有界扰动多变量Hammerstein系统输入到状态稳定模型预测控制

何德峰†, 余世明

(浙江工业大学 信息工程学院, 浙江 杭州 310023)

摘要: 考虑具有状态和控制约束的有界未知扰动多变量Hammerstein系统, 提出一种具有输入到状态稳定和有限L_2增益性能的鲁棒非线性模型预测控制策略. 基于多变量线性子系统H_∞控制律, 滚动预测非线性代数方程的解算误差, 继而在线优化计算满足系统约束条件的预测控制量. 利用输入到状态稳定性概念和L_2增益思想, 建立闭环系统关于该扰动信号具有鲁棒稳定性和L_2增益的充分条件, 使闭环系统不仅满足系统约束, 而且对不确定扰动输入和解算误差具有鲁棒性. 最后以工业聚丙烯多牌号切换过程控制为例, 仿真验证本文算法的有效性.

关键词: Hammerstein模型; 模型预测控制; 约束控制; 输入到状态稳定性; L_2增益

引用格式: 何德峰, 余世明. 有界扰动多变量Hammerstein系统输入到状态稳定模型预测控制. 控制理论与应用, 2019, 36(4): 605 – 612

DOI: 10.7641/CTA.2018.70012

Input-to-state stabilizing model predictive control of multi-variables Hammerstein systems with bounded disturbances

HE De-feng†, YU Shi-ming

(College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou Zhejiang 310023, China)

Abstract: A robust nonlinear model predictive control strategy, with guaranteed input-to-state stability and finite L_2-gain, is proposed for multi-variable Hammerstein systems subject to unknown but bounded disturbances and constraints on the state and control. Based on H_∞ control laws of the multi-variable linear subsystem of the Hammerstein model, the solution errors of the nonlinear algebra equation are predicted over a receding horizon. Then the predictive control actions are computed by online optimization. Using the concepts of input-to-state stability and L_2-gain, some sufficient conditions are established to guarantee the robust stability and L_2-gain properties of the closed-loop system with respect to the disturbance signal. This implies that the closed-loop system not only satisfies the constraints but also has robustness with respect to the disturbance input and the solution errors. Finally, the example of industrial polypropylene multi-grade transition control is used to illustrate the effectiveness of the strategy presented here.

Key words: Hammerstein models; model predictive control; constrained control; input-to-state stability; L_2-gain

Citation: HE Defeng, YU Shiming. Input-to-state stabilizing model predictive control of multi-variables Hammerstein systems with bounded disturbances. *Control Theory & Applications*, 2019, 36(4): 605 – 612

1 引言

Hammerstein模型是一类由静态非线性输入函数和动态线性模型串联组成的非线性系统. 该模型结构简单, 但能充分刻画pH中和、空气分离、聚烯烃牌号切换等工业过程的非线性特性[1–4]. 因此, 针对Hammerstein系统的非线性模型预测控制(nonlinear model predictive control, NMPC)算法得到了较多研究[3–16], 总体上分为整体策略和两步策略. 整体策略直接使用非线性函数和线性模型描述模型预测控制(model predictive control, MPC)最优控制问题, 并直接优化控制变量, 具有统一处理系统输入与状态约束的优点, 但为建立名义闭环系统的稳定性, 需要计算“三要素”等稳定性约束条件[5–6], 增加了NMPC在线求解的计算量. 两步策略[7–14]则根据模型的串级结构, 先设计线性子系统的控制输入(即Hammerstein系统的中间量MPC), 再求解非线性代数方程与解饱和运算

收稿日期: 2017−01−06; 录用日期: 2018−07−02.

†通信作者. E-mail: hdfzj@zjut.edu.cn; Tel.: +86 571-85290372.

本文责任编委: 席裕庚.

国家自然科学基金项目(61773345), 浙江省自然科学基金项目(LR17F030004)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (61773345) and the National Natural Science Foundation of Zhejiang Province (LR17F030004).

计算实际控制量, 具有计算量小且实现方便的优点. 进一步, 文献[16]考虑解算误差和实际控制输入加权对系统性能的影响, 提出了一种改进的两步策略, 并结合解算误差建立名义闭环系统的稳定性充分条件.

实际系统普遍存在不确定扰动, 而MPC是基于有限时域目标函数的控制策略, 当系统同时存在约束和扰动时, 其可行性和稳定性可能丢失[17], 恶化闭环系统的控制性能. 输入到状态稳定性(input-to-state stability, ISS)理论[18]为一类持续扰动不确定非线性系统的稳定性分析提供有效工具, 近年已用于NMPC的鲁棒性研究. 例如, 文献[19]引入区域ISS概念, 分析约束不确定系统NMPC的吸引域; 文献[20]使用双模策略建立NMPC的ISS充分条件; 而文献[21]结合H_∞控制方法建立NMPC的ISS和有限L_2增益的充分条件; 等. 尽管上述结果原理上也适用于Hammerstein系统鲁棒NMPC整体策略设计, 但由于该系统两步法NMPC不采用终端罚函数和终端约束, 因此不能用于不确定多变量Hammerstein系统鲁棒NMPC两步策略研究.

在文献[16]的成果基础上, 本文应用ISS理论研究输入时变的多变量约束不确定Hammerstein系统鲁棒NMPC策略. 采用两步法设计鲁棒NMPC策略, 首先建立线性子系统的H_∞控制策略, 再通过对非线性代数方程解算误差做多步预测, 进而在线滚动优化关于线性子系统H_∞控制律的跟踪性能, 计算满足系统实际控制和状态约束的鲁棒预测控制律. 进一步, 利用ISS理论和L_2增益概念, 建立保证闭环系统鲁棒渐近稳定和有限L_2增益的解算误差的上界. 因此, 本文策略不仅可以处理系统各种约束而且对解算误差具有鲁棒性能. 最后, 以聚丙烯多牌号切换过程控制[16,24]为例, 验证本文结果的有效性和实用性.

2 问题描述

考虑离散时间不确定多变量Hammerstein系统状态空间模型:

$$\begin{cases} x_{t+1} = Ax_t + B_1 v_t + B_2 w_t, \\ v_t = g(u_t), \\ z_t = Hx_t,\ t = 0, 1, \cdots, N, \end{cases} \tag{1}$$

其中: $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$和$w \in \mathbb{R}^p$分别是系统的状态向量、控制输入和不确定扰动输入; $v \in \mathbb{R}^r$和$z \in \mathbb{R}^l$分别是系统的中间变量和辅助输出向量; A, B_1, B_2和H为已知的恰当维数矩阵; g是连续可微的非线性函数向量, 描述系统输入和中间变量之间的静态非线性环节, 满足$g(0) = 0$. 假设原点为系统的平衡点, 且本文仅限于状态反馈控制器设计.

