第 xx 卷第 x 期
2017 年 x 月

控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications

Vol. xx No. x
Xxx. xxxx

DOI: 10.7641/CTA.2017.xxxxx

线性参变过驱动系统鲁棒控制分配策略

张慎鹏[1], 张登峰[1†], 王执铨[2]

(1. 南京理工大学 机械工程学院, 江苏 南京 210094; 2. 南京理工大学 自动化学院, 江苏 南京 210094)

摘要: 针对一类具有不确定时变参量的LPV过驱动系统的控制分配问题, 考虑系统的不确定参量扰动和执行器物理约束, 利用伪控指令分配误差和控制量误差的1-范数, 建立了含有时变不确定因子的控制分配优化模型. 根据鲁棒优化思想, 采用矢量变换技术处理时变不确定因子, 得到了一种基于有约束锥二次凸优化模型的鲁棒控制分配算法, 实现对LPV过驱动系统伪控指令的在线优化分配. 最后, 对某四轮电动汽车时变二自由度转向过驱动控制系统的对比仿真实验表明, 相比常规4WS和伪逆控制分配方法, 本文的鲁棒控制分配算法有效地降低了系统参变量不确定扰动的影响, 得到更合理的控制分配解, 有效改善了车辆的操纵稳定性.

关键词: 过驱动系统; 鲁棒控制分配; 锥二次优化; 线性参变系统

中图分类号: TP273　　**文献标识码**: A

Robust control allocation strategy for linear parameter-varying over-actuated systems

ZHANG Shen-peng[1], ZHANG Deng-feng[1†], WANG Zhi-quan[2]

(1. School of Mechanical Engineering, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing, Jiangsu, 210094, China;
2. School of Automation, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing, Jiangsu, 210094, China)

Abstract: The control allocation problem is studied for a class of linear parameter-varying (LPV) over-actuated systems with uncertain time-varying parameters in this paper. In view of the uncertain parameter perturbations and actuators physical constraints, a control allocation optimization model with time-varying uncertainties is established based on the 1-norms of allocation error of pseudo-control command and the control input error. According to the principle of robust optimization, the robust control allocation algorithm based on constrained second-order cone programming model is developed by using vector transforms technology to deal with time-varying uncertainties. The online optimal allocation of pseudo-control command is thus realized for LPV over-actuated systems. Finally, the comparative simulations are executed for the steering over-actuated control system with time varying 2-DOF of a four-wheel electric-vehicle. The simulative results indicated that the proposed robust control allocation algorithm can effectively reduce the influence of parametric uncertainties on the system, compared with the conventional 4WS and pseudo-inverse control allocation methods. The more reasonable control allocation solution is obtained, and the vehicle handling stability is improved.

Key words: over-actuated systems; robust control allocation; second-order cone programming; linear parameter-varying systems

1 引言(Introduction)

为了提高控制系统的安全可靠性, 具有多个执行器的过驱动系统被广泛应用于航空航天和汽车制造等领域[1–2]. 但, 这在提高系统可靠性的同时, 也带来了新的问题: 如何使各执行器发挥最优的控制效能?[3] 而控制分配技术的出现为解决这一问题提供了一条有效途径, 并在航天飞行器[4–5]、汽车制造[6–7]、航海船舶[8–9]等领域获得成功应用.

早期的控制分配算法研究成果大多是基于线性标称系统模型, 如直接分配算法、广义逆及其改进的分配算法和基于数学规划的分配优化算法等[10], 由于系统建模误差和各种外界干扰的存在, 使得上述控制分配算法在应用中往往造成实际性能下降[3,11]. 同时, 当系统维度较高时, 算法的计算速度变慢, 难以快速

收稿日期: 2017−xx−xx; 录用日期: 2017−xx−xx.
†通信作者. E-mail: mydfzhang@qq.com; Tel.: 13951621543.
资助项目: 国家自然科学基金项目(61374133, 61673205, 51275245), 江苏省重点研发计划项目(BE2015125, BY2016004-06), 江苏省科技成果转化项目(BA2016155), 江苏省高校优势学科建设工程项目(PAPD).
Project supported: National Natural Science Foundation of China (Granted No. 61374133, 61673205, 51275245), Key Research and Development Program of Jiangsu Province (BE2015125, BY2016004-06), Scientific and Technological achievements Transformation Project of Jiangsu province (BA2016155), the Priority Academic Program Development of Jiangsu Higher Education Institutions (PAPD).

求解, 不易于在线应用[12]. 此外, 传统算法的优化目标过于简单, 且很少考虑执行器动态的物理约束, 导致分配精度降低, 难以保证实际应用的可靠性[13].

为了减小上述传统控制分配算法的保守性和不足, 近年来, 国内外学者对其进行了深入研究. 一方面, 提出了各种非线性控制分配策略, 如截距修正法(非线性补偿)、分段线性化方法、微分进化算法、二次规划方法等[6,12,14–15]. 这些方法通过对分配过程作线性化处理, 以建立符合实际工况约束的混合控制分配优化模型, 但所得分配算法难以用于高维系统求解, 不利于在线应用[2,14–15]. 另一方面, 为了使控制分配过程既符合实际工况又便于在线应用, 一些学者通过提高过驱动系统的鲁棒性, 克服传统控制分配策略的保守性和不足[4–5]. 从基于控制分配的过驱动系统结构来看, 这类方法主要从两个方面提高系统的鲁棒性: 第一, 利用基本控制律的鲁棒性来保证有控制分配系统的鲁棒性. 如文献[11]针对具有外扰的过驱动系统, 设计了上层鲁棒控制器, 经对比分析不同控制分配策略下的闭环系统性能, 表明所设计的上层控制器能有效提高对外扰的抑制作用; 文献[16-17] 通过把飞控过驱动系统的非线性特性近似描述为关于时变参量空速和俯仰角的仿射函数, 建立了系统的LPV模型, 进而设计出具有鲁棒性能的增益调度基本控制律, 并结合常规动态控制分配算法对各执行器指令合理分配, 提高了系统的鲁棒性和容错能力; 再如文献[4]针对飞控过驱动系统中飞行高度、马赫数、迎角等参量的时变性特点, 建立了系统的LPV模型, 采用具有鲁棒预测性能的基本控制律和伪逆动态分配算法抑制非线性不确定因素的影响. 但是, 这类方法的基本控制律设计比较复杂, 且没有充分利用控制分配算法的优势和鲁棒性. 第二, 通过设计具有鲁棒性的控制分配算法获得过驱动系统的鲁棒性. 如文献[5]通过构造飞控系统的鲁棒控制分配优化模型, 来抑制由气动系数的计算误差给控制分配过程带来的影响, 从而增强了过驱动系统的鲁棒性; 文献[18] 研究了执行器部分失效时的鲁棒控制分配方法, 提高了系统的鲁棒性和容错能力; 文献[19]对比分析了船舶定位系统在滑模变结构控制下和最小二乘鲁棒控制分配器下的闭环性能, 结果表明后者有更优的系统鲁棒性; 文献[20]针对滑模变结构过驱动控制系统, 设计了二次最优鲁棒控制分配算法, 有效降低了模态结构变化对分配误差的影响. 由以上两个方面的分析可见, 设计鲁棒性的控制分配策略, 不需借助或改变基本控制律, 通过控制分配器的调节机制, 即可抑制外扰和系统参数摄动或非线性影响, 实现系统的鲁棒性, 更具有实际意义[21–22]. 然而, 目前对鲁棒控制分配的研究还不够充分, 难以处理系统非线性时变参量及参量存在不确定扰动时, 系统的鲁棒控制分配问题[5], 对基于LPV模型过驱动系统的鲁棒控制分配方法研究成果也鲜有报道.

