

基于两步控制策略的混沌系统全局有限时间同步

林 茜^{1†}, 吴晓锋², 陈 云³

(1. 海军工程大学 电子工程学院, 湖北 武汉 430033;

2. 闽南师范大学 数学与统计学院, 福建 漳州 363000; 3. 海军工程大学 信息安全系, 湖北 武汉 430033)

摘要: 本文研究了无刷直流电机(brushless direct current motor, BLDCM)混沌系统的全局有限时间同步问题. 利用混沌吸引子的有界性, 提出了两步控制策略. 首先不施加控制, 让主-从混沌系统各自的轨迹收敛到各自的吸引子中, 并估计了吸引子的界和收敛时间; 再对收敛到吸引子的从系统施加状态误差反馈控制, 根据有限时间稳定性理论, 得出该控制器在满足一定条件时, 两个相同的混沌系统可以快速达到有限时间同步. 这种方法在主从系统的初始值相差很大的情况下可以大大减少控制成本, 并且可以估计同步时间. 文章最后用仿真结果验证了所得判据的可行性和有效性.

关键词: 混沌同步; 反馈控制器; 两步控制; 有限时间

引用格式: 林茜, 吴晓锋, 陈云. 基于两步控制策略的混沌系统全局有限时间同步. 控制理论与应用, 2018, 35(8): 1194 – 1198

中图分类号: TP273 文献标识码: A

Global finite-time synchronization of chaotic systems based on two-step control strategy

LIN Qian^{1†}, WU Xiao-feng², CHEN Yun³

(1. College of Electronic Engineering, Naval University of Engineering, Wuhan Hubei 430033, China;

2. Mathematical and Statistical School, Minnan Normal University, Zhangzhou Fujian 363000, China;

3. Department of Information Security, Naval University of Engineering, Wuhan Hubei 430033, China)

Abstract: The global finite-time synchronization of brushless direct current motor (BLDCM) systems is investigated. Firstly, based on the boundedness of the chaotic attractors, the trajectories of the master and slave system would converge to their attractors respectively and the convergence time is estimated. Then the continuous feedback controller is proposed and based on the finite-time stability theory, the condition for the fast finite-time synchronization of two identical BLDCM systems is derived and the synchronization time is well estimated. By this method, the synchronization cost can be reduced especially when the difference of the initial values of the master and slave system are large. Finally, the effectiveness of the synchronization criterion is illustrated in numerical examples.

Key words: chaos synchronization; feedback control; two-step control; finite time

Citation: LIN Qian, WU Xiaofeng, CHEN Yun. Global finite-time synchronization of chaotic systems based on two-step control strategy. *Control Theory & Applications*, 2018, 35(8): 1194 – 1198

1 引言(Introduction)

混沌同步在保密通信^[1]、激光控制^[2]、人体生命科学^[3]、生态系统^[4]、化学^[5]等领域已经展示出巨大的应用价值, 成为研究热点. 随着混沌同步的研究不断深入, 人们不再满足于只是寻找合适的同步方法使混沌系统达到同步, “混沌同步研究的趋势将是如何用简单的同步结构、较小的控制量和较短的时间来实现混沌系统的同步”^[6]. 状态误差反馈控制器结构简单, 易于实现, 有限时间同步能使同步过程在有限时间内

完成, 并有较好的鲁棒性^[7]. 因此, 采用状态误差反馈控制器的混沌系统有限时间同步获得广泛关注, 并取得一些结果^[8]. 在现有研究中, 人们发现, 当主-从系统的初始状态相距很远时, 判据中的耦合系数会非常大, 很可能达到饱和状态. 因此本文以无刷直流电机(brushless direct current motor, BLDCM)系统为例, 提出一种新的控制策略, 解决如何用比较小的控制系数使两个混沌系统达到同步的问题.

收稿日期: 2016—11—20; 录用日期: 2018—01—24.

[†]通信作者. linqian19825@163.com; Tel.: +86 27-65460822.

本文责任编辑: 陈增强.

国防科技基金项目(2101133)资助.

Supported by the National Defence Science and Technology Foundation of China (2101133).