定义系统的状态和控制输入约束如下:

$$x_t \in C_{\rm x},\ u_t \in C_{\rm u},\ t = 0, 1, 2, \cdots, N, \tag{2}$$

其中$C_{\rm x} \subset \mathbb{R}^n$和$C_{\rm u} \subset \mathbb{R}^m$分别是包含原点为内点的紧凸集. 为保证存在满足约束(2)的控制输入量, 考虑系统中间变量约束[11]

$$v_t \in C_{\rm v},\ t = 0, 1, 2, \cdots, N, \tag{3}$$

其中$C_{\rm v} \subset \mathbb{R}^r$是包含原点为内点的紧凸集. 进一步, 考虑不确定扰动输入w, 满足

$$w_t \in W(x_t, u_t),\ t = 0, 1, 2, \cdots, N, \tag{4}$$

其中扰动集W是关于有界持续扰动信号的集合.

本文目标是针对有界持续扰动输入(4), 设计多变量约束Hammerstein系统的鲁棒预测控制器, 使对应闭环系统相对于该扰动输入满足输入到状态稳定和有限L_2增益稳定.

定义 1 给定有限常数$\gamma > 0$和鲁棒不变紧集$S \subseteq \mathbb{R}^n$, 其中S内含原点. 如果存在一个有限项$\xi(x_0)$, 对任意初始条件$x_0 \in \mathbb{R}^n$, 满足$\xi(0) = 0$和不等式条件

$$\sum_{t=0}^{N} \|z_t\|^2 \leqslant \gamma^2 \sum_{t=0}^{N} \|w_t\|^2 + \xi(x_0), \quad \forall x_0 \in S,\ N \geqslant 0, \tag{5}$$

其中$w_t \in W(t = 0, 1, \cdots, N)$, 则称不确定系统(1)和(4)在集$S$上具有有限$L_2$增益[18].

定义 2 考虑不确定非线性系统$x_{t+1} = f(x_t, w_t)$, 如果存在K_∞类函数γ和KL类函数β, 使得对任意输入$w_t \in W$和初始条件$x_0 \in \mathbb{R}^n$, 在任意时刻t系统的解$x_t = x(t; x_0, \boldsymbol{w})$存在, 且满足如下不等式:

$$\|x(t; x_0, \boldsymbol{w})\| \leqslant \gamma(\|\boldsymbol{w}\|) + \beta(\|x_0\|, t), \tag{6}$$

其中$\boldsymbol{w} = \{w_0, \cdots, w_{t-1}\}$, 则称该系统具有输入到状态稳定性(ISS)[18].

引理 1 不确定非线性系统$x_{t+1} = f(x_t, w_t)$是输入到状态稳定的, 系指存在一个连续的正定函数$V(x)$满足

$$\begin{cases} \alpha_1(\|x\|) \leqslant V(x) \leqslant \alpha_2(\|x\|), \\ V(f(x, w)) - V(x) \leqslant -\alpha_3(\|x\|) + \delta(\|w\|), \end{cases} \tag{7}$$

其中: $\forall x \in \mathbb{R}^n, w \in \mathbb{R}^p$, 函数$\alpha_1$, α_2和α_3为K_∞类函数, δ为K类函数, 并称$V(x)$为系统的ISS–Lyapunov函数[18].

3 鲁棒NMPC策略

设不确定线性子系统$x_{t+1} = Ax_t + B_1 v_t + B_2 w_t$的一个鲁棒控制律为$v_t^{\rm rb} = Kx_t$, 定义时刻$t$非线性代数方程解算误差

$$\Delta v_t = g(u_t) - v_t^{\rm rb},\ \ t = 0, 1, \cdots, N. \tag{8}$$

令$x_{t+i|t}$, $u_{t+i|t}$和$v_{t+i|t}$别为系统(1)在时刻t对时刻$t+i$的状态、输入和解算误差的预测变量, 则

$$\Delta v_{t+i|t} = g(u_{t+i|t}) - Kx_{t+i|t} =$$

$$-KA^i x_{t|t} - \sum_{j=0}^{i-1} KA^{i-j-1} B_1 g(u_{t+j|t}) +$$

$$g(u_{t+i|t}) - \sum_{j=0}^{i-1} KA^{i-j-1} B_2 w_{t+j|t}, \tag{9}$$

其中: $\forall i = 0, 1, \cdots, N-1$, $N > 0$为预测时域. 将等式组(9)简写为

$$\Delta v_t^N = G x_{t|t} + H_1 g(u_t^N) + H_2 w_t^N, \tag{10}$$

其中:

$$\Delta v_t^N = \begin{bmatrix} \Delta v_{t|t} \\ \Delta v_{t+1|t} \\ \vdots \\ \Delta v_{t+N-1|t} \end{bmatrix},\ u_t^N = \begin{bmatrix} u_{t|t} \\ u_{t+1|t} \\ \vdots \\ u_{t+N-1|t} \end{bmatrix},$$

$$w_t^N = \begin{bmatrix} w_{t|t} \\ w_{t+1|t} \\ \vdots \\ w_{t+N-1|t} \end{bmatrix},\ G = \begin{bmatrix} -K \\ -KA \\ \vdots \\ -KA^{N-1} \end{bmatrix},$$

$$H_1 = \begin{bmatrix} I & 0 & \cdots & 0 \\ -KB_1 & I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -KA^{N-2}B_1 & \cdots & -KB_1 & I \end{bmatrix},$$

$$g(u_t^N) = \begin{bmatrix} g(u_{t|t}) \\ g(u_{t+1|t}) \\ \vdots \\ g(u_{t+N-1|t}) \end{bmatrix},$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -KB_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -KA^{N-2}B_2 & \cdots & -KB_2 & 0 \end{bmatrix}.$$

由于扰动w不可测量, 对约束不确定系统(1)–(4), 采用名义解算误差模型$\Delta v_t^N = G x_{t|t} + H_1 g(u_t^N)$定义$N$步滚动优化目标函数.

