 是成立的.

i) 如果 $A_i \not\succeq 0$. 令 $x_i^e = \mathbf{0}$, 同时取 $b_{mn}^{(i)} \equiv 0$ (这里 $B_i = (b_{mn}^{(i)}), \forall m, n \in \underline{n}$). 此时, 根据上面得到的关系式可知 $x^{(i)}(k+1) = A_i^{k+1}x^{(i)}(0)$. 显然, 对任意的 $x^{(i)}(0) \succeq 0, x^{(i)}(k+1) \succeq 0$ 是不一定成立的.

ii) 如果 $(I - A_i)x_i^e \not\succeq 0$. 令 $A_i \succeq 0, x^{(i)}(0) = \mathbf{0}$, 同时取 $b_{mn}^{(i)} \equiv 0$ (这里 $B_i = (b_{mn}^{(i)}), \forall m, n \in \underline{n}$). 类似地, $x^{(i)}(k+1) = \sum_{j=0}^k A_i^j (I - A_i)x_i^e$ 不一定恒为非负值.

iii) 如果 $B_i \not\succeq 0$. 令 $A_i \succeq 0, x^{(i)}(0) = x_i^e \equiv \mathbf{0}$. 同样能够推出矛盾.

因此, 根据 i 的任意性, 可知对于任意的 $i \in \underline{p}$, 第 i 个子系统(3)是正系统的充要条件是 $A_i \succeq 0, (I - A_i) \cdot x_i^e \succeq 0$, 并且 $B_i \succeq 0$.

步骤 2 其次, 本文推断只要所有的子系统是正系统, 则多平衡点线性切换系统(2)在任意的切换信号 $\sigma(k)$ 下也是正系统.

这是因为根据正系统的定义, 可知对于任意的 $x(0) \succeq 0$, 第 1 个被激活的子系统的解在时间区间 $[k_0, k_1)$ 上是非负的, 所以第 2 个被激活的子系统的初始值(同时也是第 1 个被激活的子系统的解在最后时刻的值)仍然是非负的, 因此系统的解在时间区间 $[k_1, k_2)$ 上继续保持非负状态. 这样递推下去, 不难发现, 多平衡点线性切换系统(2)的解在整个运行时间区间上都是非负的.

步骤 3 最后, 综合以上分析, 可以断定多平衡点线性切换系统(2)在任意的切换信号 $\sigma(k)$ 下为正的充要条件是 $A_{\sigma(k)} \succeq 0, (I - A_{\sigma(k)})x_{\sigma(k)}^e \succeq 0$, 并且 $B_{\sigma(k)} \succeq 0$. 证毕.

注 1 如果对任意的 $i, j \in \underline{p}$, 有 $x_i^e = x_j^e \equiv \mathbf{0}$, 则多平衡点线性切换系统(2)将退化为一般的离散线性切换系统 $x(k+1) = A_{\sigma(k)}x(k) + B_{\sigma(k)}u_{\sigma(k)}(k)$. 显然, 其为正的充要条件 $A_{\sigma(k)} \succeq 0$ 且 $B_{\sigma(k)} \succeq 0$ 是引理 1 的一种特殊情况.

如不特殊说明, 本文中所考虑的系统均为正系统.

下面, 本文将文献[24]([25])对单平衡点(正)切换系统有限时间区间稳定的定义推广到多平衡点正切换系统. 同时, 为了更加符合实际需求, 将其中的两个预定上界的关系 $r_1 < r_2$ ($r_1 = r_2 = 1$) 修正为 $r_1 \geq r_2$.

定义 2 已知一个整数 $K > 0$, 2 个标量 r_1, r_2 (这里 $r_1 \geq r_2$) 和 $\bar{x} \doteq \frac{1}{p} \sum_{i \in \underline{p}} x_i^e$, 称多平衡点正切换系

统(1)关于 (K, \bar{x}, r_1, r_2) 在任意切换信号 $\sigma(k)$ 下是有限时间稳定的, 如果

$$d(x(0), \bar{x}) \leq r_1 \Rightarrow d(x(k), \bar{x}) < r_2, \quad \forall k \in (0, K]. \quad (4)$$

注 2 需要指出的是, 当最终状态上界 r_2 为同一个常数时, 本文中的初值上界可以限定在一个更大的范围内, 因

此本文中定义2所考虑的系统有限区间稳定所适用的范围要更广一些. 另一方面, 如果取相同的初值上界 r_1 , 系统在有限区间上可以稳定到一个半径更小的域, 这样的结果更加符合实际需求. 此外, 对于连续系统而言, 是不能这样修正 r_1 与 r_2 关系的.