2 同步框架(Synchronization scheme)

无刷直流电机 (brushless direct current motor, BLDCM) 系统^[9-10]可以描述为

$$\dot{x} = Ax + F(x, t), \quad (1)$$

其中: $x \in \mathbb{R}^3$,

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & a \\ 0 & -\delta & 0 \\ b & 0 & -b \end{bmatrix}, F(x, t) = \begin{bmatrix} v_q - x_2 x_3 \\ v_d + x_1 x_3 \\ \eta x_1 x_2 - T_L \end{bmatrix},$$

参数 $v_q, v_d, a, b, \delta, \eta$ 和 T_L 为正实数. 当这些参数取一些值时, 该系统展现复杂的混沌行为. 显然, $F(x, t) -$

$$F(z, t) = M(t)(x - z), \text{ 其中 } M(t) = \begin{bmatrix} 0 & -z_3 & -x_2 \\ z_3 & 0 & x_1 \\ \eta z_2 & \eta x_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

两个相同BLDCM混沌系统通过状态误差反馈控制器 $u(t)$ 可以组成如下主-从同步框架:

$$\begin{cases} \text{主系统: } \dot{x} = Ax + F(x, t), \\ \text{从系统: } \dot{z} = Az + F(z, t) + u(t), \\ \text{控制器: } u(t) = K\delta^\alpha(x - z), \end{cases} \quad (2)$$

其中: $K \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 为待定的常数耦合矩阵, $\delta^\alpha: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$,

$$\delta^\alpha(x - z) = \begin{pmatrix} |x_1 - z_1|^\alpha \text{sgn}(x_1 - z_1) \\ \vdots \\ |x_n - z_n|^\alpha \text{sgn}(x_n - z_n) \end{pmatrix},$$

$\alpha \in (0, 1)$, sgn 为符号函数.

若存在停息时间函数 T , 使得对主从系统产生混沌的初值 x_0 和 z_0 , 主从系统的轨迹 $x(t)$ 和 $z(t)$ 满足 $\lim_{t \rightarrow T(x_0, z_0)} \|x(t) - z(t)\| = 0$, 并且当 $t \geq T(x_0, z_0)$ 时, $\|x(t) - z(t)\| \equiv 0$, 则称同步框架(2)达到有限时间同步. 定义一个误差变量 $e = x - z$, 可以得到如下的动态误差系统:

$$\dot{e} = (A + M(t))e - K\delta^\alpha(x - z). \quad (3)$$

显然, 若误差系统(3)在原点是全局有限时间稳定的, 则主-从BLDCM系统达到全局有限时间同步.

引理 1 考虑如下非自治系统:

$$\dot{x} = f(t, x). \quad (4)$$

如果存在一个连续可微的 Lyapunov 函数 $V(t, x): \mathbb{R}^+ \times D \rightarrow \mathbb{R}^+$ 在原点的邻域 $\nu \in D$ 内满足: $\dot{V}(t, x) \leq -r(V(t, x))$, $\forall (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \nu$, 其中: $r: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ 是连续的, $r(0) = 0$, 并且存在某个实数 $\varepsilon > 0$ 使得 $\int_0^\varepsilon \frac{ds}{r(s)} < +\infty$, 那么系统(4)在原点是有限时间稳定的, 停息时间满足

$$T(t_0, x_0) \leq \int_0^{V(t_0, x_0)} \frac{ds}{r(s)}.$$

引理 2^[11] 对任意实数 $x_i, i = 1, \dots, n$ 和 $0 < h \leq 1$, 不等式

$$(|x_1| + \dots + |x_n|)^h \leq |x_1|^h + \dots + |x_n|^h$$

成立.

3 全局有限时间同步判据 (Synchronization scheme)

考虑到混沌运动一个显著特点是吸引子外的一切轨线最后都要进入到吸引子中, 并且吸引子是有界的. 根据这个特点, 本文提出一种两步控制策略: 当主-从系统的初始状态相距较远时, 让主-从系统先各自自由运动, 等主-从系统都运动到吸引子的界以后再对从系统施加控制, 这样就能够以较小的控制量来达到全局有限时间同步, 减少了控制成本.

这里首先估计BLDCM混沌系统吸引子的界. 关于吸引子界的估计目前有解析和仿真两种方法^[12], 这里采用解析求法.