$$J_N(x_{t|t}) = \sum_{i=0}^{N-1} [\|\Delta v_{t+i|t}\|^2 + \|u_{t+i|t}\|_R^2] =$$

$$x_{t|t}^{\mathrm{T}} G^{\mathrm{T}} G x_{t|t} + 2 x_{t|t}^{\mathrm{T}} G^{\mathrm{T}} H_1 g(u_t^N) +$$

$$g(u_t^N)^{\mathrm{T}} H_1^{\mathrm{T}} H_1 g(u_t^N) + (u_t^N)^{\mathrm{T}} R u_t^N, \tag{11}$$

其中$R > 0$为控制输入加权矩阵, 则在时刻t定义有限时域最优控制问题

$$\begin{cases} \min\limits_{u_t^N} J_N(x_{t|t}), \\ \text{s.t.}\ \ x_{t+i|t} \in C_{\mathrm{x}},\ i = 0, 1, \cdots, N, \\ \quad\ \ u_{t+i|t} \in C_{\mathrm{u}},\ i = 0, 1, \cdots, N-1, \\ \quad\ \ g(u_{t+i|t}) \in C_{\mathrm{v}},\ i = 0, 1, \cdots, N-1, \\ \quad\ \ x_{t|t} = x_t. \end{cases} \tag{12}$$

应用非线性数值规划算法或随机搜索优化算法求解优化问题(12), 得最优控制序列$u_t^{N*}(x_t)$. 但MPC采用滚动优化与前景控制策略, 即在时刻t施加控制量$u_t = u_{t|t}^*(x_t)$, 在时刻$t+1$重复求解优化问题(12), 得到$u_{t+1} = u_{t+1|t+1}^*(x_{t+1})$.

注 1　为了保证反馈控制律v_t^{rb}是不确定线性子系统$x_{t+1} = Ax_t + B_1 v_t + B_2 w_t$的鲁棒控制律, 令$v_t^{\mathrm{rb}}$为该线性系统的一个$\mathrm{H}_\infty$控制律[21].

$$v_t^{\mathrm{rb}} = -B_1^{\mathrm{T}} P [I + (B_1 B_1^{\mathrm{T}} - B_2 B_2^{\mathrm{T}}) P]^{-1} A x_t, \tag{13}$$

其中对称正定矩阵P满足Riccati不等式组

$$\begin{cases} A^{\mathrm{T}} P [I + (B_1 B_1^{\mathrm{T}} - B_2 B_2^{\mathrm{T}}) P]^{-1} A + H^{\mathrm{T}} H - P < 0, \\ B_2^{\mathrm{T}} P B_2 - I < 0, \end{cases} \tag{14}$$

且矩阵$A + B_1 K + B_2 K_2$稳定, 其中:

$$K = -B_1^{\mathrm{T}} P [I + (B_1 B_1^{\mathrm{T}} - B_2 B_2^{\mathrm{T}}) P]^{-1} A,$$

$$K_2 = B_2^{\mathrm{T}} P [I + (B_1 B_1^{\mathrm{T}} - B_2 B_2^{\mathrm{T}}) P]^{-1} A.$$

显然, Hammerstein系统MPC律与不确定线性子系统$x_{t+1} = Ax_t + B_1 v_t + B_2 w_t$的鲁棒控制律密切相关. 为此, 令$\mathrm{H}_\infty$控制律(13)为Hammerstein系统线性子系统的鲁棒控制律, 并据此定义Hammerstein系统MPC律为

$$u_t^{\mathrm{mpc}} = u_{t|t}^*(x_t),\ v_t^{\mathrm{mpc}} = g(u_t^{\mathrm{mpc}}(x_t)),$$

则对应闭环系统为

$$x_{t+1} = Ax_t + B_1 v_t^{\mathrm{mpc}} + B_2 w_t =$$

$$(A + B_1 K) x_t + B_1 \Delta v_t + B_2 w_t. \tag{15}$$

注 2　最优控制问题(12)采用名义解算误差模型定义, 此时得到的预测控制律u_t^{mpc}及其闭环系统(15)在扰动作用下不一定满足系统约束(2)–(3). 对此, 可采用微分对策(Differential game)原理或紧缩(tightening)状态约束集[22], 修改定义最优控制问题(12), 保证该优化问题存在时间迭代优化可行性, 即预测控制律u_t^{mpc}在任意时刻总是存在. 为描述清晰, 本文假设最优控制问题(12)在任意时刻都是优化可行的, 进而分析闭环系统(15)关于不确定扰动(4)的输入到状态稳定性和有限L_2增益性能.

定理 1　考虑闭环系统(15), 如果存在一个鲁棒不变集$S \subseteq \mathbb{R}^n$, 对任意状态$x \in S$, 解算误差Δv满足不等式

$$\Delta v^{\mathrm{T}} (I + B_1^{\mathrm{T}} P B_1) \Delta v \leqslant g^{\mathrm{T}}(u^{\mathrm{mpc}}(x)) g(u^{\mathrm{mpc}}(x)), \tag{16}$$

则该系统在集S上关于不确定扰动(4)具有输入到状态稳定性和有限L_2增益性能.

证 考虑线性子系统$x_{t+1} = Ax_t + B_1v_t + B_2w_t$的鲁棒控制律(13), 定义如下集合:

$$S_{\rm x} = \{x \in \mathbb{R}^n : v^{\rm rb} = Kx \in C_{\rm v},\ \forall x \in C_{\rm x}\}.$$

由于约束集$C_{\rm x}$和$C_{\rm v}$是包含原点的紧凸集, 且$v^{\rm rb}$是x的连续函数, 故集$S_{\rm x}$总是存在且非空. 考虑Riccati不等式组(14)的一个正定矩阵解P, 定义正定函数$V(x) = x^{\rm T}Px$及其一个水平集$S = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) \leqslant r\} \subseteq S_{\rm x}$, 则存在$r > 0$使集$S$存在且非空.