鉴于此, 本文针对一类具有LPV模型结构的过驱动系统, 研究其时变参量存在不确定扰动时的鲁棒控制分配问题. 文中通过分析基于不确定时变参量的控制分配模型, 构建了一种能够抑制参变量不确定摄动(扰动)的鲁棒控制分配优化模型, 并将其转化为典型的锥二次凸优化模型, 从而得到了一种可以在线应用的鲁棒控制分配算法, 保证系统能获得较优的控制分配解. 文章最后通过对某四轮电动汽车时变2-DOF转向过驱动控制系统的对比仿真分析, 验证了本文算法的有效性和优越性.

2 问题描述(Problem formulation)

考虑一类存在不确定时变参量的离散过驱动系统LPV状态空间模型P[16–17,23–25]:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}(k+1) = A[\boldsymbol{\rho}(k)]\boldsymbol{x}(k) + B[\boldsymbol{\rho}(k)]\boldsymbol{u}(k) \\ \boldsymbol{y}(k) = C\boldsymbol{x}(k) \end{cases} \tag{1}$$

其中: k为采样时刻, $\boldsymbol{x}(k) \in \Re^n$, $\boldsymbol{y}(k) \in \Re^l$, $\boldsymbol{u}(k) \in \Re^m$分别为$k$时刻的状态向量、被控输出向量和控制输入向量, 各向量维数满足关系$m \geqslant n \geqslant l > 0$; 矩阵$C \in \Re^{l\times n}$为已知的输出矩阵, $A[\boldsymbol{\rho}(k)] \in \Re^{n\times n}$和$B[\boldsymbol{\rho}(k)] \in \Re^{n\times m}$分别是关于时变参量$\boldsymbol{\rho}(k) \in \Re^d$连续可微的已知状态空间阵, 其中控制矩阵$B[\boldsymbol{\rho}(k)]$是各列向量均为非零的列不满秩阵, 且满足$\mathrm{Rank}(B[\boldsymbol{\rho}(k)]) = l$; 实时可测参数向量$\boldsymbol{\rho}(k)$满足关系$\boldsymbol{\rho}(k) = \boldsymbol{\rho}_0(k) + \Delta\boldsymbol{\rho}(k)$, $\boldsymbol{\rho}_0(k)$为标称值, $\Delta\boldsymbol{\rho}(k)$为满足: $\Delta\boldsymbol{\rho}_{\min} \leqslant \Delta\boldsymbol{\rho}(k) \leqslant \Delta\boldsymbol{\rho}_{\max}$ 的有界摄动向量. $\Delta\boldsymbol{\rho}(k)$包含了由于测量仪表误差和环境干扰等因素对$\boldsymbol{\rho}(k)$检测结果造成的不确定性摄动. 记向量$\boldsymbol{u}(k) = [u_1(k), u_2(k), \cdots, u_j(k), \cdots, u_m(k)]^{\mathrm{T}}$, 其中$u_j(k)(j = 1, 2, \cdots, m)$表示第$j$ 个执行器的控制输入分量, 它对应于控制矩阵$B[\boldsymbol{\rho}(k)]$ 的第j 列元素. 为便于本文的控制分配研究, 设定系统(1)满足以下条件:

S1) 对过驱动系统(1)的控制分配结果不影响闭环系统的渐近稳定性.

S2) 控制输入$\boldsymbol{u}(k) \in \Omega := \{\boldsymbol{u}(k) \in \Re^m : \underline{\boldsymbol{u}}(k) \leqslant \boldsymbol{u}(k) \leqslant \bar{\boldsymbol{u}}(k)\}$, 其中$\Omega$ 为$\boldsymbol{u}(k)$的约束集合, $\underline{\boldsymbol{u}}(k)$、$\bar{\boldsymbol{u}}(k)$为约束边界. 由于实际执行器的物理约束多为位置及其变化率的约束, 相应地, 控制输入信号的变化有如下约束关系式:

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}_{\min} \leqslant \boldsymbol{u}(k) \leqslant \boldsymbol{u}_{\max} \\ MIN_{\Delta u} \leqslant \Delta\boldsymbol{u}(k) \leqslant MAX_{\Delta u} \end{cases} \tag{2}$$

其中$\boldsymbol{u}_{\max}$、$\boldsymbol{u}_{\min}$为位置约束的上、下限向量, $MAX_{\Delta u}$、$MIN_{\Delta u}$为位置变化率约束的上、下限向量. 设定$k-1$ 时刻, 各执行器的控制输入信号满足约束式(2), 则在任意时刻k, 控制输入满足关系$\underline{\boldsymbol{u}}(k) \leqslant$

$\boldsymbol{u}(k) \leqslant \bar{\boldsymbol{u}}(k)$其中:

$$\begin{cases} \bar{\boldsymbol{u}}(k) = \min(\boldsymbol{u}(k-1) + MAX_{\Delta u}, \boldsymbol{u}_{\max}) \\ \underline{\boldsymbol{u}}(k) = \max(\boldsymbol{u}(k-1) - MIN_{\Delta u}, \boldsymbol{u}_{\min}) \end{cases} \tag{3}$$

通常对基于控制分配的过驱动控制系统采用分层设计方案[3,6], 设计过程分为两层: 1)在上层设计基本控制律来获得期望伪控指令$\boldsymbol{v}_{nd}(k)$; 2) 根据上层的指令$\boldsymbol{v}_{nd}(k)$ 设计控制分配器, 实现期望伪控指令在各执行器之间的合理优化分配. 由此可见, 控制分配设计的关键是根据期望伪控指令$\boldsymbol{v}_{nd}(k)$, 如何获得最优的控制分配器.

由于系统(1)中$B[\boldsymbol{\rho}(k)]$为列不满秩矩阵, 可对其满秩分解使得$B[\boldsymbol{\rho}(k)] = B_v[\boldsymbol{\rho}(k)]B_u[\boldsymbol{\rho}(k)]$[4], 其中: $B_v[\boldsymbol{\rho}(k)] \in \Re^{n\times l}$、$B_u[\boldsymbol{\rho}(k)] \in \Re^{l\times m}$. 进而, 系统(1)可转化成如下包含控制分配方程的形式:

$$\mathrm{P}_v: \begin{cases} \boldsymbol{x}(k+1) = A[\boldsymbol{\rho}(k)]\boldsymbol{x}(k) + \\ \qquad B_v[\boldsymbol{\rho}(k)]\boldsymbol{v}_{nd}(k) \\ \boldsymbol{y}(k) = C\boldsymbol{x}(k) \end{cases} \tag{4a}$$

$$\boldsymbol{v}_{nd}(k) = B_u[\boldsymbol{\rho}(k)]\boldsymbol{u}(k), \boldsymbol{u}(k) \in \Omega \tag{4b}$$

其中: P_v是可镇定的方系统; 式(4b)称为分配方程; $\boldsymbol{v}_{nd}(k) \in \Re^l$为根据上层基本控制律得到的期望伪控指令. 分配方程的求解即是控制分配器的设计过程.

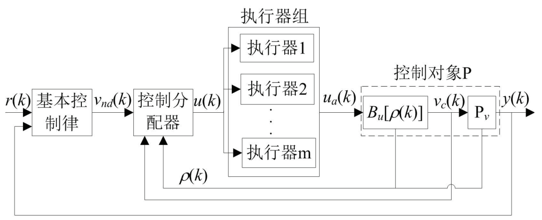

图 1 基于鲁棒控制分配的过驱动系统结构

Fig. 1 Structure of over-actuated system based on robust control allocation

在系统模型(4)中, 理想情况下由控制分配方程所得的分配解$\boldsymbol{u}^*(k)$应使$\boldsymbol{v}_c(k) = B_u[\boldsymbol{\rho}(k)]\boldsymbol{u}^*(k) = \boldsymbol{v}_{nd}(k)$成立($\boldsymbol{v}_c(k)$表示$k$ 时刻经控制分配获得的实际伪控指令). 但是, 由于时变参量$\boldsymbol{\rho}(k)$的不确定摄动、控制输入$\boldsymbol{u}(k)$的物理约束以及执行器的动态特性等因素影响, 使$\boldsymbol{v}_c(k)$和$\boldsymbol{v}_{nd}(k)$ 存在一定偏差, 造成经过控制分配后的实际系统性能会发生变化. 因此, 本文的鲁棒控制分配器设计目标就是: 针对含有不确定时变参量$\boldsymbol{\rho}(k)$的LPV过驱动系统模型(4), 在设定上层基本控制律已知时, 寻找一种控制分配方程的优化求解方法, 使获得的分配解$\boldsymbol{u}(k)$既符合物理约束(3)又能使经过控制分配后的实际系统与期望目标具有最优的控制性能,其系统结构如图1 所示($\boldsymbol{u}(k)$ 为执行器输入, $\boldsymbol{u}_a(k)$ 为执行器输出, 本文假定$\boldsymbol{u}(k) = \boldsymbol{u}_a(k)$).