对于同步框架(2)中的主系统, 如果存在一个正定的连续可微函数 $V_1(x)$ 和一个正常数 R 满足 $\dot{V}_1(t) < -l(V_1 - R)$, 其中 $l > 0$, $\dot{V}_1(t)$ 代表函数 $V_1(x)$ 沿着主系统的轨迹对时间 t 的导数, 定义 $\Gamma = \{x | V_1(x) \leq R\}$, 并假设 Γ 是有界的, 那么对于主系统, Γ 外的轨线最终都将进入 Γ 内并且不再离开, 即 Γ 可看成主系统的一个吸引集.

定义 $\Gamma' = \{x | V_1(x) \leq R + \varepsilon\}$, 其中 $\varepsilon > 0$ 是个小的正数, 假设主系统的轨迹从初始值 $x_0 = x(t_0)$ 到达 Γ' 边界 $V_1(x) = R + \varepsilon$ 的时间为 $T_1(x_0)$, 通过对 $\dot{V}_1(t) < -l(V_1 - R)$ 在 $(t_0, t_0 + T_1(x_0))$ 内积分, 可以得到关于 $T_1(x_0)$ 的表达式如下:

$$T_1(x_0) \begin{cases} \leq \frac{1}{l} \ln \frac{V_1(x_0) - R}{\varepsilon}, & x_0 \notin \Gamma', \\ = 0, & x_0 \in \Gamma'. \end{cases} \quad (5)$$

按照上述定义, 下面估计BLDCM混沌系统的一个吸引集.

这里选择

$$V_1(x) = (\eta + 1)x_1^2 + (x_2 - a(\eta + 1) - b)^2 + x_3^2,$$

那么 $V_1(x)$ 沿着主系统(1)的轨迹对时间 t 的导数为

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(t) = & -2(\eta + 1)x_1^2 - 2(\eta + 1)x_1x_2x_3 + \\ & 2a(\eta + 1)x_1x_3 + 2(\eta + 1)v_qx_1 + 2v_dx_2 - \\ & 2(a(\eta + 1) + b)v_d - 2\delta x_2^2 + \\ & 2(a(\eta + 1) + b)\delta x_2 + 2x_1x_2x_3 - \\ & 2(a(\eta + 1) + b)x_1x_3 - 2bx_3^2 + 2bx_1x_3 + \\ & 2\eta x_1x_2x_3 - 2T_Lx_3 = \\ & -2(\eta + 1)x_1^2 + 2(\eta + 1)v_qx_1 - 2\delta x_2^2 + \end{aligned}$$

$$2(a(\eta+1)\delta + b\delta + v_d)x_2 - 2bx_3^2 - 2T_Lx_3 - 2(a(\eta+1) + b)v_d,$$

因此有

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(t) + l(V_1 - R(l)) = & \\ & -(\eta+1)(2-l)x_1^2 + 2(\eta+1)v_qx_1 + \\ & 2((a(\eta+1) + b)(\delta-l) + v_d)x_2 - \\ & (2b-l)x_3^2 - 2(a(\eta+1) + b)v_d + \\ & l(a(\eta+1) + b)^2 - 2T_Lx_3 - \\ & lR(l) - (2\delta-l)x_2^2. \end{aligned} \quad (6)$$

令

$$\begin{cases} A(l) = \frac{v_q}{2-l}, \\ B(l) = \frac{v_d + (a(\eta+1) + b)(\delta-l)}{2\delta-l}, \\ C(l) = \frac{T_L}{2b-l}, \\ R(l) = \frac{(\eta+1)v_q^2}{l(2-l)} + \\ \frac{(v_d + (a(\eta+1) + b)(\delta-l))^2}{l(2\delta-l)} + \frac{T_L^2}{l(2b-l)} + \\ \frac{2(a(\eta+1) + b)v_d + (a(\eta+1) + b)^2}{l}, \end{cases} \quad (7)$$

那么, 当 $0 < l < \min\{2, 2\delta, 2b\}$ 时, 由式(6)可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(t) + l(V_1 - R(l)) = & \\ & -(\eta+1)(2-l)(x_1 - A(l))^2 - (2\delta-l) \cdot \\ & (x_2 - B(l))^2 - (2b-l)(x_3 + C(l))^2 \leq 0, \end{aligned}$$

