

博弈控制论简述

程代展[†], 付世华

(山东大学 控制科学与工程学院, 山东 济南 250061;

中国科学院 数学与系统科学研究院 系统科学研究所, 北京 100190)

摘要: 博弈控制论是近年来出现的博弈与控制的交叉学科, 虽然它融合了博弈和控制双方的工具和方法, 但无论从研究对象, 研究方法与现有的结论看, 它都不完全从属于经典博弈或经典控制的范畴, 因此, 是一个具有自身特色的新学术生长点. 本文的目的是对这个新方向做一个简述介绍, 内容包括: i) 基于博弈的控制; ii) 基于势博弈的优化; iii) 博弈中的状态空间方法; iv) 国内几个研究博弈控制论的团队. 最后, 对博弈控制论的未来做一展望.

关键词: 博弈控制论; 多目标优化; 势函数; 纳什均衡; 信息物理系统

引用格式: 程代展, 付世华. 博弈控制论简述. 控制理论与应用, 2018, 35(5): 588 – 592

中图分类号: O231.2 **文献标识码:** A

A survey on game theoretical control

CHENG Dai-zhan[†], FU Shi-hua

(School of Control Science and Engineering, Shandong University, Jinan Shandong 250061, China;

Institute of Systems Science, Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Science, Beijing 100190, China)

Abstract: The game theoretic control is a newly merged cross discipline of game theory and control theory. It combines the tools and methods from both game theory and control theory. One sees from the object, research method and the known results that the game theoretic control belongs neither classical game theory nor classical control theory. Hence, it is a new academic growing point with significant characteristics. The purpose of this paper is to give a survey on this new research direction. The content of this paper contains i) game-based control; ii) potential game based system optimization; iii) state space approach to evolutionary game; iv) some domestic research groups on game theoretic control. Finally, some predictions on game theoretic control are presented.

Key words: game theoretic control; multi-object optimization; potential function; Nash equilibrium; cyber-physical system

Citation: CHENG Daizhan, FU Shihua. A survey on game theoretical control. *Control Theory & Applications*, 2018, 35(5): 588 – 592

1 引言(Introduction)

在人类文明的历史长河中, 博弈和控制的思想与应用无论在国际上还是在中国都源远流长. 但真正用近代科学的方法研究它们, 从而形成当代的两门重要学科分支, 则都大体始于二战之后. 冯·诺依曼等的《博弈论与经济行为》^[1]及维纳的《控制论, 或动物与机器的控制与通讯》^[2]被分别视为近代博弈论与控制论诞生的标志.

实际上, 博弈论和控制论就像一对孪生兄弟, 它们有很多共同之处. 最大的共同点在于, 它们的目的是要操纵或优化自己的目标. 而最大的不同点是: 控

制论的对象一般是“机器”, 或者说非智能化的系统; 而博弈论的对象是“人”, 或者说智能化的对手. 由于历史的原因, 博弈论与控制论在各自的轨道上发展了大半个世纪, 各自形成了较为完善的理论体系和行之有效的优化实现策略. 然而, 近年来, 由于高科技的发展和研究对象的复杂化, 在复杂系统中出现了你中有我、我中有你的情况. 例如, 控制系统中的多目标优化, 混合动力机车, 清洁能源的应用等等. 博弈论方法或者将单一优化目标作为势函数, 或者将多目标作为不同控制的支付函数, 然后将控制当玩家, 通过寻求纳什均衡发现最优解或均衡解, 这些都使控制带上了

收稿日期: 2016–12–15; 录用日期: 2017–03–02.

[†]程代展. E-mail: dcheng@iss.ac.cn; Tel.: +86 531-88392202.

本文责任编辑: 梅生伟.

国家自然科学基金项目(61273013, 61333001)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (61273013, 61333001).

博弈的特性; 另一方面, 无论是经济系统或生物系统, 在应用博弈论方法建模后, 都呼唤更强有力的控制手段去达到理想的效益. 正是在这样的背景下, 出现了博弈与控制的交叉学科—博弈控制论.