3 鲁棒控制分配的优化算法(Optimization algorithm for robust control allocation)

由于过驱动系统模型(1)和(4)中时变参量$\boldsymbol{\rho}(k)$存在未知摄动$\Delta\boldsymbol{\rho}(k)$, 使分配方程含有未知不确定参数, 难以精确求解, 造成实际伪控指令$\boldsymbol{v}_c(k)$与期望伪控指令$\boldsymbol{v}_{nd}(k)$ 有较大偏差, 从而实际系统的控制性能往往低于期望性能. 为了降低参变量的未知摄动对实际控制分配结果的影响, 在求解控制分配方程时, 我们根据鲁棒优化的思想, 分别采用实际伪控指令$\boldsymbol{v}_c(k)$与期望伪控指令$\boldsymbol{v}_{nd}(k)$ 之间的误差向量1-范数作为分配误差, 实际分配解$\boldsymbol{u}(k)$与执行器理想输入量$\boldsymbol{u}_p(k)$ 之间的误差向量1-范数作为控制量误差, 通过使分配误差函数和控制量误差函数同时最小化建立优化目标函数, 从而得到如下的鲁棒控制分配设计优化算法模型:

$$\begin{cases} \min\limits_{\boldsymbol{u}(k)} J(k) = \{\|B_u[\boldsymbol{\rho}(k)]\boldsymbol{u}(k) - \boldsymbol{v}_{nd}(k)\|_1 + \\ \qquad\qquad \|W(\boldsymbol{u}(k) - \boldsymbol{u}_p(k))\|_1\} \\ \text{s.t.} \quad \underline{\boldsymbol{u}}(k) \leqslant \boldsymbol{u}(k) \leqslant \bar{\boldsymbol{u}}(k) \end{cases} \tag{5}$$

其中: $W \in \Re^m, W = \mathrm{diag}(w_1, w_2, \cdots, w_m)$为正定对角加权阵, 对角线元素为对应执行器的控制权重; $\boldsymbol{u}_p(k)$为给定的执行器的理想控制输入信号, 从耗能最小角度考虑可设定为0; $\boldsymbol{u}(k)$为待设计的控制分配解.

从优化模型式(5)的结构可知, 优化约束条件是常规线性不等式约束, 但是优化目标$J(k)$是包含未知不确定性因子的多项式函数, 因此不能采用传统线性优化的方法进行求解. 然而根据鲁棒凸优化的思想, 可以先把$J(k)$ 中的未知不确定性因子变换到约束条件里, 再采用凸二次锥优化方法把包含不确定性参数约束的优化问题转换成确定性的线性锥二次约束凸优化问题, 从而可以利用各种成熟的线性凸优化算法在线直接求解, 得到鲁棒的控制分配优化解.

令向量:

$$\begin{cases} \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} = [\underbrace{0....0}_{m}, \underbrace{1....1}_{l}, w_1....w_m]; \\ \boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(k) = [\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(k), \boldsymbol{s}_1^{\mathrm{T}}(k), \boldsymbol{s}_2^{\mathrm{T}}(k)]. \end{cases} \tag{6}$$

其中未知向量$\boldsymbol{s}_1(k)$、$\boldsymbol{s}_2(k)$满足条件:

$$\begin{cases} \boldsymbol{s}_1(k) \in \Re^l, \boldsymbol{s}_2(k) \in \Re^m; \\ \boldsymbol{s}_1(k) \geqslant 0, \boldsymbol{s}_2(k) \geqslant 0; \\ \|B_u[\boldsymbol{\rho}(k)]\boldsymbol{u}(k) - \boldsymbol{v}_{nd}(k)\|_1 \leqslant \|\boldsymbol{s}_1(k)\|_1; \\ \|W(\boldsymbol{u}(k) - \boldsymbol{u}_p(k))\|_1 \leqslant \|W\boldsymbol{s}_2(k)\|_1. \end{cases} \tag{7}$$

则优化问题式(5)可变换为以下仅在部分约束条件中包含未知不确定参数的优化模型[26–28]:

$$\begin{cases} \qquad \min \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}(k) \\ \text{s.t.} \quad \boldsymbol{m}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}(k) \geqslant e_i(k), i = 1, \cdots, 5m + l; \\ \qquad \boldsymbol{n}_j^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{\rho}(k)]\boldsymbol{z}(k) \geqslant f_j(k), j = 1, \cdots, 2l. \end{cases} \tag{8}$$

其中: $\boldsymbol{m}_i \in \Re^{2m+l}$为列向量, $\boldsymbol{m}_i^{\mathrm{T}}$表示矩阵$M$的第$i$行,$e_i(k) \in \Re$为标量, 其表示向量$[0_{1\times l}, 0_{1\times m}, \underline{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}}(k), -\bar{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}}(k), \boldsymbol{u}_p^{\mathrm{T}}(k), -\boldsymbol{u}_p^{\mathrm{T}}(k)]$的第$i$个元素; $\boldsymbol{n}_j[\boldsymbol{\rho}(k)] \in \Re^{2m+l}$为列向量, $\boldsymbol{n}_j^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{\rho}(k)]$表示矩阵$N[\boldsymbol{\rho}(k)]$ 的第j行, $f_j(k) \in \Re$为标量, 其表示向量$[\boldsymbol{v}_{nd}^{\mathrm{T}}(k), -\boldsymbol{v}_{nd}^{\mathrm{T}}(k)]$的第$j$ 个元素. 由式(8)可以看出, 优化目标函数为典型的线性多项式, 前$5m+l$个约束条件为标准的线性不等式约束, 后$2l$个约束条件是具有未知不确定性参数的线性不等式约束.

注 1 $M = \begin{bmatrix} 0_{l\times m} & I_{l\times l} & 0_{l\times m} \\ 0_{m\times m} & 0_{m\times l} & I_{m\times m} \\ I_{m\times m} & 0_{m\times l} & 0_{m\times m} \\ -I_{m\times m} & 0_{m\times l} & 0_{m\times m} \\ I_{m\times m} & 0_{m\times l} & I_{m\times m} \\ -I_{m\times m} & 0_{m\times l} & I_{m\times m} \end{bmatrix}$, $N[\boldsymbol{\rho}(k)] = \begin{bmatrix} B_u[\boldsymbol{\rho}(k)] & I_{l\times l} & 0_{l\times m} \\ -B_u[\boldsymbol{\rho}(k)] & I_{l\times l} & 0_{l\times m} \end{bmatrix}$.