定义线性子系统的一个Hamiltonian函数

$$Z(x,v,w) = V(x^+) - V(x) + \|z\|^2 - \|w\|^2, \quad (17)$$

其中$x^+ = Ax + B_1v + B_2w$. 令$\tilde{A} = A + B_1K + B_2K_2$. 由$\rm H_\infty$控制理论[23]可知, 线性子系统$x_{t+1} = Ax_t + B_1v_t + B_2w_t$存在鞍点$(v^*, w^*) = (Kx, K_2x)$[22], 其中, 增益$K$和$K_2$见注1所示. 将$v^*$和$w^*$代入函数(17), 整理得

$$\begin{aligned}
&Z(x,v^*,w^*) = \\
&(\tilde{A}x + B_1\Delta v)^{\rm T}P(\tilde{A}x + B_1\Delta v) - \\
&x^{\rm T}Px + x^{\rm T}H^{\rm T}Hx - w^{*\rm T}w^* = \\
&(\tilde{A}x + B_1\Delta v)^{\rm T}P(\tilde{A}x + B_1\Delta v) - x^{\rm T}Px + \\
&x^{\rm T}H^{\rm T}Hx + v^{*\rm T}v^* - w^{*\rm T}w^* - v^{*\rm T}v^* = \\
&x^{\rm T}\tilde{A}P\tilde{A}x + 2(\tilde{A}x)^{\rm T}PB_1\Delta v + \\
&(B_1\Delta v)^{\rm T}PB_1\Delta v - v^{*\rm T}v^* + \\
&x^{\rm T}(H^{\rm T}H - P + K^{\rm T}K - K_2^{\rm T}K_2)x = \\
&x^{\rm T}\Pi x + 2(\tilde{A}x)^{\rm T}PB_1\Delta v + \\
&(B_1\Delta v)^{\rm T}PB_1\Delta v - v^{*\rm T}v^*,
\end{aligned} \quad (18)$$

其中矩阵

$$\mathit{\Pi} = \tilde{A}P\tilde{A} + H^{\rm T}H - P + K^{\rm T}K - K_2^{\rm T}K_2.$$

令$\Theta = [I + (B_1B_1^{\rm T} - B_2B_2^{\rm T})P]^{-1}$, 则$K = B_1^{\rm T}P\Theta A$和$K_2 = B_2^{\rm T}P\Theta A$. 将$K$和$K_2$代入$\mathit{\Pi}$, 则由文献[21]和不等式(14)可得, $\mathit{\Pi} = H^{\rm T}H - P + A^{\rm T}P\Theta A < 0$. 令$\varepsilon$为一充分小的正数, 满足$\mathit{\Pi} \leqslant -\varepsilon I$, 则代入式(18)可得

$$\begin{aligned}
&Z(x,v^*,w^*) \leqslant \\
&-\varepsilon x^{\rm T}x + 2(\tilde{A}x)^{\rm T}PB_1\Delta v + \\
&(B_1\Delta v)^{\rm T}PB_1\Delta v - v^{*\rm T}v^* \leqslant \\
&-\varepsilon x^{\rm T}x + 2(\Theta Ax)^{\rm T}PB_1\Delta v + \\
&(B_1\Delta v)^{\rm T}PB_1\Delta v - v^{*\rm T}v^* = \\
&-\varepsilon x^{\rm T}x + 2(B_1^{\rm T}P\Theta Ax)^{\rm T}\Delta v + \\
&(B_1\Delta v)^{\rm T}PB_1\Delta v - v^{*\rm T}v^* = \\
&-\varepsilon x^{\rm T}x - 2v^{*\rm T}\Delta v + \\
&(B_1\Delta v)^{\rm T}PB_1\Delta v - v^{*\rm T}v^* = \\
&-\varepsilon x^{\rm T}x - 2(v^{\rm mpc}(x) - \Delta v)^{\rm T}\Delta v + (B_1\Delta v)^{\rm T} \\
&PB_1\Delta v - (v^{\rm mpc}(x) - \Delta v)^{\rm T}(v^{\rm mpc}(x) - \Delta v) = \\
&-\varepsilon x^{\rm T}x + \Delta v^{\rm T}\Delta v - v^{\rm mpc}(x)^{\rm T}v^{\rm mpc}(x) + \\
&(B_1\Delta v)^{\rm T}PB_1\Delta v = \\
&-\varepsilon x^{\rm T}x + \Delta v^{\rm T}(I + B_1^{\rm T}PB_1)\Delta v - \\
&v^{\rm mpc}(x)^{\rm T}v^{\rm mpc}(x).
\end{aligned} \quad (19)$$

将不等式(16)代入式(19), 得$Z(x,v^*,w^*) \leqslant -\varepsilon x^{\rm T}x$对任意$x \in S$成立.

将Hamiltonian函数在鞍点(v^*,w^*)做一阶泰勒阶数展开, 得

$$\begin{aligned}
&Z(x,v,w) = Z(x,v^*,w^*) + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} v - v^* \\ w - w^* \end{bmatrix}^{\rm T} \times \\
&\qquad (R(x) + O(\left\|\begin{matrix} v - v^* \\ w - w^* \end{matrix}\right\|))\begin{bmatrix} v - v^* \\ w - w^* \end{bmatrix},
\end{aligned} \quad (20)$$

其中$O(\|s\|)$表示$\|s\|$的高阶无穷小量,

$$R(x) = \begin{bmatrix} R_{11}(x) & R_{12}(x) \\ R_{21}(x) & R_{22}(x) \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}
&R_{11}(x) = \\
&(B_1\frac{\partial Z(x,v,w)}{\partial v})^{\rm T}P(B_1\frac{\partial Z(x,v,w)}{\partial v}) + I_{\rm m}, \\
&R_{12}(x) = R_{21}^{\rm T}(x) = (B_1\frac{\partial Z(x,v,w)}{\partial v})^{\rm T}PB_2, \\
&R_{22}(x) = B_2^{\rm T}PB_2 - \gamma^2I_{\rm p},
\end{aligned}$$

则结合式(14)可得, 对任意状态$x \in S$, 函数(17)满足

$$\begin{aligned}
&Z(x,u^*,w) = \\
&Z(x,u^*,w^*) + \frac{1}{2}(w - w^*)^{\rm T} \times \\
&(R_{22}(x) + O(\|w - w^*\|))(w - w^*) \leqslant \\
&-\varepsilon^2x^{\rm T}x.
\end{aligned} \quad (21)$$

结合不等式(21), 沿闭环系统(15)的轨迹对$V(x)$作差分运算, 得

$$\begin{aligned}
&V(x^+|_{u=u^{\rm mpc}}) - V(x) \leqslant \\
&\|w\|^2 - \|z\|^2 - \varepsilon x^{\rm T}x = \\
&\|w\|^2 - x^{\rm T}(\varepsilon I + H^{\rm T}H)x.
\end{aligned} \quad (22)$$

令$\delta(\|w\|) = \|w\|^2$和$\alpha_3(\|x\|) = x^{\rm T}(\varepsilon I + H^{\rm T}H)x$, 则$\delta$和$\alpha_2$为$K_\infty$类函数, 且

$$V(x^+|_{u=u^{\rm mpc}}) - V(x) \leqslant -\alpha_2(\|x\|) + \alpha_1(\|w\|). \quad (23)$$

进一步, 函数$V(x)$是x的正定函数, 存在K_∞类函数α_1和α_2满足$\alpha_1(\|x\|) \leqslant V(x) \leqslant \alpha_2(\|x\|)$, 则根据引理1

可得, 闭环系统(15)在集S上对扰动输入(4)具有ISS.