3 自治系统有限时间稳定性(Finite time stability for autonomous system)

本节考虑部分子系统不稳定的情况下, 自治多平衡点正切换系统(1)在有限时间区间上的稳定性. 不失一般性, 假设多平衡点自治正切换系统(1)的前 $m(0 \leq m < p)$ 个子系统的矩阵 A_i 不是Schur稳定的, 而剩余的子系统矩阵是Schur稳定的. 进一步的, 给出以下假设:

假设1 给定 p 个正向量 $\xi^{(i)} \in \mathbb{R}_+^n, i \in \underline{p}$, 存在3个标量 $\lambda, \gamma > 1, 0 < \mu < 1$, 使得下面的2个不等式成立:

$$A_j^T \xi^{(i)} \leq (\lambda, \mu)_j \xi^{(i)}, \quad i, j \in \underline{p}, \quad (5)$$

这里 $(\lambda, \mu)_j \doteq \begin{cases} \lambda, & 0 \leq j \leq m, \\ \mu, & m+1 \leq j \leq p; \end{cases}$

$$\xi^{(i)} < \gamma \xi^{(j)}, \quad \forall i, j \in \underline{p}, i \neq j. \quad (6)$$

注3 离散系统中系统矩阵的特征值是否落在单位圆内是评判系统是否稳定的依据, 因此, 对于给定的有限个子系统, 它们的所有特征值无论是大于1还是小于1都可以找到相应的上界, 所以假设1中的不等式(5)是具有一般性的. 不等式(6)经常被用来衡量任意两个给定的正向量 $\xi^{(i)}$ 与 $\xi^{(j)}$ 之间的大小关系. 这里的常数 λ, μ, γ 都能很方便的求出来. 例如存在非奇异矩阵 P_j 使得

$$P_j^{-1} A_j^T P_j = \text{diag}\{\lambda_1^{(j)}, \lambda_2^{(j)}, \dots, \lambda_n^{(j)}\},$$

其中 $\lambda_1^{(j)}, \dots, \lambda_n^{(j)}$ 是矩阵 A_j^T 的 n 个特征值. 因此可以选择

$$\lambda = \max_{\lambda_i^{(j)} > 1, j \in \underline{p}, i \in \underline{n}} \frac{\max \|P_j\|}{\min \|P_j\|} \lambda_i^{(j)},$$

$$\mu = \max_{0 < \lambda_i^{(j)} < 1, j \in \underline{p}, i \in \underline{n}} \frac{\max \|P_j\|}{\min \|P_j\|} \lambda_i^{(j)}.$$

此外易知

$$\gamma = \frac{\max_{j \in \underline{p}} \|\xi^{(j)}\|}{\min_{i \in \underline{p}} \|\xi^{(i)}\|}.$$

为了便于描述, 引入下面两个符号:

$$c_1 \doteq \min_{i \in \underline{p}} d(\bar{x}, x_i^e), \quad c_2 \doteq \max_{i \in \underline{p}} d(\bar{x}, x_i^e), \quad (7)$$

这里的 \bar{x} 与定义2一致.

定理1 对于自治系统(1), 令假设1成立. 给定两个正数 r_1, r_2 满足关系 $0 < r_2 \leq r_1$, 在有限时间区间 $[0, K](K > 0)$ 上, 假设 K_u 表示所有不稳定子系统运行总时间, K_s 表示所有稳定子系统运行总时间($K_u +$

$K_s = K$), 并且用 $N = N(0, K)$ 来表示系统(1)在区间 $[0, K]$ 上的切换总次数. 如果 N 满足下面的不等式

$$N < \frac{\ln \frac{(r_2 - c_1)}{(r_1 + c_2)} - \ln \gamma - K_u \ln \lambda - K_s \ln \mu}{\ln \lambda}, \quad (8)$$

则称系统(1)关于 (K, \bar{x}, r_1, r_2) 是有限时间区间稳定的.