从控制论的角度看, 卡尔曼引进状态空间方法, 对现代控制理论是一个重大突破. 因此, 状态空间方法也被认为是现代控制理论的一个基石. 然而, 事物总是一分为二的. 此后的现代控制理论成了状态空间下的控制理论. 现在通常把这种控制理论认为是经典控制理论. 但其实它所涵盖的系统, 较维纳当初描述的带有信息交流和更广泛意义下的控制系统而言, 是有局限性的. 代数状态空间的一些明显缺陷在于: 某些系统难于用现有状态空间描述. 例如, 状态与控制无法界定, 像在博弈论中, 其中每个玩家都可视为状态、又可视为控制. 又如大量存在的网络系统, 参与者会不断加入或退出, 这种形式的动态系统, 难以用固定的状态空间表达. 此外, 复杂系统与外界的信息交换等, 也难以用经典的状态空间方法刻画.

作为控制与博弈的交叉学科, 博弈控制论讨论的主要对象是跨学科的问题. 大致可以分为两类: 博弈问题的控制论方法和控制问题的博弈论方法. 目前的一些热点问题包括:

- 1) (网络)演化博弈的状态空间方法^[3-4];
- 2) 稳定演化策略的分析、收敛性及李雅普诺夫函数方法^[5-6];
- 3) 多目标优化的纳什均衡解^[7-9];
- 4) 基于势函数的优化理论^[10-12];
- 5) 多智能体的个体策略寻优与整体涌现^[13-16];
- 6) 非合作博弈在整体调控下合作的出现^[17-19];
- 7) 工程控制中的博弈论方法^[20-24]等.

博弈控制论不能视为“基于博弈的控制”, 基于博弈的控制不妨理解为将博弈论的思想方法应用于经典控制系统的控制设计中. 这当然是博弈控制论的一个重要组成部分, 但这不应该是全部. 博弈控制论所面对的系统应当包含更广泛的一类系统, 而控制也未必能表述成在动力学方程中的一些特殊变量(u). 代替它的, 是一种被称为策略(strategy)或行动(action)的东西, 而控制则显然也是一种策略. 它通过选择策略来达到系统优化或其他设计目标.

本文的目的是对博弈控制论所讨论的问题, 方法及其一些初步结论和进展, 包括笔者团队的工作, 做一个初浅的介绍. 由于这一交叉学科尚处于初创阶段, 许多概念、方法尚不成熟, 兼之笔者学识浅薄, 难免管窥蠡测、挂一漏万.

文章分6个部分: 除引言外, 第2节介绍基于博弈的控制, 第3节讨论基于势博弈的优化, 第4节讨论博弈中的状态空间方法, 第5节介绍国内几个研究博弈

控制论的团队, 最后一节是展望.

2 基于博弈的控制(Game based control)

多目标优化问题是一个典型的基于博弈的控制问题. 考察一个线性系统

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (1)$$

控制的目的是优化 $\min_u J$, 这里

$$J = \int_0^\infty [x^T Q x + u^T R u] dt. \quad (2)$$

这是标准二次性能指标的优化问题, 最优解为

$$u^* = -R^{-1} B^T P x, \quad (3)$$

这里 $P \geq 0$ 满足代数黎卡提方程:

$$PA + A^T P = Q - PBR^{-1}B^T P = 0, \quad (4)$$

这是标准控制问题. 现在考虑多目标控制, 设系统为

$$\dot{x} = Ax + B_1 u_1 + B_2 u_2, \quad (5)$$

这里 u_i 的目标是优化 $J_i, i = 1, 2$,

$$\min_{u_i} J_i := \min_{u_i} \int_0^\infty [x^T Q_i x + u^T R_i u] dt, \quad i = 1, 2. \quad (6)$$

这时, 控制问题就转化为博弈问题^[25-26]. 其纳什均衡解为

$$\begin{cases} u_1^* = -R_1^{-1} B_1^T P_1 x, \\ u_2^* = -R_2^{-1} B_2^T P_2 x. \end{cases} \quad (7)$$

这里 $P_i > 0, i = 1, 2$, 满足耦合的代数黎卡提方程:

$$\begin{cases} P_1(A - B_2 R_2^{-1} B_2^T P_2) + (A - B_2 R_2^{-1} B_2^T P_2)^T P_1 + \\ Q_1 - P_1 B_1 R_1^{-1} B_1^T P_1 = 0, \\ P_2(A - B_1 R_1^{-1} B_1^T P_1) + (A - B_1 R_1^{-1} B_1^T P_1)^T P_2 + \\ Q_2 - P_2 B_2 R_2^{-1} B_2^T P_2 = 0. \end{cases} \quad (8)$$

当动态系统变为非线性系统时, 问题可转化为微分博弈^[7]. 但微分博弈求解困难, 实用性较差. 新近的工作多是将其转化为耦合的Hamilton-Jacobi-Bellman方程求解均衡点^[8-9].