为证明闭环系统(15)在集S上对扰动输入(4)具有有限L_2增益, 考虑任意时间区间$[0,N]$, 其中$N>0$. 对任意初始状态$x_0\in S$, 在上述区间对不等式(22)进行累加, 得

$$\sum_{i=0}^{N}[V(x_i^+)-V(x_i)]\leqslant\sum_{i=0}^{N}[\|w_i\|^2-\|z_i\|^2],\quad(24)$$

即

$$V(x_N)-V(x_0)\leqslant\sum_{i=0}^{N}[\|w_i\|^2-\|z_i\|^2],\quad(25)$$

从而有

$$\sum_{i=0}^{N}||z_i||^2\leqslant V(x_0)+\sum_{i=0}^{N}\|w_i\|^2-V(x_N)\leqslant V(x_0)+\sum_{i=0}^{N}\|w_i\|^2.\quad(26)$$

根据定义1可知, 闭环系统(15)在集S上对扰动输入(4)具有有限L_2增益.　　证毕.

注 3　定理1表明, 可以通过判断每个时刻的解算误差条件(16), 建立有界扰动多变量闭环Hammerstein系统的鲁棒稳定性, 从而不再使用整体法策略的终端约束条件[5–6]. 尽管条件(16)与文献[16]定理1中条件在形式上具有相似性, 但文献[16]中的条件是基于名义线性子系统的二次型最优控制律设计得到, 对于不确定扰动作用, 通常不能保证闭环线性子系统的鲁棒渐近稳定性[21]. 尽管如此, 结合条件(16)和文献[16]定理1中条件, 本文对多变量约束Hammerstein系统在无扰动和有扰动作用下MPC闭环稳定性分析给出了一种形式统一的充分条件.

推论 1　考虑闭环系统(15), 如果存在一个鲁棒不变集$S\subseteq\mathbb{R}^n$, 对任意状态$x\in S$, 解算误差Δv满足不等式

$$\Delta v^{\mathrm{T}}\Delta v\leqslant\frac{g^{\mathrm{T}}(u^{\mathrm{mpc}}(x))g(u^{\mathrm{mpc}}(x))}{\lambda_{\max}(I+B_1^{\mathrm{T}}PB_1)},\quad(27)$$

其中$\lambda_{\max}(M)$表示矩阵M的最大特征值, 则该系统在集S上关于不确定扰动(4)具有输入到状态稳定性和有限L_2增益性能.

证　条件(27)是不等式(16)成立的充分条件, 则结合上述定理结论得到该推论.　　证毕.

下面给出约束Hammerstein系统NMPC算法的实施步骤.

步骤 1　初始化设计参数$(H;R;N)$;

步骤 2　离线求解Riccati不等式组(14), 并计算鲁棒控制律(13);

步骤 3　读入时刻t的状态测量值x_t, 应用数值优化算法或进化算法求解优化问题(12). 当时刻t解算误差满足条件(16)时, 得当前时刻的最优控制序列u_t^{N*}, 并将首个控制量$u_{t|t}^*$作用于系统(1);

步骤 4　令$t=t+1$, 转步骤 3.

注 4　在Hammerstein系统现有的两步法NMPC策略中[7–14], MPC控制律是在第1步针对线性子系统的虚拟输入即中间变量设计, 需要通过解饱和代数运算得到实际控制输入, 此时无法考虑非线性代数方程解算误差对系统约束和性能的影响; 而本文MPC控制律是在第2步直接对实际控制输入计算, 显式地考虑了该解算误差对系统满足约束和控制性能的要求. 其次, 稳定性条件(16)或(27)与预测时域N无关, 从而在保证闭环系统稳定的条件下, 调整预测时域以减小优化问题(12)的在线计算量. 最后, 由于本文算法直接对控制输入设计, 可以处理更一般的系统约束, 因此可以在优化过程中直接对实际控制输入做加权处理, 以利于系统安全生产.

4　聚丙烯多牌号切换控制

考虑环管反应器聚丙烯牌号切换过程, 对比现有Hammerstein系统两步法鲁棒MPC策略[13], 验证本文算法的有效性. 为书写简便, 将两步法鲁棒MPC策略[13]简记为con–RMPC, 而用new–RMPC表示本文策略.

假设环管反应器为连续搅拌反应器, 则聚丙烯质量连续时间状态空间模型为[16,24]

$$\begin{cases}\dot{x}_1=-\dfrac{1}{\tau}x_1+\dfrac{1}{\tau}g_1(u),\\ \dot{x}_2=-\dfrac{1}{\tau}x_2+\dfrac{1}{\tau}g_2(u),\end{cases}\quad(28)$$

其中: 状态向量$x=[x_1\ \ x_2]^{\mathrm{T}}=[\lg MI_{\mathrm{c}}\ \ Et_{\mathrm{c}}]^{\mathrm{T}}$, 中间变量$v=[g_1(u)\ \ g_2(u)]^{\mathrm{T}}$, 控制输入$u=[T\ \ C_{\mathrm{H2}}/C_{\mathrm{m}}\ \ C_{\mathrm{m2}}/C_{\mathrm{m}}]^{\mathrm{T}}$, 非线性函数$g_1(u)=\lg MI_i$和$g_2(u)=Et_i$分别为

$$\begin{cases}g_1(u)=k_1+\dfrac{k_2}{T}+k_3\lg[k_4+k_5\dfrac{C_{\mathrm{H_2}}}{C_{\mathrm{m}}}+k_6\dfrac{C_{\mathrm{m2}}}{C_{\mathrm{m}}}],\\ g_2(u)=\dfrac{2r_2\dfrac{C_{\mathrm{m2}}}{C_{\mathrm{m}}}+2}{3r_1\dfrac{C_{\mathrm{m}}}{C_{\mathrm{m2}}}+r_2\dfrac{C_{\mathrm{m2}}}{C_{\mathrm{m}}}+4}.\end{cases}\quad(29)$$

在式(28)–(30)中, 常数τ表示丙烯在反应器内的平均停留时间($\tau=2h$), MI_{c}和Et_{c}表示聚合物的累积熔融指数和累积乙烯含量, MI_i和Et_i表示聚合物的瞬时熔融指数和瞬时乙烯含量; T, C_{H2}, C_{m}和C_{m2}分别为反应温度、氢气浓度、丙烯浓度和乙烯浓度; 模型参数k_i和$r_j(i=1,\cdots,6;j=1,2)$通常随生产牌号变化, 可用工业数据辨识计算[3,24].