即主系统存在吸引集

$$\Gamma' = \{x | (\eta+1)x_1^2 + (x_2 - a(\eta+1) - b)^2 + x_3^2 \leq R(l) + \varepsilon\}, \quad \varepsilon > 0. \quad (8)$$

令 $r = \sqrt{R(l) + \varepsilon}$, 那么由式(8)可知, 经过时间 $T_1(x_0)$ ($T_1(x_0)$ 如式(5)所定义)后,

$$\begin{cases} \sqrt{\eta+1}|x_1| \leq r, \\ |x_2 - a(\eta+1) - b| \leq r, \\ |x_3| \leq r. \end{cases} \quad (9)$$

同理, 经过时间 $T_1(z_0)$, 从系统也进入吸引集 Γ' , 那么经过时间

$$T_1 = \max(T_1(x_0), T_1(z_0)) \quad (10)$$

后, 主-从系统都进入吸引集 Γ' , 因此

$$\begin{aligned} \|e(t)\|_{t \geq T_1} \in \Gamma_e = & \\ \{(e_1, e_2, e_3) | (\eta+1)e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 \leq (2r)^2\}. & \end{aligned} \quad (11)$$

定理 1 假设经过时间 T_1 后, 主从BLDCM系统都进入混沌吸引子, 对从系统施加同步框架(2)中的状态误差反馈控制器 $u(t)$, 其中 $K = \text{diag}\{k, k, \dots, k\}$, 那么同步框架(2)达到全局有限时间同步的条件为: 存在实数 $m > 0$, 使得对于任何 $t \geq 0$,

$$k \geq \frac{1}{2}(m + \lambda'(2r)^{1-\alpha}), \quad (12)$$

其中:

$$r = \sqrt{R(l) + \varepsilon}, \quad \varepsilon > 0,$$

$$R(l) =$$

$$\frac{(\eta+1)v_q^2}{l(2-l)} + \frac{(v_d + (a(\eta+1) + b)(\delta-l))^2}{l(2\delta-l)} + \frac{T_L^2}{l(2b-l)} - \frac{2(a(\eta+1) + b)v_d}{l} + (a(\eta+1) + b)^2,$$

并且 $0 < l \leq \min\{2, 2\delta, 2b\}$, λ'_m 是矩阵

$$Y = \begin{pmatrix} -2 & \frac{1}{\sqrt{\eta+1}}\eta r & \frac{1}{\sqrt{\eta+1}}r \\ \frac{1}{\sqrt{\eta+1}}\eta r & -2\delta & \sqrt{\eta+1}r \\ \frac{1}{\sqrt{\eta+1}}r & \sqrt{\eta+1}r & -2b \end{pmatrix}$$

的最大特征值, $\lambda' = \max\{0, \lambda'_m\}$, 并且同步时间函数 T 满足

$$T = T_1 + T_2, \quad (13)$$

其中 $T_1 = \max(T_1(x_0), T_1(z_0))$, $T_1(x_0), T_1(z_0)$, 可由式(5)进行估计;

$$T_2 \leq \frac{2}{m(1-\alpha)}(2r)^{1-\alpha}. \quad (14)$$

证 选择如下Lyapunov函数:

$$V(e) = e^T P e, \quad P = \text{diag}\{\eta+1, 1, 1\},$$

那么 $V(e)$ 沿着误差系统(3)的轨迹对时间 t 的导数为

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) = & \dot{e}^T P e + e^T P \dot{e} = \\ & e^T [(A + M(t))^T P + P(A + M(t))]e - \\ & 2e^T P K \delta(x - z), \end{aligned}$$

那么经过时间 T_1 后, 由式(9)可得

$$\begin{aligned} e^T [(A(t) + M(t))^T P + P(A(t) + M(t))]e = & \\ -2(\eta+1)e_1^2 - 2\delta e_2^2 - 2be_3^2 - 2\eta x_3 e_1 e_2 + & \\ 2(a(\eta+1) + b - x_2)e_1 e_3 + 2(\eta+1)x_1 e_2 e_3 \leq & \\ -2(\eta+1)e_1^2 - 2\delta e_2^2 - 2be_3^2 + 2\eta|x_3||e_1 e_2| + & \\ 2|a(\eta+1) + b - x_2||e_1 e_3| + 2(\eta+1)|x_1||e_2 e_3| \leq & \\ -2(\eta+1)e_1^2 - 2\delta e_2^2 - 2be_3^2 + 2\eta r|e_1 e_2| + & \\ 2r|e_1 e_3| + 2\sqrt{\eta+1}r|e_2 e_3| \leq \lambda'_m e^T P e, & \end{aligned}$$