接下来, 对于优化问题(8)的求解, 我们采用鲁棒凸优化思想[28–29], 把其中的未知不确定约束条件转化为确定约束条件下的凸优化问题(保证即使在最坏情况下, 优化目标函数依然最优), 然后直接采用各种成熟的凸优化算法(如内点法、半正定规划法、光滑化算法等[26,30–31]), 计算出问题(8) 的优化解.为便于详细分析, 先给出如下定义:

定义 1 设向量$\boldsymbol{b}_{uj}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{\rho}(k)]$表示$B_u[\boldsymbol{\rho}(k)]$的第$j$行且满足:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{b}_{uj}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{\rho}(k)] \in \Phi_j = \{&\boldsymbol{b}_{uj}[\boldsymbol{\rho}(k)] : \boldsymbol{b}_{uj}[\boldsymbol{\rho}(k)] = \\ &\boldsymbol{b}_{uj}[\boldsymbol{\rho}_0(k)] + Q_j \boldsymbol{g}_j[\Delta\boldsymbol{\rho}(k)], \\ &\|\boldsymbol{g}_j[\Delta\boldsymbol{\rho}(k)]\|_2 \leqslant \delta\} \end{aligned} \tag{9}$$

其中: Φ_j为m维椭球集; $\boldsymbol{g}_j[\Delta\boldsymbol{\rho}(k)] \in \Re^m$是从$\boldsymbol{b}_{uj}[\boldsymbol{\rho}(k)]$中提取出的未知有界摄动量, 其在一个半径为$\delta > 0$ 的m 维球域内摄动, δ可根据$\Delta\boldsymbol{\rho}(k)$的上下界$\Delta\boldsymbol{\rho}_{\max}$和$\Delta\boldsymbol{\rho}_{\min}$来确定; Q_j 为正定对角阵, 可根据$\boldsymbol{\rho}(k)$与$\boldsymbol{b}_{uj}[\boldsymbol{\rho}(k)]$ 的映射关系来确定.

根据定义1则有:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{n}_j^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{\rho}(k)] \in \Theta_j = \{&\boldsymbol{n}_j[\boldsymbol{\rho}(k)] : \boldsymbol{n}_j[\boldsymbol{\rho}(k)] = \\ &\boldsymbol{n}_j[\boldsymbol{\rho}_0(k)] + H_j \boldsymbol{\kappa}_j[\Delta\boldsymbol{\rho}(k)], \\ &\|\boldsymbol{\kappa}_j[\Delta\boldsymbol{\rho}(k)]\|_2 \leqslant \varepsilon\} \end{aligned} \tag{10}$$

其中: Θ_j为$2m+l$维椭球集. $\boldsymbol{n}_j^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{\rho}_0(k)]=[\pm \boldsymbol{b}_{uj}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{\rho}_0(k)], I_{l\times l}(j), 0_{1\times m}]$, $H_j = \mathrm{diag}(\pm Q_j, 0_{l\times l}, 0_{m\times m})$, 式中的“±”号, 在$j = 1 \cdots l$时, 取“+”, $j = l+1 \cdots 2l$ 时, 取“−”, $I_{l\times l}(j)$表示l阶单位阵的第j行; $\boldsymbol{\kappa}_j^{\mathrm{T}}[\Delta\boldsymbol{\rho}(k)] = [\boldsymbol{g}_j^{\mathrm{T}}[\Delta\boldsymbol{\rho}(k)], 0_{1\times l}, 0_{1\times m}]$; $\varepsilon = \delta$. 进而, 利用矢量变换技术, 优化模型式(8)最终可转化为一个典型的锥二次优化模型:

$$\begin{cases} \min\limits_{\boldsymbol{z}(k)} \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}(k) \\ \text{s.t.} \quad \boldsymbol{m}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}(k) \geqslant e_i(k), i = 1, \cdots, 5m+l; \\ \quad \boldsymbol{n}_j^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{\rho}_0(k)]\boldsymbol{z}(k) - \varepsilon\|H_j\boldsymbol{z}(k)\|_2 \geqslant f_j(k), \\ \quad j = 1, \cdots, 2l. \end{cases} \tag{11}$$

综上分析可知, 具有不确定性时变参量的过驱动系统(1)的控制分配设计, 最终转化为求解控制分配优化模型(11)的约束凸优化问题. 对于形如式(11) 的锥二次凸优化问题的求解, 目前已有很多比较成熟的方法, 其中求解效率较高的是具有多项式时间复杂度的内点算法[30]. 例如, 基于内点-对偶原理的Sedumi软件包求解锥二次优化问题, 算法复杂度与同规模线性规划问题的复杂度相当, 求解效率很高, 有利于在线实时应用[31].

注 2 式(8)向式(11)的转化过程详细参见附录A.

注 3 关于未知扰动$\Delta\boldsymbol{\rho}(k)$对闭环系统稳定性的影响, 我们有如下结论: 如果基本控制律能保证系统(4a)渐近稳定, 则基于本文鲁棒控制分配算法的LPV过驱动系统，当未知扰动$\Delta\boldsymbol{\rho}(k)$在前文设定的范围内变化时, 不影响整个系统闭环稳定性. (详细分析论证参见附录B)

4 实例仿真(Simulative case study)

本节采用某四轮独立电驱动汽车的时变二自由度车辆模型, 通过对比分析本文的鲁棒控制分配算法、伪逆控制分配算法和常规四轮转向控制方法（简称“常规4WS”）[1]的仿真结果, 验证本文提出的鲁棒控制分配设计算法的有效性和抑制摄动的鲁棒性.

4.1 系统模型(System model)

在汽车行驶过程中, 纵向车速v_x随着行驶轨迹和道路交通等状况具有时变性, 同时轮胎的路面附着系数μ和车速v_x对于不同路面和载荷变化, 也表现为一定的随机不确定性. 由此, 以这2个参变量计算车辆模型中包含不确定扰动的时变参数$\boldsymbol{\rho}(t)$, 可建立如下关于车辆2-DOF模型[32]的LPV过驱动系统:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = A[\boldsymbol{\rho}(t)]\boldsymbol{x}(t) + B[\boldsymbol{\rho}(t)]\boldsymbol{u}_m(t) \\ \boldsymbol{y}(t) = C\boldsymbol{x}(t) \end{cases} \tag{12}$$

其中: $\boldsymbol{x}(t) = [\beta(t)\ , \gamma(t)]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{u}_m(t) = [\delta_f(t)\ , \delta_r(t)]^{\mathrm{T}}$,

$$A[\boldsymbol{\rho}(t)] = \begin{bmatrix} \dfrac{(K_{f0}+K_{r0})\rho_1(t)}{m} & \dfrac{(K_{f0}a - K_{r0}b)\rho_2(t)}{m} - 1 \\ \dfrac{(K_{f0}a - K_{r0}b)\rho_3(t)}{I_z} & \dfrac{(K_{f0}a^2 + K_{r0}b^2)\rho_1(t)}{I_z} \end{bmatrix}$$

$B[\boldsymbol{\rho}(t)] = \begin{bmatrix} -\dfrac{K_{f0}\rho_1(t)}{m} & -\dfrac{K_{r0}\rho_1(t)}{m} \\ -\dfrac{aK_{f0}\rho_3(t)}{I_z} & \dfrac{bK_{r0}\rho_3(t)}{I_z} \end{bmatrix}$, $C = \mathrm{diag}(1, 1)$. 式中: $\beta(t)$为车身质心侧偏角; $\gamma(t)$为车身横摆

角速度; m为整车质量; I_z为汽车绕z轴的转动惯量; a为前轮中心轴到车辆质心距离, b为后轮中心轴到车辆质心距离; $\delta_f(t)$, $\delta_r(t)$分别为前、后轮转角; K_{f0}, K_{r0}分别为前后轮轮胎的名义侧偏刚度($K_f(t)=K_{f0}\mu(t)$; $K_r(t)=K_{r0}\mu(t)$, $K_f(t)$, $K_r(t)$分别为前后轮实际侧偏刚度); $\mu(t)$为车轮轮胎的路面附着系数; $\boldsymbol{\rho}(t)=[\rho_1(t),\rho_2(t),\rho_3(t),\rho_4(t)]^{\mathrm{T}}$为时变参量,其中: $\rho_1(t)=\rho_3(t)/\rho_4(t)$, $\rho_2(t)=\rho_3(t)/\rho_4^2(t)$, $\rho_3(t)=\mu(t)$, $\rho_4(t)=v_x(t)$; $v_x(t)$为汽车纵向车速; 在中高速行驶中汽车的前后轮转角的物理约束为: $\overline{\boldsymbol{u}}_m=[5^\circ,\ 2^\circ]^{\mathrm{T}}$, $\underline{\boldsymbol{u}}_m=[-5^\circ,\ -2^\circ]^{\mathrm{T}}$. 仿真计算使用的车辆模型基本参数见表1[1].