在工业生产中, 累积熔融指数和累积乙烯含量通过离线化验或利用软测量技术获得[24], 通常存在不确定测量误差. 设聚丙烯累积质量参数的测量误差为±10%, 并令其测量误差为系统(28)的不确定扰动输入$w=[w_1\ \ w_2]^{\mathrm{T}}$, 其 中$w_1=\omega_1\lg MI_{\mathrm{c}}$和$w_2=\omega_2Et_{\mathrm{c}}$

及$-0.1 \leqslant \omega_1, \omega_2 \leqslant 0.1$, 即实际累积熔融指数和累积乙烯含量动态变化过程状态方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\dfrac{1}{\tau}(1+\omega_1)x_1 + \dfrac{1}{\tau}v_1 =: -\dfrac{1}{\tau}x_1 + \dfrac{1}{\tau}v_1 - \dfrac{1}{\tau}w_1, \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{1}{\tau}(1+\omega_2)x_2 + \dfrac{1}{\tau}v_2 =: -\dfrac{1}{\tau}x_2 + \dfrac{1}{\tau}v_2 - \dfrac{1}{\tau}w_2, \end{cases} \tag{30}$$

其中v_1和v_2由式(28)给定. 进一步, 令控制周期$T_s = 0.5$ h, 则聚丙烯牌号切换过程质量不确定离散时间状态空间模型为

$$\begin{cases} A = \begin{bmatrix} 1-\dfrac{T_s}{\tau} & 0 \\ 0 & 1-\dfrac{T_s}{\tau} \end{bmatrix},\ B_1 = -B_2 = \begin{bmatrix} \dfrac{T_s}{\tau} & 0 \\ 0 & \dfrac{T_s}{\tau} \end{bmatrix}, \\ v_{1,t} = g_1(u_t),\ v_{2,t} = g_2(u_t). \end{cases} \tag{31}$$

选择聚丙烯均聚牌号A, B和无规共聚牌号C及切换顺序A→B→C, 并假设生产装置在第10小时由A→B切换, 在第30小时由B→C切换. 采用双层控制结构作为切换控制组态[3], 即牌号切换控制器作为上层控制器, 聚丙烯装置回路控制器作为底层控制器, 其中牌号切换控制器的控制量将作为回路控制器的设定值, 实现聚丙烯多牌号切换生产过程的控制. 注意, 底层控制通常采用PID控制器直接控制聚丙烯生产过程的回路, 在本文策略中并不考虑聚丙烯生产过程回路的底层控制器设计, 故在该仿真中假设聚丙烯生产过程的底层控制器具有理想化的控制效果. 此外, 均聚牌号A和B生产工艺不含乙烯输入量, 即$C_{\mathrm{m2}}/C_{\mathrm{m}}$对应的控制输入始终为零. 进一步, 3种牌号规格及切换过程约束可见表1, 其中上标c, i和Δ分别表示累积量、瞬时量和增量约束. 此外, 不确定扰动系数ω_1和ω_2分别为$[-0.1, 0.1]$的随机数.

在仿真中, 现有两步法鲁棒NMPC (con–RMPC)策略[13]的预测时域$N=4$, 二次型性能指标中状态加权矩阵$Q=I_2$, 中间量加权矩阵$R=5I_2$, 采用Min-max策略定义不确定线性子系统的MPC控制器, 并用MATLAB函数fminimax求解. 考虑相同预测时域取值, 本文两步法鲁棒NMPC(new–RMPC)策略的参数为$H = \mathrm{diag}\{1, 0.7\}$和$R = \mathrm{diag}\{1, 10^{10}, 10^{10}\}$, 则求解Riccati不等式组(14), 得一个正定对称矩阵解和H_∞控制律增益分别为$P=4I$和$K=-0.75I$, 并采用MATLAB函数fmincon优化问题(12), 则图1–3给出了分别采用两种鲁棒MPC策略的聚丙烯牌号切换过程控制结果, 其中: 图1为牌号切换过程累积质量变化曲线, 图2为牌号切换过程瞬时质量变化曲线, 图3为牌号切换过程控制输入曲线. 在图1–3中: setpoint表示牌号切换过程控制的设定值; new–RMPC表示本文所提出鲁棒预测控制算法; con–RMPC表示常规鲁棒预测控制算法; limits表示对应变量的上下限约束.

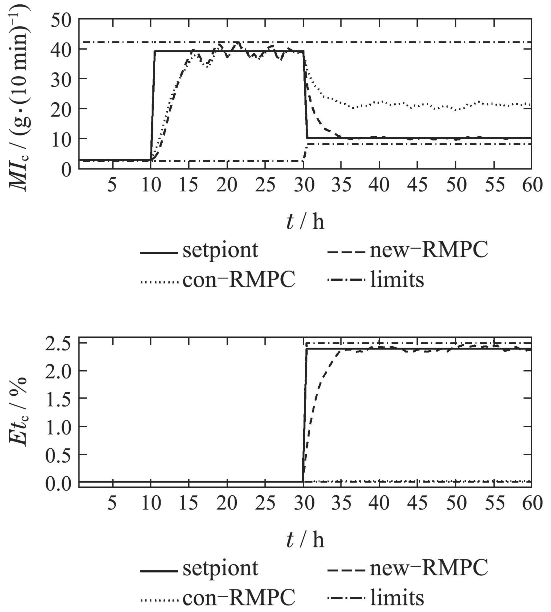


图 1 牌号切换过程累积质量曲线

Fig. 1 Cumulative quality profiles of the grade transition process

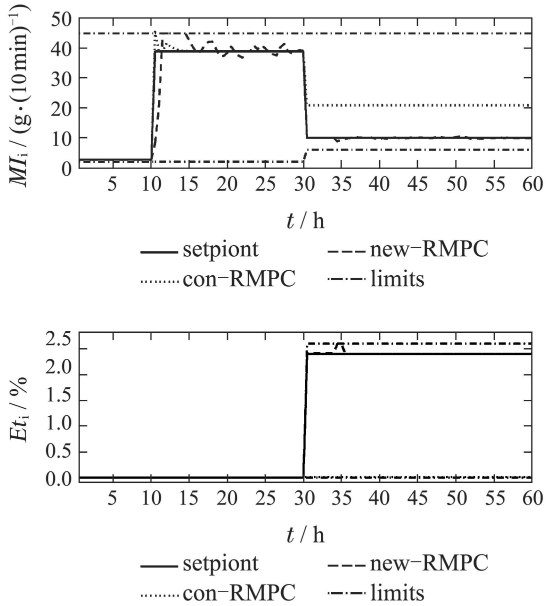
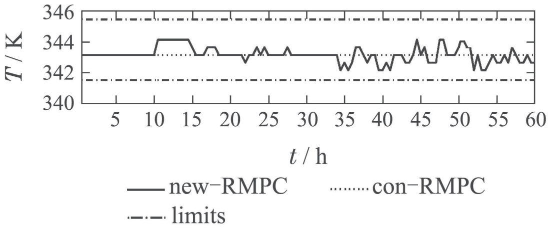