证 对任意的 $k \in (0, K]$, 不妨设 $k \in [k_l, k_{l+1})$ ($l \in \mathbb{N}_0$)且 $\sigma(k) = i_l \in \underline{p}$. 对第 i_l 个子系统, 构造如下的Lyapunov函数

$$V_{i_l}(x(k)) = \sum_{j=1}^p \mathcal{G}_j^T(k) \xi^{(i_l)}, \quad i_l \in \underline{p},$$

这里

$$\mathcal{G}_j(k) =$$

$$(|x_1(k) - x_{j1}^e|, |x_2(k) - x_{j2}^e|, \dots, |x_n(k) - x_{jn}^e|)^T.$$

根据 $A_j = (a_{uv})_{n \times n}^{(j)} \succeq 0$, 计算得

$$\mathcal{G}_j^T(k+1) =$$

$$(|x_1(k+1) - x_{j1}^e|, \dots, |x_n(k+1) - x_{jn}^e|) =$$

$$(|\sum_{v=1}^n a_{1v}^{(j)}(x_v(k) - x_{jv}^e)|, \dots,$$

$$|\sum_{v=1}^n a_{nv}^{(j)}(x_v(k) - x_{jv}^e)|) \leq$$

$$(\sum_{v=1}^n a_{1v}^{(j)} |x_v(k) - x_{jv}^e|, \dots, \sum_{v=1}^n a_{nv}^{(j)} |x_v(k) - x_{jv}^e|) =$$

$$\mathcal{G}_j^T(k) A_j^T.$$

联合假设1中的式(5), 可知

$$V_{i_l}(x(k+1)) - V_{i_l}(x(k)) =$$

$$\sum_{j=1}^p \mathcal{G}_j^T(k+1) \xi^{(i_l)} - \sum_{j=1}^p \mathcal{G}_j^T(k) \xi^{(i_l)} \leq$$

$$\sum_{j=1}^p \mathcal{G}_j^T(k) A_j^T \xi^{(i_l)} - \sum_{j=1}^p \mathcal{G}_j^T(k) \xi^{(i_l)} \leq$$

$$[(\lambda, \mu)_j - 1] V_{i_l}(x(k)),$$

即

$$V_{i_l}(x(k+1)) \leq (\lambda, \mu)_j V_{i_l}(x(k)).$$

更进一步, 对任意的 $k \in [k_l, k_{l+1})$, 有

$$V_{i_l}(x(k)) \leq (\lambda, \mu)_j^{k-k_l} V_{i_l}(x(k_l)). \quad (9)$$

在切换时刻 $k_l(l \in \mathbb{N})$, 对任意两个相邻的子系统, 有

$$\frac{V_{i_l}(x(k_l))}{V_{i_{l-1}}(x(k_l - 1))} = \frac{\sum_{j=1}^p \mathcal{G}_j^T(k_l) \xi^{(i_l)}}{\sum_{j=1}^p \mathcal{G}_j^T(k_l - 1) \xi^{(i_{l-1})}} \leq \frac{\sum_{j=1}^p \mathcal{G}_j^T(k_l - 1) A_j^T \xi^{(i_l)}}{\sum_{j=1}^p \mathcal{G}_j^T(k_l - 1) \xi^{(i_{l-1})}} <$$

$$\frac{\gamma(\lambda, \mu)_j \sum_{j=1}^p \mathcal{G}_j^T(k_l - 1)\xi^{(i_{l-1})}}{\sum_{j=1}^p \mathcal{G}_j^T(k_l - 1)\xi^{(i_{l-1})}} = \gamma(\lambda, \mu)_j,$$

因此, 可得

$$\frac{V_{i_l}(x(k_l))}{V_{i_{l-1}}(x(k_l - 1))} < \gamma(\lambda, \mu)_j. \quad (10)$$

在时间区间 $[0, K]$ 上, 结合不等式(9)和(10), 计算得

$$\begin{aligned} & V_{i_N}(x(K)) \leq \\ & (\lambda, \mu)_j^{K-k_N} V_{i_N}(x(k_N)) = \\ & (\lambda, \mu)_j^{K-k_N} \frac{V_{i_N}(x(k_N))}{V_{i_{N-1}}(x(k_N - 1))} V_{i_{N-1}}(x(k_N - 1)) < \\ & \gamma(\lambda, \mu)_j^{K-k_N+1} V_{i_{N-1}}(x(k_N - 1)) \leq \\ & \gamma(\lambda, \mu)_j^{K-k_N+1} (\lambda, \mu)_j^{k_N-1-k_{N-1}} V_{i_{N-1}}(x(k_{N-1})) = \\ & \gamma(\lambda, \mu)_j^{K-k_{N-1}} V_{i_{N-1}}(x(k_{N-1})) < \dots < \\ & \gamma^N(\lambda, \mu)_j^K V_{i_0}(x(0)), \end{aligned}$$