其中 λ'_m 是矩阵 Y 的最大特征值。

根据引理2, 有

$$\begin{aligned} & -2e^T PK \delta^\alpha(e) = \\ & -2k(\eta+1)|e_1|^{1+\alpha} - 2k|e_2|^{1+\alpha} - 2k|e_3|^{1+\alpha} = \\ & -2(\eta+1)^{\frac{1-\alpha}{2}} k((\eta+1)e_1^2)^{\frac{1+\alpha}{2}} - \\ & 2k(e_2^2)^{\frac{1+\alpha}{2}} - 2k(e_3^2)^{\frac{1+\alpha}{2}} \leq \\ & -2k(((\eta+1)e_1^2)^{\frac{1+\alpha}{2}} + (e_2^2)^{\frac{1+\alpha}{2}} + (e_3^2)^{\frac{1+\alpha}{2}}) = \\ & -2kV(e)^{\frac{1+\alpha}{2}}, \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) & \leq \lambda' V(e) - 2kV(e)^{\frac{1+\alpha}{2}} = \\ & - (2k - \lambda'(V(e))^{\frac{1-\alpha}{2}})(V(e))^{\frac{1+\alpha}{2}}, \end{aligned}$$

其中 $\lambda' = \max\{0, \lambda'_m\}$.

显然, 如果

$$k \geq \frac{1}{2}(m + \lambda'(V(e))^{\frac{1-\alpha}{2}}) \quad (15)$$

成立, 那么 $\dot{V} < -m(V(e))^{\frac{1+\alpha}{2}}$.

令函数 $r(z) = mz^{\frac{1+\alpha}{2}}$, $z \in \mathbb{Z} = \{V(e) : e \in E\}$ 那么 $\dot{V}(e) < -r(V(e))$. 选择一个正数 $\xi \in \mathbb{Z}$, 可以得到

到 $\int_0^\xi \frac{dz}{r(z)} = \frac{2}{m(1-\alpha)} \xi^{\frac{1-\alpha}{2}} < +\infty$, 由引理1可知,

误差系统(3)在原点是一致有限时间稳定的, 即主-从同步框架达到有限时间同步, 并且同步时间函数 T_2 满足

$$\begin{aligned} T_2 & \leq \int_0^{V(e_0)} \frac{dz}{r(z)} = \frac{2}{m(1-\alpha)} (e_0^T P e_0)^{\frac{1-\alpha}{2}} \leq \\ & \frac{2}{m(1-\alpha)} (2r)^{1-\alpha}. \end{aligned}$$

经过时间 T_1 后, $V(e) \leq (2r)^2$, 因此只要条件(12)成立, 式(15)成立. 证毕.

从证明过程可以看出, 控制器的耦合系数 k 与函数 $V(e)$ 的大小成正比, 当主从系统的初始值相差较大时, 理论上要求控制系数也很大, 有时候会达到饱和, 难以得到全局有限时间同步判据. 而如果让主从混沌系统都进入吸引子后再施加反馈控制器, 如定理1所描述, 可以用较小的控制输入达到全局有限时间同步, 减小了控制成本.

4 应用与仿真(Application and simulation)

为了验证上述代数判据, 选取BLDCM混沌系统的参数为

$$v_q = 0.168, v_d = 20.66, a = 36, b = 3.8,$$

$$\delta = 0.875, \eta = 0.01, T_L = 0.53.$$

主-从系统的初始值分别取为

$$(x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = (40, 20, -25),$$

$$(z_1(0), z_2(0), z_3(0)) = (0, -20, 15),$$

主-从系统的轨迹如图1-4所示. 由式(7)经过数值解可以得到, 当 $l = 0.88$ 时, $R(l)$ 有最小值 273.9, 取 $\varepsilon = 1$, 那么 $r = \sqrt{R(l) + \varepsilon} = 16.5$, $\lambda'_m = 18.9$. 取 $\alpha = 0.9$, $m = 1$, 由判据(12)可得 $k \geq 13.9$, 由式(5)和式(10)可得, 主从系统进入吸引子的时间估计 $T_1 = 9.2$ s, 经过 $T_1 = 9.2$ s 后对从系统施加同步框架(2)中描述的控制器, 选取耦合系数 $k = 13.9$, 主-从系统的同步过程如图5所示, 同步时间估计为 $T = T_1 + T_2 \leq 37.17$.