图 2 牌号切换过程瞬时质量曲线

Fig. 2 Instantaneous quality profiles of the grade transition process



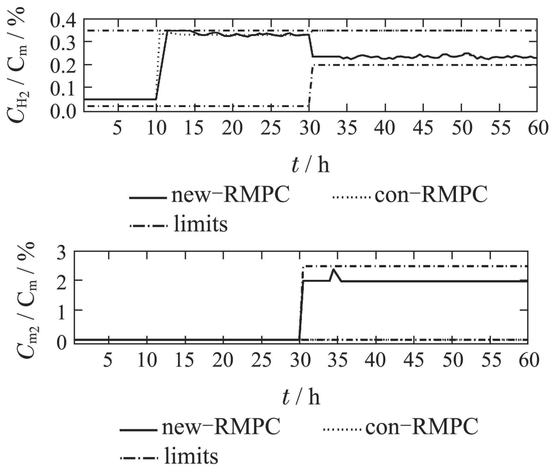


图 3 牌号切换过程控制输入曲线

Fig. 3 Control input profiles of the grade transition process

对比2种Hammerstein系统两步法鲁棒MPC策略, 由图2上子图点线和表1可知, 采用con–RMPC策略实施聚丙烯牌号由A→B切换控制时, 瞬时熔融指数在切换时刻超出约束范围; 进一步, 由图1–3点线可知, 当con–RMPC策略控制聚丙烯牌号由B→C切换时, 熔融指数和乙烯含量存在较大的稳态偏差, 这将严重影响目标牌号产品C的质量, 而造成该稳态误差的主要原因是con–RMPC策略计算得到的控制分量乙烯与丙烯比值过小(如图3下子图点线所示). 与此同时, 在本文两步法鲁棒MPC策略控制下, 聚丙烯的整个切换过程都是严格满足系统的约束条件, 且具有较小的稳态偏差.

如果以聚丙烯物性规格指标的±5%作为切换目标牌号的合格检验标准, 则由图1–3可以看出, 本文两步法鲁棒MPC牌号控制尽管存在累积质量的不确定测量误差, 但在均聚牌号和无规共聚牌号两次切换过程中, 聚合物的MI和E_t离开起始生产牌号的合格品区后都先进入废料生产区, 再都能最终进入目标牌号的合格品区, 同时两次切换过程的(操作)控制变量都满足切换过程的约束.

表 1 3种牌号规格及切换过程约束[16]

Table 1 Three grade specifications and constraints of transition process

牌号规格	MI/(g/10 min)	Et/%	T/K	C_{H_2}/%	$C_{m2}/C_{\rm m}$/%
A	2.7	—	343.15	0.050	—
B	39	—	343.15	0.330	—
C	10	2.4	343.15	0.236	1.99
A→ B	$[2.4, 42.0]^c$	—	[341.15, 345.15]	[0.02, 0.35]	—
	$[2.0, 45.0]^i$	—	—	$[-0.1, 0.10]^{\Delta}$	—
B→ C	$[8.0, 42.0]^c$	$[0.0, 2.5]^c$	[341.15, 345.15]	[0.20, 0.35]	[0.0, 2.5]
	$[6.0, 45.0]^i$	$[0.0, 2.6]^i$	—	$[-0.1, 0.10]^{\Delta}$	$[-0.1, 0.10]^{\Delta}$

表2给出了本文策略与现有两步法鲁棒MPC策略作用下的牌号切换过程过渡时间对比结果. 尽管在现有两步法鲁棒MPC策略作用下, 均聚牌号切换过程(A→ B)的过渡时间与本文策略作用下的过渡时间相近, 但在现有两步法鲁棒MPC策略控制下的无规共聚牌号切换过程(B→ C)将无法保证进入合格品生产过程(如图1点线所示); 相反, 在本文策略作用下, 均聚牌号和无规共聚牌号切换过程都能够快速进入目标牌号的合格品生产过程.

表 2 两种策略作用下牌号切换过渡时间

Table 2 Transient times of grade transition by the two schemes

两种策略	A→ B	B→ C
本文	9.0 h	7.0 h
文献[13]	9.5 h	∞

但需要指出的是, 在均聚牌号切换过程中, 现有两步法鲁棒MPC策略计算的控制输入比本文方法更加平滑, 如表3给出的两种策略作用下各个控制量的偏差平方和, 这将有利于底层控制器的安全平稳运行.

表 3 两种策略作用下控制量偏差平方和

Table 3 Square sum of control deviations by the two schemes

两种策略	T/K	$C_{\rm H2}/C_{\rm m}$/%	$C_{\rm m2}/C_{\rm m}$/%
本文	24.0500	0.0433	0.1912
文献[13]	4.3×10^{-7}	4.7×10^{-4}	1.6×10^{-10}

5 结语

以聚丙烯树脂牌号切换过程为研究背景, 针对不确定多变量约束Hammerstein系统, 提出了具有扰动输入到闭环状态稳定的NMPC策略. 该策略以线性子系统H_∞控制为基础, 集成了Hammerstein系统两步法和整体法NMPC设计优点, 可以处理系统

各种实际约束以及在优化过程中考虑系统实际输入加权以平缓系统运行. 同时该策略显式地考虑非线性代数方程解算误差对实际控制输入满足系统约束的影响, 建立了保证闭环系统鲁棒稳定和有限L_2增益的解算误差的界. 最后通过对聚丙烯牌号切换过程的仿真控制, 验证了本文策略的有效性和实用性.

参考文献:

[1] BHANDARI N, ROLLINS D. Continuous-time Hammerstein nonlinear modeling applied to distillation. *AIChE Journal*, 2004, 50(2): 530 – 533.