也就是

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^p \mathcal{G}_j^T(K)\xi^{(i_N)} < \gamma^N(\lambda, \mu)_j^K \sum_{j=1}^p \mathcal{G}_j^T(0)\xi^{(i_0)} < \\ & \gamma^{N+1}(\lambda, \mu)_j^K \sum_{j=1}^p \mathcal{G}_j^T(0)\xi^{(i_N)}. \end{aligned}$$

对不等式两边取范数, 得

$$\sum_{j=1}^p d(x(K), x_j^e) < \gamma^{N+1}(\lambda, \mu)_j^K \sum_{j=1}^p d(x(0), x_j^e).$$

显然,

$$\min_{j \in \underline{p}} d(x(K), x_j^e) < \gamma^{N+1}(\lambda, \mu)_\sigma^K \max_{j \in \underline{p}} d(x(0), x_j^e).$$

根据三角不等式以及条件(8), 计算得

$$\begin{aligned} & d(x(K), \bar{x}) < \\ & \gamma^{N+1}(\lambda, \mu)_j^K [d(x(0), \bar{x}) + \max_{j \in \underline{p}} d(\bar{x}, x_j^e)] + \\ & \min_{j \in \underline{p}} d(\bar{x}, x_j^e) = \\ & \gamma^{N+1} \lambda^{K_u} \mu^{K_s} (r_1 + c_2) + c_1 < \\ & \lambda^{K_u} \mu^{K_s} \gamma^{\frac{\ln(r_2 - c_1)}{(r_1 + c_2)} - K_u \ln \lambda - K_s \ln \mu} (r_1 + c_2) + c_1 = \\ & \lambda^{K_u} \mu^{K_s} \frac{r_2 - c_1}{(r_1 + c_2) \lambda^{K_u} \mu^{K_s}} (r_1 + c_2) + c_1 = r_2. \end{aligned}$$

综上分析, 得出结论离散多平衡点正切换线性系统(1)关于 (K, \bar{x}, r_1, r_2) 在任意切换信号 $\sigma(k)$ 下是有限时间区间稳定的. 证毕.

众所周知, 平均驻留时间方法是处理切换系统稳定性的一个重要方法. 因此, 利用平均驻留时间方法, 可以得到如下的推论

推论 1 对于自治系统(1), 令假设1成立. 给定两个正数 r_1, r_2 满足关系 $0 < r_2 \leq r_1$, 在有限时间区

间 $[0, K](K > 0)$ 上, 假设 K_u 表示所有不稳定子系统运行总时间, K_s 表示所有稳定子系统运行总时间($K_u + K_s = K$). 如果平均驻留时间 τ_a 满足下面的不等式

$$\tau_a > \frac{K \ln \gamma}{\ln \frac{(r_2 - c_1)}{(r_1 + c_2)} - (N_0 + 1) \ln \gamma - K \ln \mu}, \quad (11)$$

则称系统(1)关于 (K, \bar{x}, r_1, r_2) 是有限时间区间稳定的, 这里 N_0 是振动界.

4 非自治系统有限时间镇定(Finite time stabilization for non-autonomous system)

本节针对非自治系统(2), 通过设计合理的状态反馈控制器, 确保所有子系统为正并且镇定. 为了简便起见, 在本节的讨论中取振动界 $N_0 \equiv 0$.

定理 2 给定3个标量 $K > 0, r_1, r_2(0 < r_2 \leq r_1)$. 如果存在两组实矩阵 $D_i = (d_{uv})_{n \times n}^{(i)} \in \mathbb{R}^{r \times n}$ 和 $A_i = \text{diag}\{\lambda_1^{(i)}, \lambda_2^{(i)}, \dots, \lambda_n^{(i)}\}$, 一组正向量 $\xi^{(i)} \in \mathbb{R}_+^n$ ($i \in \underline{p}$), 两个实数 $\gamma > 1, 0 < \mu < 1$, 使得如下条件成立:

- a) $A_i + B_i D_i A_i^{-1} \geq 0, i \in \underline{p};$
- b) $(I - A_i - B_i D_i A_i^{-1})x_i^e \geq 0, i \in \underline{p};$
- c) $(A_i^T + (A_i^{-1})^T D_i^T B_i^T)\xi^{(i)} \leq \mu \xi^{(i)}, i \in \underline{p};$
- d) $\xi^{(i)} < \gamma \xi^{(j)}, i, j \in \underline{p}, i \neq j;$

e) $\tau_a > \frac{K \ln \gamma}{\ln \frac{(r_2 - c_1)}{(r_1 + c_2)} - K \ln \mu - \ln \gamma}$, 这里 c_1, c_2 的定义与式(7)一致.