表 1　车辆模型参数

Table 1　Parameters of vehicle model

参数	数值	参数	数值
m/(Kg)	1296	b/(m)	1.36
I_z/(Kg · m^2)	1750	a/(m)	1.28
K_{f0}/(N/rad)	−43750	i_s	20
K_{r0}/(N/rad)	−43750		

i_s表示汽车转向传动比

4.2　系统时变参量不确定性的描述及车辆工况的设定(Description of time variant parameter uncertainty and the setting of vehicle condition)

由上述车辆系统模型(12)可知, 模型时变参量$\boldsymbol{\rho}(t)$是关于$v_x(t)$和$\mu(t)$的函数. 设定采样周期为0.01s, 对模型(12)离散化后, 时变参数$v_x(t)$和$\mu(t)$的不确定随机摄动可以表示为如下形式:

$$\begin{cases} v_x(k)=v_{x0}(k)+\Delta v_x(k), \\ \quad MIN_{\Delta v}\leqslant \Delta v_x(k)\leqslant MAX_{\Delta v} \\ \mu(k)=\mu_0(k)+\Delta\mu(k), \\ \quad MIN_{\Delta\mu}\leqslant \Delta\mu(k)\leqslant MAX_{\Delta\mu} \end{cases} \tag{13}$$

其中: $v_{x0}(k)$和$\mu_0(k)$分别是已知的设定车速和路面附着系数标称值(在下文的车辆工况中设定), 参数$MAX_{\Delta v}$、$MAX_{\Delta\mu}$和$MIN_{\Delta v}$、$MIN_{\Delta\mu}$分别是对应的不确定随机摄动$\Delta v_x(t)$和$\Delta\mu(t)$变化范围的上、下界, 在仿真中设定为$\Delta v_x(k)\in[-0.833, 0.833]$m/s, $\Delta\mu(k)\in[-0.2, 0.2]$. 据此, 我们可以计算出相应的参变量$\boldsymbol{\rho}(k)$的标称值$\boldsymbol{\rho}_0(k)$及其不确定随机摄动$\Delta\boldsymbol{\rho}(k)$的变化范围. 从而, 时变参量$\boldsymbol{\rho}(k)$可以表示为$\boldsymbol{\rho}(k)=\boldsymbol{\rho}_0(k)+\Delta\boldsymbol{\rho}(k)$, 其中: $\boldsymbol{\rho}_0(k)$为标称量; $\Delta\boldsymbol{\rho}(k)$为摄动量. 为便于叙述, 下文以连续时间量纲进行阐述.

车辆工况的设定: 汽车在$t=[0,\ 10]$s内匀减速行驶, 方向盘转角输入信号$\delta_s(t)$变化如图2; 再由纵向车速$v_x(t)$和路面附着系数$\mu(t)$可得对应的参变量$\boldsymbol{\rho}(t)$各元素的时变标称曲线和含有不确定性摄动的实际曲线如图3, 图中实线为标称变化曲线, 点线为加入考虑不确定摄动的变化曲线.

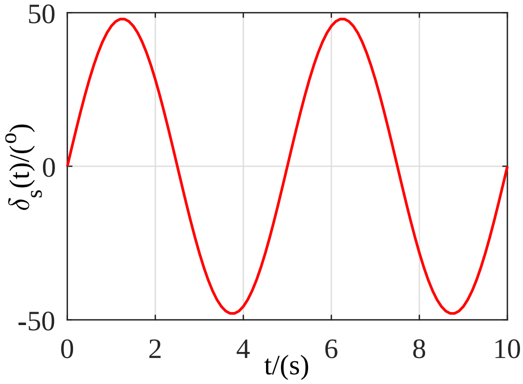

图 2　方向盘转角输入$\delta_s(t)$

Fig. 2　Steering wheel angle input $\delta_s(t)$

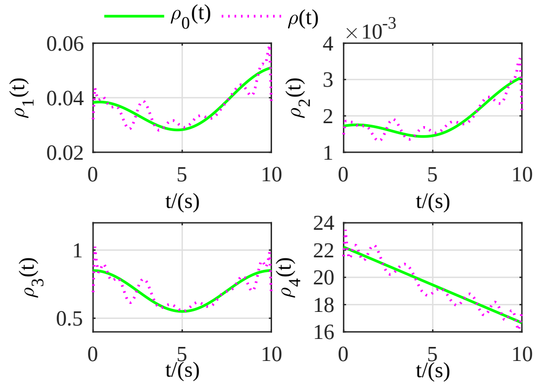

图 3　车辆时变参量$\boldsymbol{\rho}(t)$的变化曲线

Fig. 3　Curves of vehicle time-varying parameters $\boldsymbol{\rho}(t)$

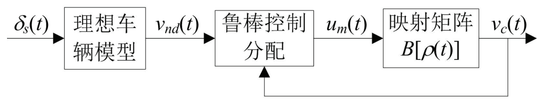

图 4　开环控制结构

Fig. 4　Open-loop control structure

4.3　开环仿真(Simulation of open-loop mode)

对上述车辆系统进行结构如图4所示的开环仿真, 通过对比3种控制分配方法所得实际分配结果的性能, 以验证本文鲁棒控制分配算法的优越性. 图4的开环控制结构中, 以驾驶员方向盘转角$\delta_s(t)$为输入, 根据理想车辆模型[1]:

$$\boldsymbol{x}_d(t)=\Big[\beta_d(t)\,,\gamma_d(t)\Big]^{\mathrm{T}}=\Big[0\,,\frac{\delta_s(t)v_{x0}(t)}{i_sL}\Big]^{\mathrm{T}} \tag{14}$$

可得到车辆的期望行驶状态$\boldsymbol{x}_d(t)$, 其中$L=a+b$, $\beta_d(t)$是期望的质心侧偏角, $\gamma_d(t)$是期望的车身横摆角速度. 从而可由$\boldsymbol{x}_d(t)$和系统模型(12) 得到系统的期望伪控指令: $\boldsymbol{v}_{nd}(t)=\dot{\boldsymbol{x}}_d(t)-A[\boldsymbol{\rho}(t)]\boldsymbol{x}_d(t)$, 其中: $\boldsymbol{v}_{nd}(t)=[v_{nd1}(t),v_{nd2}(t)]^{\mathrm{T}}$, 式中$v_{nd1}(t)$表示伪控指令1, $v_{nd2}(t)$表示伪控指令2, $\dot{\boldsymbol{x}}_d(t)=A[\boldsymbol{\rho}(t)]\boldsymbol{x}_d(t)+\boldsymbol{v}_{nd}(t)$. 进而根据已知的$\boldsymbol{v}_{nd}(t)$, 采用本文鲁棒控

制分配算法、文献[1] 的伪逆法控制分配算法、文献[1]的常规4WS比例分配算法分别得到相应的前后轮分配输入$\delta_f(t)$和$\delta_r(t)$及其实际伪控指令$\boldsymbol{v}_c(t)$, 仿真实验结果如图5、6 所示. 图5(a)、(b)、(c) 分别为常规4WS、伪逆法控制分配、鲁棒控制分配算法得到的前后轮转角.