[2] LAWRYNCZUK M. Nonlinear predictive control of dynamic systems represented by winer-hammerstein models. *Nonlinear Dynamics*, 2016, 86(2): 1193 – 1214.

[3] HE Defeng, ZOU Tao, YU Li. Receding horizon control of grade transition of large-scale polypropylene production plants. *CIESC Journal*, 2010, 61(2): 405 – 412.
(何德峰, 邹涛, 俞立. 大型聚丙烯生产装置牌号切换滚动时域控制. 化工学报, 2010, 61(2): 405 – 412.)

[4] FENG Shaohui, QIAN Feng. The application of model prediction control based on Hammerstein model in Chemical Process. *Automation in Petro-Chemical Industry*, 2004(3): 25 – 27.
(冯少辉, 钱锋. 基于Hammerstein模型的预测控制在化工过程中的应用. 石油化工自动化, 2004(3): 25 – 27.)

[5] KHANI F, HAERI M. Robust model predictive control of nonlinear processes represented by wiener or Hammerstein models. *Chemical Engineering Science*, 2015, 129: 223 – 231.

[6] BLOEMEN H H J, BOOM T J J V, VERBRUGGEN H B. Model-based predictive control for Hammerstein-wiener systems. *International Journal of Control*, 2001, 74(5): 482 – 495.

[7] ZHU X F, SEBORG D E. Nonlinear predictive control based on Hammerstein models. *Control Theory & Applications*, 1994, 11(5): 564 – 575.

[8] DING B C, XI Y G, LI S Y. Stability analysis on predictive control of discrete-time systems with input nonlinearity. *Acta Automatica Sinica*, 2003, 29(6): 827 – 834.

[9] XU Xiangyuan, MAO Zongyuan. The analysis and reseaerch of predictive control based on Hammerstein model. *Control Theory & Applications*, 2000, 17(4): 529 – 532.
(徐湘元, 毛宗源. 基于Hammerstein模型的预测控制的分析与研究. 控制理论与应用, 2000, 17(4): 529 – 532.)

[10] DING BC, PING XB. Dynamic output feedback model predictive control for nonlinear systems represented by Hammerstein-Wiener model. *Journal of Process Control*, 2012, 22(9): 1773 – 1784.

[11] DING Baocang, LI Shaoyuan. Design and analysis of Hammerstein nonlinear control systems with constraints. *Control and Decision*, 2003, 18(1): 24 – 28.
(丁宝苍, 李少远. 具有约束的Hammerstein非线性控制系统的设计与分析. 控制与决策, 2003, 18(1): 24 – 28.)

[12] DING B C, XI Y G. A two-step model predictive control of Hammerstein model. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2006, 16(7): 353 – 367.

[13] NIU Yongxiao, DING Baocang, SUN Hexu. Robust stability of two-step predictive control for systems with input nonlinearitis. *Control and Decision*, 2006, 21(4): 457 – 462.
(牛永肖, 丁宝苍, 孙鹤旭. 输入非线性系统的两步法预测控制的鲁棒稳定性. 控制与决策, 2006, 21(4): 457 – 462.)

[14] ZHANG H T, LI H X, CHEN G R. Dual-model predictive control algorithm for constrained Hammerstein systems. *International Journal of Control*, 2008, 81(10): 1609 – 1625.

[15] LI Yan, MAO Zhizhong, WANG Yan, et al. Predictive control of Hammerstein-Wiener nonlinearity based on polytopic terminal region. *Acta Automatica Sinica*, 2011, 37(5): 629 – 638.
(李妍, 毛志忠, 王琰, 等. 基于多面体终端域的Hammerstein-Wiener非线性预测控制. 自动化学报, 2011, 37(5): 629 – 638.)

[16] HE Defeng, YU Li. Nonlinear predictive control of constrained Hammerstein systems and its research on simulation of polypropylene grade transition. *Acta Automatica Sinica*, 2009, 35(12): 1558 – 1563.
(何德峰, 俞立. 约束Hammerstein系统非线性预测控制及在聚丙烯牌号切换中的仿真研究. 自动化学报, 2009, 35(12): 1558 – 1563.)

[17] XI Yugeng, LI Dewei. Fundamental philosophy and status of qualitative synthesis of model predictive control. *Acta Automatica Sinica*, 2008, 34(10): 1225 – 1234.
(席裕庚, 李德伟. 预测控制定性综合理论的基本思路和研究现状. 自动化学报, 2008, 34(10): 1225 – 1234.)

[18] KHALIL HK. *Nonlinear Systems* [M]. 3rd Edition. New York: Prentice Hall, 2002.

[19] MAGNI L, RAIMONDO DM, SCATTOLINI R. Regional input-to-state stability for nonlinear model predictive control. *Regional Input-to-State Stability for Nonlinear Model Predictive Control*, 2006, 51(9): 1548 – 1553.

[20] LAZAR M, PENA D M, HEEMELS WPMH, et al. On input-to-state stability of min-max nonlinear model predictive control. *Systems & Control Letter*, 2008, 57(1): 39 – 48.

[21] HE Defeng, JI Haibo, ZHENG Tao. Nonlinear H_∞ robust predictive control with bounded persistent disturbances. *Acta Automatica Sinica*, 2008, 34(2): 215 – 219.
(何德峰, 季海波, 郑涛. 持续有界扰动下的非线性H_∞鲁棒预测控制. 自动化学报, 2008, 34(2): 215 – 219.)

[22] HE Defeng, DING Baocang, YU Shuyou. Review of fundamental properties and topics of model predictive control for nonlinear systems. *Control Theory & Applications*, 2013, 30(3): 274 – 288.
(何德峰, 丁宝苍, 于树友. 非线性系统模型预测控制若干基本特点与主题回顾. 控制理论与应用, 2013, 30(3): 274 – 288.)

[23] LIN W, BYRNES CI. H_∞ Control of discrete-time nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1996, 41(4): 494 – 510.

[24] RICHARDS J R, CONGALIDIS J P. Measurement and control of polymerization reactors. *Computers and Chemical Engineering,*, 2006, 30(10/12): 1447 – 1463.

作者简介:

何德峰 教授, 博士生导师, 主要从事智能系统预测控制、过程与运动体先进控制等研究, E-mail: hdfzj@zjut.edu.cn;

余世明 教授, 博士生导师, 主要从事模型预测控制与系统辨识、信号与信息处理等研究, E-mail: ysm@zjut.edu.cn.