则称非自治系统(2)是正系统并且关于 (K, \bar{x}, r_1, r_2) 在如下状态反馈控制器下是有限时间区间稳定的:

$$u_i(k) = L_i(x(k) - x_i^e) = D_i A_i^{-1}(x(k) - x_i^e), i \in \underline{p}. \quad (12)$$

证 根据式(12)和条件a)-b), 可知

$$\begin{aligned} & (A_i + B_i L_i) \geq 0, \\ & (I - A_i - B_i L_i)x_i^e \geq 0. \end{aligned}$$

再由引理1, 可以断定闭环系统(2)是正系统.

同时, 在状态反馈控制器 u_i 下, 可计算

$$(A_i + B_i L_i)^T \xi^{(i)} = (A_i^T + (A_i^{-1})^T D_i^T B_i^T)\xi^{(i)}.$$

根据条件c), 可知系统(2)的每一个子系统是可镇定的. 结合条件c)和d), 计算得

$$d(x(K), \bar{x}) < \gamma^{N+1} \mu^K (r_1 + c_2) + c_1.$$

利用平均驻留时间方法再结合条件e), 可得

$$\begin{aligned} & d(x(K), \bar{x}) < \\ & \mu^K \gamma^{\frac{K}{\tau_a} + 1} (r_1 + c_2) + c_1 < \\ & \mu^K \gamma^{\frac{\ln(r_2 - c_1) - K \ln \mu - \ln(r_1 + c_2)}{\ln \gamma}} (r_1 + c_2) + c_1 = \end{aligned}$$

$$\mu^K \frac{r_2 - c_1}{\mu^K (r_1 + c_2)} (r_1 + c_2) + c_1 = r_2,$$

即 $d(x(K), \bar{x}) < r_2$.

因此, 非自治系统(2)在所设计的控制器(12)下是有限时间区间稳定的. 证毕.

5 数值例子(A numerical example)

例 1 一般而言, 一个数据通信网络由4部分构成: 控制中心, 通信终端, 通信线路, 数据交换结点. 不同的数据包从控制中心出发, 经过通信线路和数据交换节点, 最终被传送到通信终端. 由于通信线路的规格不同, 导致其各自的数据通信量也会有一个最合适的值, 否则在数据传输的过程中就会发生网络拥塞或者数据丢包等情况.

根据文献[20], 图1中的具有3个结点的数据通信网络可以由下面的连续多平衡点正切换系统来表示:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}(x(t) - x_{\sigma(t)}^e), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (13)$$

这里 $x(t) \in \mathbb{R}_+^3$ 代表网络中的数据通信量. 切换信号 $\sigma(t) \in \underline{p} = \{1, 2\}$, 当 $\sigma(t) = 1$ 时, 数据通信切换到闲时网络模型; 当 $\sigma(t) = 2$ 时, 忙时网络模型运行. 平衡点 $x_i^e (i = 1, 2)$ 表示各自网络模型的最合适的数据通信量.

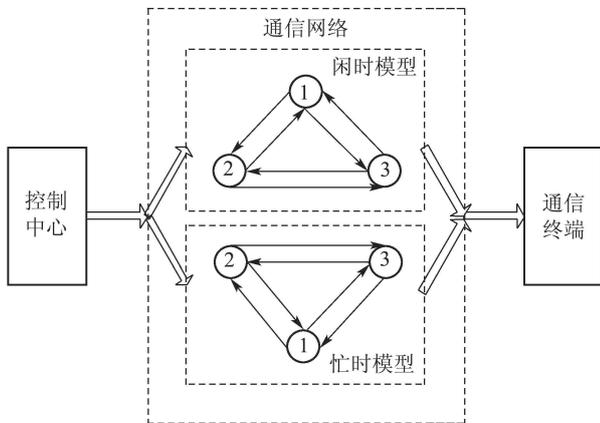


图1 具有三个结点的数据通信网络示意图

Fig. 1 Data communication networks with three nodes

将上面的系统(13)离散化, 可得如下离散多平衡点正切换系统:

$$\begin{cases} x(k+1) = A_{\sigma(k)}(x(k) - x_{\sigma(k)}^e) + x_{\sigma(k)}^e, \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (14)$$

与文献[20]中的实例假设相同, 这里假设:

1) 闲时网络模型的最大数据通信量是2 Gb(也就是说 $x_1(k) + x_2(k) + x_3(k) \leq 2$), 忙时网络模型的最大数据通信量是4 Gb(即 $x_1(k) + x_2(k) + x_3(k) \leq 4$).