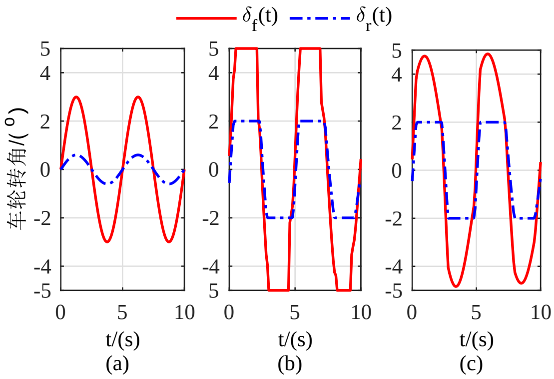

图 5 不同控制分配算法获得的前后轮转角

Fig. 5 Angles of the front and rear wheels for different control allocation algorithms

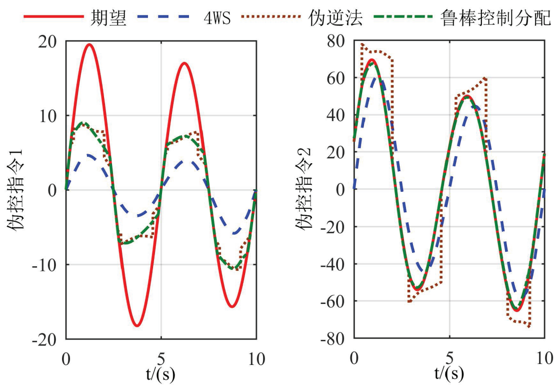

图 6 不同控制分配算法获得伪控指令与期望伪控指令对比

Fig. 6 Comparison of pseudo control commands and expected pseudo control commands

观察上述仿真实验结果, 从图5(a)的前后轮转角可以看出, 常规4WS方法在满足车轮转角约束的条件下, 没有充分利用给定的前后轮转角幅度约束, 不具备根据前后轮转角约束调整前后轮实际转角大小的能力, 这也是其实际伪控指令与期望伪控指令偏差较大的主要原因. 对比伪逆分配算法和本文鲁棒分配算法的结果(见图5(b)、5(c))可见, 两者的前后轮转角幅度约束都得到了充分利用, 但本文算法在整个仿真过程中并没有使前轮达到转角约束极限, 保证了车辆在极限工况下具有更强的可操纵性. 从图6的结果可见: 对比三种算法所获得实际伪控指令与期望值的偏差, 伪逆法与本文算法较小, 而常规4WS算法在整个仿真过程中与期望值都有较大偏差. 比较伪逆法和本文算法, 从伪控指令1来看它们与期望值的偏差基本一致; 而从伪控指令2可见本文算法与期望值基本无偏差, 伪逆法却存在一定偏差, 由此可以看出, 伪逆法在前后轮都达到转角极限后, 车辆的控制已达到极限, 不能再通过车轮转角的变化来减小伪控指令偏差, 而本文算法前轮没有达到转角极限, 它可通过再调整前轮转角来减小伪控指令偏差使车辆的可操纵性更强.

为了比较3种分配算法的鲁棒性能, 进行1000次随机实验, 计算不同算法下各伪控指令的平均误差和最大误差见表2. 由表2可以看出, 本文算法获得的误差最小, 降低了不确定性对控制分配结果的影响. 综合上述仿真结果, 可得出: 本文给出的鲁棒控制分配方法具有更强的鲁棒性, 可获得更合理的分配解和更精确的伪控指令, 使汽车前后轮转角具有更好的控制效果.

表 2 控制分配误差对比

Table 2 Errors comparison of control allocation results

算法	平均误差	(°/s) (°/s^2)	最大误差	(°/s) (°/s^2)
4WS算法	8.2925		8.4498	
	14.4631		16.1936	
伪逆法	4.3172		4.6273	
	9.3111		11.849	
本文算法	4.1638		4.1985	
	2.1239		3.5805	

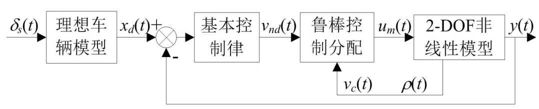

图 7 基于控制分配的车辆闭环控制系统结构图

Fig. 7 Structure of closed-loop control system based on control allocation

4.4 闭环仿真(Simulation of closed-loop system)

为了进一步分析本文鲁棒控制分配算法的闭环控制效果, 以下进行车辆2-DOF模型过驱动控制系统的闭环仿真, 控制结构图如图7. 其中, 闭环系统的输出$\boldsymbol{y}(t)$分别为体现汽车操纵稳定性的车身状态$\beta(t)$和$\gamma(t)$, 整个控制过程要求$\boldsymbol{y}(t)$能跟踪由理想车辆模型得到的期望状态$\boldsymbol{x}_d(t)$的变化, 上层的基本控制律采用LQR调节器, 此时, 整个闭环系统是渐近稳定的[32]. 三种不同控制分配算法得到的闭环仿真结果如图8所示.

由图8可以看出: 采用常规4WS方法, 由于系统的输出状态在整个控制过程中对期望状态的跟踪都有较大偏差, 从而使汽车车身不易控制, 在车辆行驶中对驾驶员的技术要求更高. 而相对于常规4WS方法, 伪逆控制分配法和本文的鲁棒控制分配算法, 都明显提高了汽车操纵稳定性, 质心侧偏角$\beta(t)$在整个控制过程中都明显减小, 横摆角速度$\gamma(t)$对于期望

值$\gamma_d(t)$有着更好的跟踪性能. 对比伪逆控制分配法与本文鲁棒控制分配算法的仿真曲线, 可以明显看出, 采用本文算法得到的质心侧偏角$\beta(t)$峰值更小, 对横摆角速度$\gamma(t)$的跟踪几乎无偏差, 而采用伪逆控制分配法在横摆角速度的峰值附近明显有一定偏差, 可能会使车身偏离行驶路线. 因此, 本文给出的鲁棒控制分配算法对车辆的操纵稳定性具有更好的控制效果. 同时, 我们对不同工况下车辆的开/闭环仿真实验结果也都验证了这一结论.

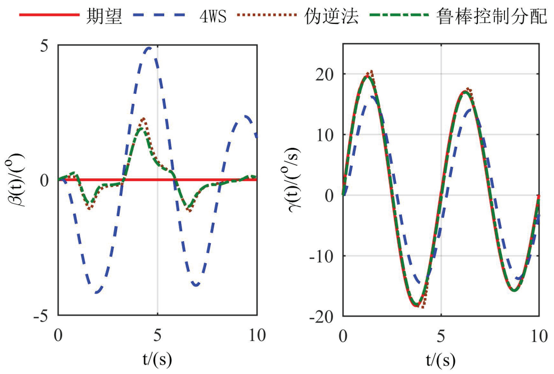

图 8　闭环系统输出响应曲线

Fig. 8　Output response of closed-loop system

5　结论(Conclusion)

本文研究了一类时变参量存在不确定摄动的LPV过驱动系统的鲁棒控制分配问题. 考虑了实际工程中执行机构的物理限制约束, 根据最优化理论, 首先将控制分配问题建模为含有未知不确定时变摄动的有约束最优化问题, 进而, 通过向量变换技术和鲁棒凸优化方法, 将上述有约束最优化问题转换为确定性的有约束锥二次凸优化问题, 由此得到了一种合理分配系统控制指令的鲁棒控制分配算法. 文中通过某四轮电动汽车模型的对比仿真实验, 验证了采用本文提出的鲁棒控制分配算法能保证车辆有效跟踪期望伪控制指令, 使前后轮转角幅值变化更加合理, 提高了车辆的操纵稳定性.

本文的控制分配算法仍具有一定的保守性, 为此, 一方面要寻找更适用实际工程的分配优化目标函数及其求解算法; 另一方面结合基本控制律的设计, 深入研究鲁棒控制分配算法对闭环系统稳定性的影响. 这些都是后续研究的主要课题.

参考文献(References):

[1] FENG C, DING N G. Control allocation algorithm for over-actuated electric vehicles[J]. *Journal of Central South University*, 2014, 21(10): 3705 – 3712.