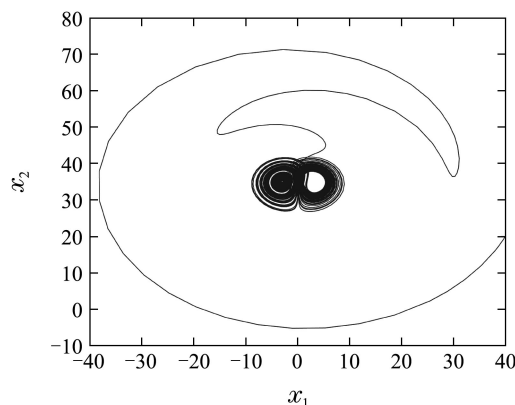


图1 BLDCM主系统 x_1-x_2

Fig. 1 The master BLDCM system x_1-x_2

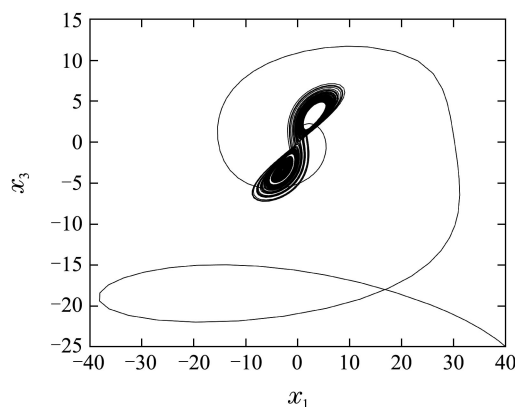


图2 BLDCM主系统 x_1-x_3

Fig. 2 The master BLDCM system x_1-x_3

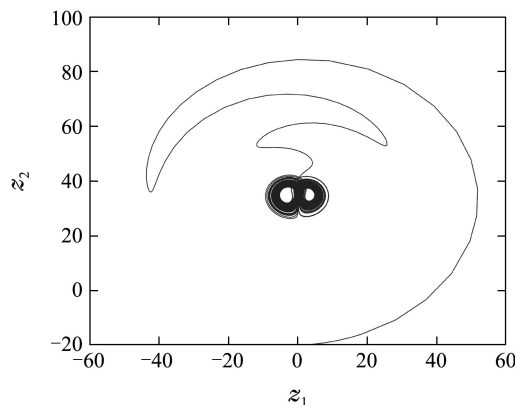


图3 BLDCM从系统 z_1-z_2

Fig. 3 The slave BLDCM system z_1-z_2

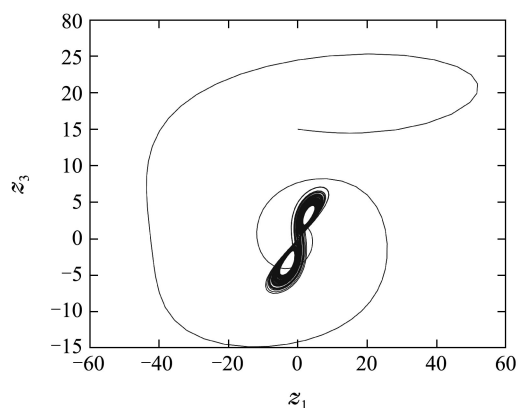
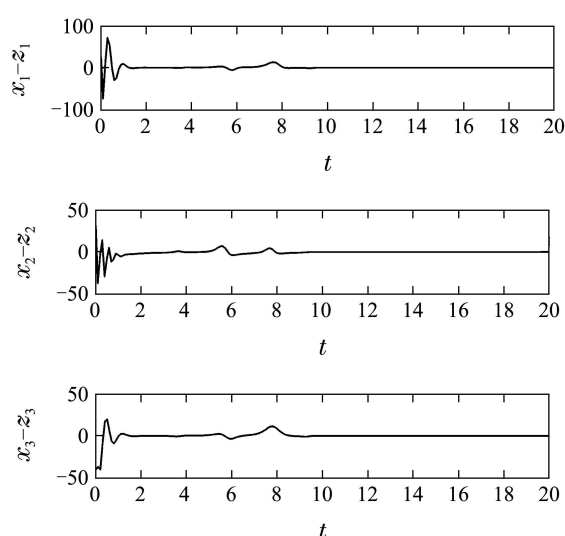
图4 BLDCM从系统 z_1-z_3 Fig. 4 The slave BLDCM system z_1-z_3 