2) 闲时网络模型运行时的最合适数据通信量为 $x_1^e = [0.6 \ 0.6 \ 0.7]^T$, 忙时网络模型运行时的最合适数据通信量为 $x_2^e = [1.4 \ 1.2 \ 1.3]^T$.

3) 取初始时刻为0, 需要网络传送的最初数据量为 $x(0) = [0.45 \ 0.9 \ 1.5]^T$.

接下来, 考虑系统(14)在 \mathbb{R}_+^3 且 $p = 2$ 的情况. 其中各参数如下所示:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.4 & 0.33 \\ 0.2 & 0.6 & 0.09 \\ 0.16 & 0.24 & 0.07 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.07 & 0.9 & 0.0165 \\ 0.492 & 0.4 & 0.08 \end{bmatrix},$$

$$r_1 = 1, r_2 = 0.75, K = 100 \text{ s}.$$

通过简单计算可知

$$(I - A_i)x_i^e \geq 0, \quad i = 1, 2,$$

因此, 两个子系统均为正系统. 同时, 系统矩阵 A_1 的特征值为 0.8053, -0.149, 0.1137; 系统矩阵 A_2 的特征值为 0.072, 0.908, 1. 利用 MATLAB 画图软件, 分别画出两个子系统以 0 为初始时刻, $[0.45 \ 0.9 \ 1.5]^T$ 为初始值的轨迹图. 从图 2-3 中可以看出第 1 个子系统相对于平衡点 $[0.6 \ 0.6 \ 0.7]^T$ 是稳定的. 第 2 个子系统相对于平衡点 $[1.4 \ 1.2 \ 1.3]^T$ 是不稳定的.

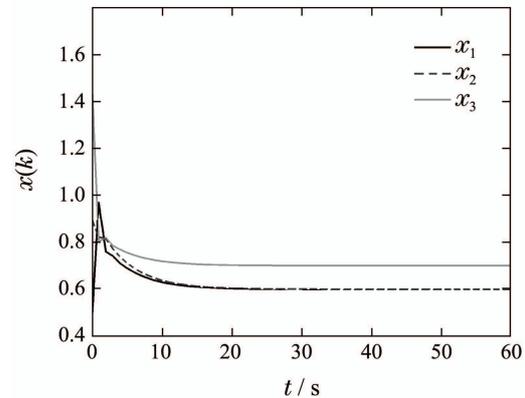


图2 第1个子系统的稳定性

Fig. 2 Stability for the first subsystem

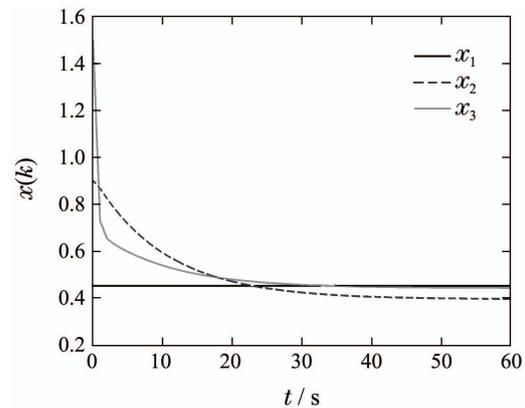


图3 第2个子系统的稳定性

Fig. 3 Stability for the second subsystem

接下来, 选取2个正向量

$\xi^{(1)} = [0.7 \ 0.8 \ 0.7]^T$, $\xi^{(2)} = [0.8 \ 0.9 \ 0.8]^T$, 以及3个常数 $\lambda = 1.1$, $\mu = 0.9$, $\gamma = 1.2$, 计算可知

$$A_1 \xi^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.621 \\ 0.683 \\ 0.353 \end{bmatrix} \leq 0.9 \xi^{(1)},$$

$$A_2 \xi^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.8792 \\ 0.8176 \end{bmatrix} \leq 1.1 \xi^{(2)}.$$

此外, 由前提假设, 直接计算得到 $\bar{x} = [1 \ 0.9 \ 1]^T$, $c_1 = c_2 = 0.5831$. 同时, 取 $K_u = 30 \text{ s}$, $K_s = 70 \text{ s}$. 根据定理1, 能够计算

$$\frac{\ln \frac{(r_2 - c_1)}{(r_1 + c_2)} - \ln \gamma - K_u \ln \lambda - K_s \ln \mu}{\ln \lambda} = 21.864.$$

因此, $N < 21.864$.