这种方法可以用于更典型的多目标优化. 这时, 每个控制并没有自己明确的优化目标, 控制数目与优化目标数也不必一样. 但这种情况通过一定的转化, 可以变为上述形式. 从而用纳什均衡作为多目标优化的均衡解.

3 基于势博弈的优化(Potential game based optimization)

一个有限博弈可表示为 $G = \{N, S, C\}$, 这里 $N = \{1, \dots, n\}$ 为玩家集合; $S = \prod_{i=1}^n S_i$ 为局势, 其中 $S_i = \{1, \dots, k_i\}$ 为玩家 i 的策略(行为); $C = (c_1, \dots, c_n)$,

这里 $c_i: S \rightarrow \mathbb{R}$ 为玩家 i 的支付函数. G 称为一个势博弈, 如果存在一个势函数 $P: S \rightarrow \mathbb{R}$, 使对每个玩家 $i \in N$, 每个 $s^{-i} \in S^{-i}$ 和 $\forall \alpha, \beta \in S_i$ 均有^[27]

$$\begin{aligned} c_i(\alpha, s^{-i}) - c_i(\beta, s^{-i}) = \\ P(\alpha, s^{-i}) - P(\beta, s^{-i}), \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (9)$$

这里 $S^{-i} = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times \dots \times S_n$. 检验一个有限博弈是否为势博弈曾经是个讨论多年的问题. 最近, 文献[28]通过引入势方程给出了简洁回答.

势函数的极值点就是博弈的纳什均衡点. 因此, 势函数对博弈问题的作用就类似李雅普诺夫函数对动力系统分析的作用. 因此, 基于势函数的优化成为一个有效的方法. 文献[10]给出一个博弈控制论的框架结构如图1.

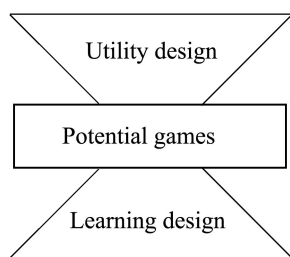


图1 博弈控制论^[10]

Fig. 1 Game theoretic approach^[10]

文献[10]所提出的基本思想是: 设计支付函数, 使系统的优化目标成为势函数, 进而确定算法, 使系统达到势函数的极值点. 文献[11]是这种方法应用的一个典型例子, 这种典型的博弈控制问题与经典控制论不同, 它将状态和控制融为一体, 突破了经典控制论的状态空间方法.

4 博弈的状态空间方法(State space approach to evolutionary game)

有限博弈的演化本质上是一个逻辑动态系统的问题, 矩阵半张量积可以将逻辑动态系统转化为基于状态空间的代数表达形式^[29], 因此, 通过基于半张量积的代数状态空间表示, 控制论中的代数状态空间方法可推广到逻辑系统的演化过程中去.

网络演化博弈是一种重要的群体演化博弈, 在生物学和经济行为中均有大量实际背景. 一个网络演化博弈, 记作 $((N, E), G, \Pi)$, 由3部分组成:

- i) 一个网络图 (N, E) , 它刻画了玩家间的拓扑关系;
- ii) 一个二人博弈 G , 如果 $(i, j) \in E$, 那么, 玩家 i 和玩家 j 就进行基本博弈 G ;
- iii) 一个基于邻域信息的策略更新规则 Π .

文献 [3–4] 等将控制论中的代数状态空间方法引

入网络演化博弈的建模、分析与控制.

状态空间方法对演化博弈的动态特性及稳定性分析提供了强有力的工具^[5].