图5 BLDCM系统的有限时间同步

Fig. 5 The finite synchronization of the BLDCM systems

5 结论(Conclusions)

本文提出的基于两步控制策略全局有限时间同步判据适用于主-从系统的初始状态相距较远的情形, 可以用较小的控制输入, 使混沌系统在状态误差反馈控制下达到全局有限时间同步, 减小了控制成本. 如果主-从系统的初始状态相距较近, 可以直接施加控制. 另外, 本文提出的两步控制策略不仅适用于BLDCM系统, 可以推广到任意主-从系统的初始值能使主-从系统都产生混沌, 也就是主-从系统都能进入吸引集的情形.

参考文献(References):

- [1] PANG S Q, FENG Y, LIU Y J. Finite-time synchronization of chaotic systems with different dimension and secure communication [J]. *Mathematical Problems in Engineering*, 2016. Article ID: 7693547.
- [2] SUGAWARA T, TACHIKAWA M, TSUDAMOTO T, et al. Observation of synchronization in laser chaos [J]. *Physical Review Letters*, 1994, 72(22): 3502 – 3505.
- [3] SCHÄFER C, ROSENBLUM M G, ABEL H H, et al. Synchronization in the human cardiorespiratory system [J]. *Physical Review E*, 1999, 60(1): 857 – 870.
- [4] BLASIUS B, HUPPERT A, STONE L. Complex dynamics and phase synchronization in spatially extended ecological systems [J]. *Nature*, 1999, 399(6734): 354 – 359.
- [5] LI Y, CHEN L, CAI Z S, et al. Study on chaos synchronization in the belousov-zhabotinsky chemical system [J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2003, 17(4): 699 – 707.
- [6] GAO Tiegang, CHEN Zengqiang, YUAN Zhuzhi. Robust finite time synchronization of chaotic systems [J]. *Acta Physica Sinica*, 2005, 54(6): 2574 – 2579.
(高铁杠, 陈增强, 袁著祉. 基于鲁棒有限时控制的混沌系统的同步 [J]. *物理学报*, 2005, 54(6): 2574 – 2579.)
- [7] MOULAY E, ERRUQUETTI W. Finite-time stability and stabilization: State of art [J]. *Lecture Note in Control and Information Science*, 2006, 334: 23 – 41.
- [8] VINCENT U E, GUO R K. Finite-time synchronization for a class of chaotic and hyperchaotic systems via adaptive feedback controller [J]. *Physics Letters A*, 2011, 375(24): 2322 – 2326.
- [9] GE Z M, LIN G H. The complete, lag and anticipated synchronization of a BLDCM chaotic system [J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2007, 34(3): 740 – 764.
- [10] CHEN Y, CHENG Y G, XU J. Finite-time synchronization for the brushless DC motor systems under the variable substitution and sinusoidal feedback control [C] // *Conference on Computational Complexity*. Shanghai, China: Shanghai Systems Science Press, 2013: 424 – 428.
- [11] HUANG X Q, LIN W, YANG B. Finite-time stabilization in the large for uncertain nonlinear systems [C] // *Proceedings of the American Control Conference*. Piscataway, USA: Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc, 2004: 1073 – 1078.
- [12] LI D M, LU J N, WU X Q, et al. Estimating the bounds for the Lorenz family of chaotic systems [J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2005, 23(2): 529 – 534.

作者简介:

林茜 (1982–), 女, 博士, 讲师, 目前研究方向为混沌同步、保密通信, E-mail: linqian19825@163.com;

吴晓锋 (1963–), 博士, 教授, 目前研究方向为混沌同步、多智能体协同控制, E-mail: mathwxf@sina.com;

陈云 (1978–), 男, 博士, 讲师, 目前研究方向为混沌同步、保密通信, E-mail: mathyun@sina.com.