假设对于给定时间 $[0, 100]$, 采取如图4所示的周期切换, 其中系统(14)在有限区间上的切换总次数是10次, 并且在每一个切换周期内, 第1个子系统的驻留时间是7 s, 第2个子系统的驻留时间是3 s.

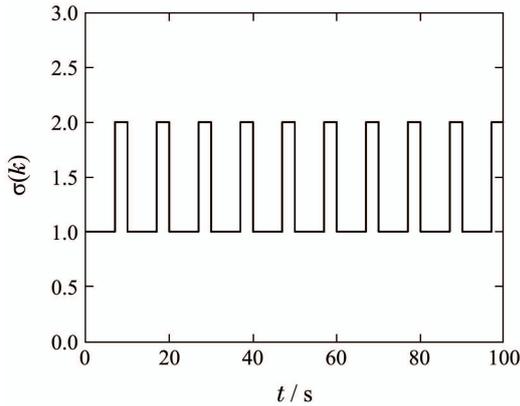


图4 切换信号

Fig. 4 The switching signal

最后, 对于给定的初值 $x(0) = [0.45 \ 0.9 \ 1.5]^T$, 计算可得 $x(0)$ 到 \bar{x} 的距离 $d(x(0), \bar{x}) = 0.7433 \leq r_1$. 在图4所示的周期切换下, 系统(14)的解 $x(k)$ 与 \bar{x} 的距离 $d(x(k), \bar{x})$ 的变化趋势如图5所示.

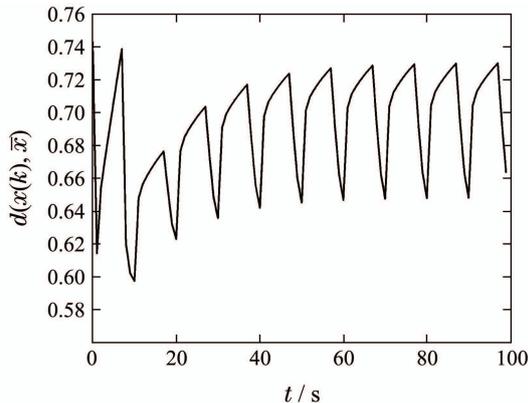


图5 系统的有限时间稳定性

Fig. 5 Finite time stability for the considered system

从图中可以看出在所考虑的有限时间区间 $[0, 100]$ 上, 对于给定的初始状态, 有 $d(x(0), \bar{x}) \leq r_1$ 且 $d(x(k), \bar{x}) \leq r_2$. 因此, 根据定理1, 可知实例中所考虑的离散多平衡点正切换系统(14)是有限时间区间稳定的. 该数值仿真例子进一步验证了理论结果的正确性.

6 结论(Conclusions)

本文研究了离散多平衡点正切换线性系统在有限时间区间上的稳定性与镇定问题. 给出所考虑的多平衡点系统为正系统的充要条件, 并且在部分子系统不稳定的情况下给出自治系统有限时间稳定的充分条件. 另外, 通过设计状态反馈控制器, 给出非自治系统有限时间镇定的条件. 最后, 通过数值仿真例子, 验证了理论结果的有效性.

参考文献(References):

- [1] FARINA L, RINALDI S. *Positive Linear Systems: Theory and Applications* [M]. New York: Wiley Interscience Series, 2000.
- [2] LIBERZON D. Basic problems in stability and design of switched systems [J]. *IEEE Control Systems*, 1999, 19(5): 59 – 70.
- [3] SUN Z, GE S S. *Stability Theory of Switched Dynamical Systems* [M]. London: Springer Science and Business Media, 2011.
- [4] GURVITS L, SHORTEN R, MASON O. On the stability of switched positive linear systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2007, 52(6): 1099 – 1103.
- [5] MASON O, BOKHARAIE V S, SHORTEN R. Stability and d-stability for switched positive systems [M] // *Positive Systems*. Berlin: Springer-Verlag, 2009: 101 – 109.
- [6] BOKHARAIE V S, MASON O, VERWOERD M. D-stability and delay-independent stability of homogeneous cooperative systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, 55(12): 2882 – 2885.
- [7] RAMI M A. Stability analysis and synthesis for linear positive systems with time-varying delays [M] // *Positive Systems*. Berlin: Springer-Verlag, 2009: 205 – 215.
- [8] LIU X, YU W, WANG L. Stability analysis for continuous-time positive systems with time-varying delays [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, 55(4): 1024 – 1028.
- [9] LIU X, YU W, WANG L. Stability analysis of positive systems with bounded time-varying delays [J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2009, 56(7): 600 – 604.
- [10] FEYZMAHDAVIAN H R, CHARALAMBOUS T, JOHANSSON M. Exponential stability of homogeneous positive systems of degree one with time-varying delays [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2014, 59(6): 1594 – 1599.
- [11] SONG Shijun, FENG Jun'e, MENG Min. Resilient static output feedback robust H_∞ control for controlled positive systems [J]. *Control Theory & Applications*, 2014, 31(5): 671 – 676. (宋世君, 冯俊娥, 孟敏. 受控正系统的弹性静态输出反馈鲁棒 H_∞ 控制 [J]. 控制理论与应用, 2014, 31(5): 671 – 676.)
- [12] WANG Changhong, TONG Yanhui, WANG Jian. Stabilization for discrete-time interval switched positive linear systems [J]. *Control Theory & Applications*, 2013, 30(10): 1294 – 1299. (王常虹, 通雁辉, 王舰. 离散区间线性切换正系统的镇定 [J]. 控制理论与应用, 2013, 30(10): 1294 – 1299.)
- [13] SUN Y G, WU Z R. On the existence of linear copositive Lyapunov functions for 3-dimensional switched positive linear systems [J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2013, 350(6): 1379 – 1387.