[2] GAI W D, WANG H L. Closed-loop dynamic control allocation for aircraft with multiple actuators[J]. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2013, 26(3): 676–686.

[3] JOHANSEN T A, FOSSEN T I. Control allocation A-survey[J]. *Automatica*, 2013, 49(5): 1087–1103.

[4] CHEN Yong, DONG Xinmin, XUE Jianping, et al. Robust linear parameter-varying predictive tracking control scheme for over-actuated vehicle[J]. *Control Theory & Applications*, 2013, 30(4): 432–442.
(陈勇, 董新民, 薛建平, 等. 过驱动飞行器线性参变鲁棒预测跟踪控制策略 [J]. 控制理论与应用, 2013, 30(4): 432–442.)

[5] MA Jianjun, LI Wenqiang, ZHENG Zhiqiang, et al. Control of allocation under uncertainty based on robust optimization[J]. *Control Theory & Applications*, 2010, 27(6): 731 – 744.
(马建军, 李文强, 郑志强, 等. 不确定条件下控制分配问题的鲁棒优化方法 [J]. 控制理论与应用, 2010, 27(6): 731 – 744.)

[6] YU Zhuoping, YANG Pengfei, XIONG Lu. Application of control allocation in distributed drive electric vehicle[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2014, 50(18): 99–107.
(余卓平, 杨鹏飞, 熊璐. 控制分配理论在车辆动力学控制中的应用 [J]. 机械工程学报, 2014, 50(18): 99–107.)

[7] TOHIDY S, SEDIGH A K. Adaptive fault tolerance in automotive vehicle using control allocation based on the pseudo inverse along the null space for yaw stabilization[C] //*The 3rdInternational Conference on Control, Instrumentation, and Automation*. Tehran, Iran: IEEE, 2013, 12: 174–179.

[8] ORR J S, SLEGERS N J. High-efficiency thrust vector control allocation[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2014, 37(2): 374–382.

[9] HENRIQUE C, CARDOZO D I K, REGINATTO R, et al. Bank of controllers and virtual thrusters for fault-tolerant control of autonomous underwater vehicles[J]. *Ocean Engineering*, 2016, 121(15): 210–223.

[10] ENNS D. Control allocation approach[C] //*Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit*. Boston, MA, United States: AIAA, 1998, 8: 98–108.

[11] ARUN KISHORE W C, SIDDHARTHA S, GOSAIDAS R. Disturbance rejection and control allocation of over-actuated systems[C] //*2006 IEEE International Conference on Industrial Technology*. Mumbai, India: IEEE, 2006, 12: 1054–1059.

[12] BODSON M. Evaluation of optimization methods for control allocation[J]. *Journal of Guidance Control & Dynamics*, 2002, 25(4): 703–711.

[13] DURHAM W C. Constrained control allocation[J]. *Journal of Guidance Control Dynamics*, 1993, 16(4): 717–725.

[14] POONAMALLEE V L, YURKOVICH S, SERRANI A, et al. A nonlinear programming approach for control allocation[C] //*Proceedings of the 2004 American Control Conference*. Boston, MA: IEEE, 2004, 6: 1689–1694.

[15] YAO Congchao, WANG Xinmin, CHEN Xiao, et al. Reentry flight control allocation research based on improved multi-objective genetic algorithm[J]. *Journal of Northwestern Polytechnical University*, 2014, 32(2): 315–322.
(姚从潮, 王新民, 陈晓, 等. 基于改进多目标遗传算法的再入飞行控制分配研究 [J]. 西北工业大学学报, 2014, 32(2): 315–322.)

[16] VANEK T P, BÁLINT , SZABÓ Z, et al. Supervisory fault tolerant control of the GTM UAV using LPV methods[J]. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, 2015, 25(1): 117–131.

[17] YU B, ZHU J H, XUE X H, et al. The design for robust controller for hypersonic vehicle based on LPV model[C] //*International Conference on Intelligent Control and Information Processing*. Dalian, China: IEEE, 2010, 8: 43–49.

[18] WANG Q, LI Q, CHENG N, et al. Robust control allocation method in the presence of control effector failure[C] //*2014 IEEE International Conference on Information and Automation*. Hailar, China: IEEE, 2014, 7: 660–664.

[19] BENETAZZO F, GIANLUCA I, SAURO L, et al. Dynamic positioning of a marine vessel using DTVSC and robust control allocation[C] //*2012 20th Mediterranean Conference on Control & Automation*. Barcelona, Spain : IEEE, 2012, 7: 1211–1216.

[20] AN S I, KWON D S. Robust control allocation of redundantly actuated variable structure systems[C] //*International Conference on Control, Automation and Systems*. Gyeonggi do, South Korea: IEEE, 2010, 10: 491–496.

[21] DIDIER T, PHILLIPE W, ABBAS C, et al. Optimization-based reliable control allocation design for over-actuated systems[C] //*2015 International Conference on Unmanned Aircraft Systems*. Denver, CO, USA: IEEE, 2015, 6: 1225–1230.

[22] JOHANSEN T A, FOSSEN T I, et al. Efficient optimal constrained control allocation via multi-parametric programming[J]. *Journal of Guidance Control & Dynamics*, 2012, 28(3): 506–515.

[23] IGTHORSSON D O, SERRANI A, BOLENDER M A, et al. LPV control design for over-actuated hypersonic vehicles models[C] //*AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit*. Chicago, IL, United states: AIAA, 2009, 8: 6280–6304.

[24] WANG R R, ZHANG H, WANG J M. Linear Parameter-Varying-based fault-tolerant controller design for a class of over-actuated nonlinear systems with applications to electric vehicles[J]. *IET Control Theory & Applications*, 2014, 8(9): 705–717.

[25] LU B, WU F, KIM S W. Linear Parameter-Varying anti windup compensation for enhanced flight control performance[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2005, 28(3): 494–505.

[26] BEN-TAL A, GORYASHKO A, GUSLITZER E, et al. Adjustable robust solution of uncertain linear programs[J]. *Mathematical Programming*, 2004, 99(2): 351–376.

[27] BEN-TAL A, NEMIROVSKI A. On polyhedral approximations of the second-order cone[J]. *Mathematics of Operations Research*, 2001, 26(2): 193–205.

[28] BEN-TAL A, NEMIROVSKI A. Robust solution of linear programming problems contaminated with uncertain data[J]. *Mathematical Programming*, 2000, 88(3): 411–424.

[29] BEN-TAL A, NEMIROVSKI A. Robust solution to conic quadratic problems and their applications[J]. *Optimization and Engineering*, 2008, 9(1): 1–18.

[30] TEIXEIRA F C A, BERGEN S W A, ANTONIOU A. Signal recovery method for compressive sensing using relaxation and second-order cone programming[C] //*2011 IEEE International Symposium of Circuits and Systems*. Rio De Janeiro, Brazil: IEEE, 2011, 5: 2125–2128.

[31] HENRION D, LASSERRE J B. GloptiPoly: global optimization overpolynomials with Matlab and SeDuMi[C] //*Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control Decision and Control*. Las Vegas, Nevada USA: IEEE, 2002, 12: 747–752.

[32] WANG R R, ZHANG H, WANG J M. Robust lateral motion control of four-wheel independently actuated electric vehicles with tire force saturation consideration[J]. *Journal of the Franklin Institute-engineering and applied mathematics*, 2015, 352(2): 645–668.