逻辑系统的代数状态空间方法的基本原理是将逻辑关系式代数化. 例如, 经典逻辑变量可取两个值: 1和0, 1表示“真”, 0表示“假”. 本文用向量代替1, 0: $1 \sim (1, 0)^T$, $0 \sim (0, 1)^T$. 然后, 利用矩阵半张量积, 逻辑关系就可代数表达式表示: 例如, 合取 $x \wedge y$, 就可以表示成

$$x \wedge y = M_c xy,$$

这里

$$M_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

称为合取的结构矩阵. 利用向量形式, 一个逻辑演化(控制)系统用代数形式可表示为

$$x(t+1) = Mx(t), \quad (x(t+1) = Mu(t)x(t)). \quad (10)$$

有限博弈本质上是一个多值逻辑系统. 例如, “石头–剪刀–布”是一个三值逻辑系统, 本文可以分别用 $(1, 0, 0)^T$, $(0, 1, 0)^T$, $(0, 0, 1)^T$ 表示这3种策略. 于是, 一个演化(控制)博弈也可以用式(10)来描述. 这就是演化博弈的代数状态空间方法.

博弈的向量空间结构与不同类型博弈的子空间分解为博弈的状态空间方法提供了恰当的几何结构^[30–31].

5 博弈与工程控制(Game with engineering control)

直接将博弈论方法应用于具体工程或其他实际系统的研究中, 这类工作相当多, 可谓八仙过海各显神通. 从方法论上看, 比较集中的有: 势博弈方法、合作博弈方法(基于Shapley值的分配)、学习博弈等. 研究的问题包括: 电力系统与混合电网控制^[12, 20]、无线网络控制^[21]、混杂系统控制^[22]、道路涌塞控制^[23]等.

特别值得强调的是, 多智能体的控制问题是目前控制界讨论的一个热点课题, 而博弈论方法在这方面的应用也很多. 例如, 移动个体(传感器等)的区域复盖^[13]、多智能体的趋同^[14]、多个体分布式优化^[15]、多智能体由学习博弈导致的合作^[32]等.

另外, 势博弈在信息通讯方面的应用^[33], 使博弈控制论方法可望成为信息物理系统研究的一个新的有效工具.

这种百花齐放之势, 一方面说明博弈控制论的广泛适应的特性, 另一方面, 也反映了这个交叉学科领域尚待条理化, 一个更高层次的综合或成熟理论尚未形成.

6 中国学者的工作(Work of Chinese scholars)

国内控制界对博弈与控制交叉领域的研究也开展得较早, 有不少创新性的工作. 例如, 中国科学院数学与系统科学研究院郭雷团队, 他们的工作包括: 人机博弈的优化算法^[34]、理性玩家导致的合作^[17]、非合作博弈的能控性^[18-19]等. 他们的工作引发了一系列后续研究, 包括笔者的工作.

北京大学王龙团队, 他们的工作包括: 博弈中合作的稳定性和涌现^[16]、网络博弈中合作的演化^[35]、种群的演化动力学^[36]等. 他们的工作为研究网络化动力系统的演化和控制提供了重要的理论基础与实用技术.

清华大学梅生伟团队, 他们成功地将博弈论应用于电力系统控制, 特别是在带有新能源的混杂电力系统控制^[20]、船舶上的电力系统控制^[37]等. 他们的工作很多, 形成了一个较完整的体系. 这些工作包括在《工程博弈论基础及电力系统应用》一书中^[24].

7 展望(Expectation)

博弈控制论是博弈论与控制论的一个交叉领域, 它既吸收了博弈的竞争-合作理念与策略, 又使用并发展了控制论的工具与方法, 使之成为一个可以应对和处置一类更广泛的复杂系统的有效工具.

这个新生的交叉学科目前发展很快, 它不仅催生了大量理论课题的探索, 而且有广泛的工程应用和应用前景, 显示了巨大的生命力. 但同时, 它尚未形成一个完善的学科体系, 可望在未来的一段时间它会在大量深入研究的基础上和广泛应用的推动下, 逐渐发展形成一个统一完善的学术体系.