- [14] WANG D, WANG Z D, LI G Y, et al. Distributed filtering for switched nonlinear positive systems with missing measurements over sensor networks [J]. *IEEE Sensors Journal*, 2016, 16(12): 4940 – 4948.
- [15] LIAN J, LIU J, ZHUANG Y. Mean stability of positive markov jump linear systems with homogeneous and switching transition probabilities [J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2015, 62(8): 801 – 805.
- [16] ALPCAN T, BACAR T. A stability result for switched systems with multiple equilibria [J]. *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems Series A: Mathematical Analysis*, 2010, 17(4): 949-958.
- [17] GUO R, WANG Y. Region stability analysis for switched linear systems with multiple equilibria [C]//*The 29th Chinese Control Conference*. Beijing: IEEE, 2010: 986 – 991.
- [18] GUO Rongwei, WANG Yuzhen. Estimation of stability region for a class of switched linear systems with multiple equilibrium points [J]. *Control Theory & Applications*, 2012, 29(4): 409 – 414.
(郭荣伟, 王玉振. 一类多平衡点线性切换系统稳定区域的估计 [J]. 控制理论与应用, 2012, 29(4): 409 – 414.)
- [19] ZHU Liying, FANG Yingying. Stability and stabilization of two-dimensional linear time-invariant switched systems with multi-equilibria [J]. *Control and Decision*, 2015, 30(4): 599 – 604.
(朱礼营, 方盈盈. 多平衡点二维线性时不变切换系统的稳定性与镇定性 [J]. 控制与决策, 2015, 30(4): 599 – 604.)
- [20] LIU Z, WANG Y. Regional stability of positive switched linear systems with multi-equilibrium points [J]. *International Journal of Automation and Computing*, 2017, 14(2): 213 – 220.
- [21] KAMENKOV G. On stability of motion over a finite interval of time [J]. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1953, 17(2): 529 – 540.
- [22] DORATO P. Short time stability in linear time-varying systems [R]//*IIRE International Convention Record, Part 4*. New York: Polytechnic Inst of Brooklyn Ny Microwave Research Inst, 1961: 83 – 87.
- [23] AMATO F, ARIOLA M. Finite-time control of discrete-time linear system [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, 50(5): 724 – 729.
- [24] LIN X, LI S, ZOU Y. Finite-time stability of switched linear systems with subsystems which are not finite-time stable [J]. *IET Control Theory & Applications*, 2014, 8(12): 1137 – 1146.
- [25] CHEN G, YANG Y. Finite-time stability of switched positive systems [J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2014, 24(1): 179 – 190.
- [26] LI X, LIN X, LI S, ZOU Y. Finite-time stability of switched nonlinear systems with finite-time unstable subsystems [J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2015, 352(3): 1192 – 1214.

作者简介:

刘志 (1986–), 女, 博士研究生, 目前研究方向为正切换系统的稳定性分析与控制, E-mail: liuzhishfd2008@163.com;

张宪福 (1968–), 男, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为非线性系统、时滞系统以及复杂控制系统的性态分析和控制设计等, E-mail: zhangxianfu@sdu.edu.cn.

王玉振 (1963–2016), 男, 教授, 博士生导师, 研究方向为非线性控制、Hamilton控制系统理论、逻辑动态网络、复杂系统等, E-mail: yzwang@sdu.edu.cn.