某些传统的学科领域, 可能因为它而得到新的生命力. 例如, 微分对策, 它由于计算复杂而难以在工程实践中得到应用. 博弈控制论的方法通过决策与控制的相互融合, 可望会为微分对策的工程实现提供有效的工具.

信息物理系统是控制论的一个前沿方向. 有人认为信息物理系统就是混杂系统(Hybrid systems are now called cyber-physical systems^[38]), 尽管有些偏颇, 但可看出, 信息物理系统的理论核心仍然是逻辑与动力学系统的结合. 从前面讨论可知, 博弈论主要解决逻辑决策问题, 而控制论主要解决动力系统问题. 因此, 博弈控制论的工具和方法可望成为探索信息物理系统的一条可行途径.

基于矩阵半张量积的逻辑动态系统的代数状态空间方法是近期发展起来的处理逻辑系统, 包括有限博弈的有效工具^[29, 39]. 它可望在博弈控制论及其工程设计应用中发挥重大作用.

参考文献(References):

- [1] VON N, MORGENSTERN O. *Theory of Games and Economic Behavior* [M]. New Jersey: Princeton University Press, 1944.
- [2] WIENE N. *Cybernetics, or Control and Communication in the Animal and the Machine* [M]. Paris: Hermann & Camb, 1948.
- [3] CHENG D, HE F, QI H, et al. Modeling, analysis and control of networked evolutionary games [J]. *IEEE Transactions on automatic Control*, 2015, 60(9): 2402 – 2415.
- [4] GUO P, WANG Y, LI H. Algebraic formulation and strategy optimization for a class of evolutionary networked games via semi-tensor product method [J]. *Automatica*, 2013, 49(11): 3384 – 3389.
- [5] CHENG D, XU T, QI H. Evolutionarily stable strategy of networked evolutionary games [J]. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2014, 25(7): 1335 – 1345.
- [6] WANG Y, CHENG D. Stability and stabilization of a class of finite evolutionary games [J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2017, 354(3): 1603 – 1617.
- [7] FRIEDMAN A. *Differential Games* [M]. Rhode Island: American Math Society, 1974.
- [8] LUKOYANOV N. A Hamilton-Jacobi type equation in control problems with hereditary information [J]. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2000, 64(2): 243 – 253.
- [9] LEWIS F, VRABIE D, SYRMOS V. *Optimal Control* [M]. New Jersey: John Wiley & Sons, 2012.
- [10] GOPALAKRISHNAN R, MARDEN J, WIERMAN A. An architectural view of game theoretic control [J]. *ACM Sigmetrics Performance Evaluation Review*, 2011, 38(3): 31 – 36.
- [11] LIU T, WANG J, CHENG D. Game theoretic control of multi-agent systems [J]. *arXiv preprint*, 2016, arXiv: 1608.00192.
- [12] HEIKKINEN T. A potential game approach to distributed power control and scheduling [J]. *Computer Networks*, 2006, 50(13): 2295 – 2311.
- [13] YAZICIOGLU A, EGERSTEDT M, SHAMMA J. A game theoretic approach to distributed coverage of graphs by heterogeneous mobile agents [J]. *IFAC Proceedings Volumes*, 2013, 46(27): 309 – 315.
- [14] MARDEN J, ARSLAN G, SHAMMA J. Cooperative control and potential games [J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, 2009, 39(6): 1393 – 1407.
- [15] BASAR T, OLSDER G J. *Dynamic Noncooperative Game Theory* [M]. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1998.
- [16] LI A, WU B, WANG L. Cooperation with both synergistic and local interactions can be worse than each alone [J]. *Scientific Reports*, 2014, 4(5536): 1 – 6.
- [17] MU Y, GUO L. How cooperation arises from rational players [J]. *Science China Information Sciences*, 2013, 56(11): 1 – 9.
- [18] ZHANG R, GUO L. Controllability of non-cooperative dynamical games [C] // *The 34th Chinese Control Conference (CCC)*. Hangzhou: IEEE, 2015: 353 – 358.
- [19] ZHANG R, GUO L. Controllability of Nash equilibrium [C] // *The 35th Chinese Control Conference (CCC)*. Chengdu: IEEE, 2016: 323 – 328.
- [20] MEI S, WANG Y, LIU F, et al. Game approaches for hybrid power system planning [J]. *IEEE Transactions on Sustainable Energy*, 2012, 3(3): 506 – 517.
- [21] TEMBINE H, ALTMAN E, EL-AZOUZI R, et al. Evolutionary games in wireless networks [J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, 2010, 40(3): 634 – 646.
- [22] TOMLIN C, LYGEROS J, SASTRY S. A game theoretic approach to controller design for hybrid systems [J]. *Proceedings of the IEEE*, 2000, 88(7): 949 – 970.

- [23] WANG X, XIAO N, WONGPIROMSARN T, et al. Distributed consensus in noncooperative congestion games: an application to road pricing [C] // *The 10th IEEE International Conference on Control and Automation (ICCA)*. Hangzhou: IEEE, 2013: 1668 – 1673.
- [24] MEI Shengwei, LIU Feng, WEI wei. *Engineering Game Theory and its Application to Power Systems* [M]. Beijing: Science Press, 2016. (梅生伟, 刘锋, 魏韡. 工程博弈论基础及电力系统应用[M]. 北京: 科学出版社, 2016.)
- [25] ENGWERDA J. Computational aspects of the open-loop Nash equilibrium in linear quadratic games [J]. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 1998, 22(8): 1487 – 1506.
- [26] LI Y, GUO L. Towards a theory of stochastic adaptive differential games [C] // *The 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference*. Orlando, Florida: IEEE, 2011: 5041 – 5046.
- [27] MONDERER D, SHAPLEY L. Potential games [J]. *Games and Economic Behavior*, 1996, 14(1): 124 – 143.
- [28] CHENG D. On finite potential games [J]. *Automatica*, 2014, 50(7): 1793 – 1801.
- [29] CHENG D, QI H, LI Z. *Analysis and Control of Boolean Networks: A Semi-tensor Product Approach* [M]. London: Springer, 2011.
- [30] CANDOGAN O, MENACHE I, OZDAGLAR A, et al. Flows and decompositions of games: Harmonic and potential games [J]. *Mathematics of Operations Research*, 2011, 3(36): 474 – 503.
- [31] CHENG D, LIU T, ZHANG K, et al. On decomposed subspaces of finite games [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2016, 61(11): 3651 – 3656.
- [32] ABOUHEAF M, LEWIS F, VAMVOUDAKIS K, et al. Multi-agent discrete-time graphical games and reinforcement learning solutions [J]. *Automatica*, 2014, 50(12): 3038 – 3053.
- [33] LA Q, CHEW Y, SOONG B. *Potential Game Theory – Application in Radio Resource Allocation* [M]. Switzerland: Springer, 2016.
- [34] MU Y, GUO L. Towards a theory of game-based non-equilibrium control systems [J]. *Journal of Systems Science and Complexity*, 2012, 25(2): 209 – 226.
- [35] WU B, ZHOU D, FU F, et al. Evolution of cooperation on stochastic dynamical networks [J]. *PLoS One*, 2010, 5(6): e11187.
- [36] LI A, BROOM M, DU J, et al. Evolutionary dynamics of general group interactions in structured populations [J]. *Physical Review E*, 2016, 93(2): 022407.
- [37] WANG Guanqun, ZHANG Xuemin, LIU Feng, et al. Game theory model and algorithm of reconfiguration for shipboard power system [J]. *Proceedings of the CSEE*, 2012, 32(13): 69 – 76. (王冠群, 张雪敏, 刘锋, 等. 船舶电力系统重构的博弈算法 [J]. 中国电机工程学报, 2012, 32(13): 69 – 76.)
- [38] TABUADA P. *Verification and Control of Hybrid Systems: A Symbolic Approach* [M]. New York: Springer, 2009.
- [39] CHENG D, QI H, ZHAO Y. *An Introduction to Semi-tensor Product of Matrices and Its Applications* [M]. Singapore: World Scientific, 2012.

作者简介:

程代展 (1946–), 男, 研究员, 目前研究方向为非线性控制、逻辑动态系统、博弈论等, E-mail: dcheng@iss.ac.cn;

付世华 (1986–), 女, 目前研究方向为逻辑动态系统、网络演化博弈等, E-mail: fush_shanda@163.com.