附录 A(Appendix A)

首先把式(10)带入优化模型式(8)得:

$$\begin{cases} \min \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}(k) \\ \text{s.t.} \quad \boldsymbol{m}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}(k) \geqslant e_i(k), i = 1, \cdots, 5m+l; \\ \boldsymbol{n}_j^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{\rho}_0(k)]\boldsymbol{z}(k) + \boldsymbol{\kappa}_j^{\mathrm{T}}[\Delta\boldsymbol{\rho}(k)]H_j\boldsymbol{z}(k) - \\ f_j(k) \geqslant 0, j = 1, \cdots, 2l, \\ \forall \big\|\boldsymbol{\kappa}_j[\Delta\boldsymbol{\rho}(k)]\big\|_2 \leqslant \varepsilon. \end{cases} \tag{A-1}$$

然后把式(A-1)的约束放缩可得:

$$\begin{cases} \min \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}(k) \\ \text{s.t.} \quad \boldsymbol{m}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}(k) \geqslant e_i(k), i = 1, \cdots, 5m+l; \\ \boldsymbol{n}_j^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{\rho}_0(k)]\boldsymbol{z}(k) + \\ \min\limits_{\boldsymbol{\kappa}_j[\Delta\boldsymbol{\rho}(k)]\in\Xi_j} \boldsymbol{\kappa}_j^{\mathrm{T}}[\Delta\boldsymbol{\rho}(k)]H_j\boldsymbol{z}(k) - \\ f_j(k) \geqslant 0, j = 1, \cdots, 2l, \\ \forall \big\|\boldsymbol{\kappa}_j[\Delta\boldsymbol{\rho}(k)]\big\|_2 \leqslant \varepsilon, \\ \forall \Xi_j = \left\{\boldsymbol{\kappa}_j[\Delta\boldsymbol{\rho}(k)] \ : \big\|\boldsymbol{\kappa}_j[\Delta\boldsymbol{\rho}(k)]\big\|_2 \leqslant \varepsilon\right\}. \end{cases} \tag{A-2}$$

此时, 有推演关系(A-2)⇒ (A-1) ⇔(8)成立. 接下来处理式(A-2)中的: $\min\limits_{\boldsymbol{\kappa}_j[\Delta\boldsymbol{\rho}(k)]\in\Xi_j} \boldsymbol{\kappa}_j^{\mathrm{T}}[\Delta\boldsymbol{\rho}(k)]H_j\boldsymbol{z}(k)$. 根据向量范数的性质可知:

$$\begin{aligned} &\big\|\boldsymbol{\kappa}_j^{\mathrm{T}}[\Delta\boldsymbol{\rho}(k)]H_j\boldsymbol{z}(k)\big\|_2 = \big\|\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(k)H_j \\ &\boldsymbol{\kappa}_j[\Delta\boldsymbol{\rho}(k)]\big\|_2 \leqslant \big\|\boldsymbol{\kappa}_j[\Delta\boldsymbol{\rho}(k)]\big\|_2\big\|H_j\boldsymbol{z}(k)\big\|_2 \end{aligned} \tag{A-3}$$

又由式(10)知:

$$\max(\big\|\boldsymbol{\kappa}_j[\Delta\boldsymbol{\rho}(k)]\big\|_2) = \varepsilon \tag{A-4}$$

进而由式(A-3)和式(A-4)可得:

$$\max_{\boldsymbol{\kappa}_j[\Delta\boldsymbol{\rho}(k)]\in\Xi_j} \boldsymbol{\kappa}_j^{\mathrm{T}}[\Delta\boldsymbol{\rho}(k)]H_j\boldsymbol{z}(k) = \varepsilon\big\|H_j\boldsymbol{z}(k)\big\|_2 \tag{A-5}$$

所以有:

$$\min_{\boldsymbol{\kappa}_j[\Delta\boldsymbol{\rho}(k)]\in\Xi_j} \boldsymbol{\kappa}_j^{\mathrm{T}}[\Delta\boldsymbol{\rho}(k)]H_j\boldsymbol{z}(k) = -\varepsilon\big\|H_j\boldsymbol{z}(k)\big\|_2 \tag{A-6}$$

把式(A-6)代入式(A-2)可得式(11). 转化毕.

附录 B(Appendix B)

针对系统模型(4), 设定上层基本控制律为: $\boldsymbol{v}_{nd}(k) = F(k)\boldsymbol{x}(k)$, $F(k)$为状态反馈增益, 则在没有控制分配环节时, 系统P_v的闭环模型表达式为:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}(k+1) = A_c[\boldsymbol{\rho}(k)]\boldsymbol{x}(k) \\ \boldsymbol{y}(k) = C\boldsymbol{x}(k) \end{cases} \tag{B-1}$$

其中$A_c[\boldsymbol{\rho}(k)] = A[\boldsymbol{\rho}(k)] + B_v[\boldsymbol{\rho}(k)]F(k)$. 由正文图1可知, 系统$\mathrm{P}_v$的实际输入为$\boldsymbol{v}_c(k)$, 则相应的整个闭环系统其实就是对系统(B-1)加入一个分配误差扰动量. 令该扰动量为: $\boldsymbol{e}(k) = \boldsymbol{v}_c(k) - \boldsymbol{v}_{nd}(k)$, 则基于鲁棒控制分配的闭环系统模型可描述为:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}(k+1) = A_c[\boldsymbol{\rho}(k)]\boldsymbol{x}(k) + B_v[\boldsymbol{\rho}(k)]\boldsymbol{e}(k) \\ \boldsymbol{y}(k) = C\boldsymbol{x}(k) \end{cases} \tag{B-2}$$

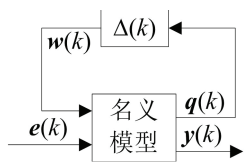

图 B.1 不确定线性分式系统

Fig. B.1 Uncertain linear fractional system

由于在实际工程中具有参量不确定的系统, 大多都可描述为不确定线性分式模型如图B.1所示[25]. 为了分析模型(B-2) 中时变参量摄动因子$\Delta\boldsymbol{\rho}(k)$对系统稳定性的影响, 首先把它转化成不确定线性分式模型, 以分离出不确定因素. 已知$A[\boldsymbol{\rho}(k)]$和$B[\boldsymbol{\rho}(k)]$关于$\boldsymbol{\rho}(k)$连续可微, 则矩阵$A_c[\boldsymbol{\rho}(k)]$、$B_v[\boldsymbol{\rho}(k)]$、$B_u[\boldsymbol{\rho}(k)]$也分别是$\boldsymbol{\rho}(k)$的连续可微函数. 把$A_c[\boldsymbol{\rho}(k)]$、$B_v[\boldsymbol{\rho}(k)]$按照多元泰勒级数展开, 有如下结果:

1). $B_v[\boldsymbol{\rho}(k)] \approx B_v[\boldsymbol{\rho}_0(k)] + B_{v\Delta}[\Delta\boldsymbol{\rho}(k)]$, 其中: $B_{v\Delta}^{\mathrm{T}}[\Delta\boldsymbol{\rho}(k)]B_{v\Delta}[\Delta\boldsymbol{\rho}(k)] \leqslant M_B$, M_B为已知的对称正定阵，可根据$\Delta\boldsymbol{\rho}(k)$的上下界确定; $B_{v\Delta}[\Delta\boldsymbol{\rho}(k)] = L_{\Delta\rho}B_v$, $L_{\Delta\rho}B_v$表示矩阵函数$B_v[\boldsymbol{\rho}_0(k)]$沿向量$\Delta\boldsymbol{\rho}(k)$的1阶李导数.

2). $A_c[\boldsymbol{\rho}(k)] \approx A_c[\boldsymbol{\rho}_0(k)] + A_{c\Delta}[\Delta\boldsymbol{\rho}(k)]$, 其中: $A_{c\Delta}^{\mathrm{T}}[\Delta\boldsymbol{\rho}(k)]A_{c\Delta}[\Delta\boldsymbol{\rho}(k)] \leqslant M_A$, M_A为已知的对称正定阵，可根据$\Delta\boldsymbol{\rho}(k)$的上下界确定; $A_{c\Delta}[\Delta\boldsymbol{\rho}(k)] = L_{\Delta\rho}A_c$, $L_{\Delta\rho}A_c$表示矩阵函数$A_c[\boldsymbol{\rho}_0(k)]$沿向量$\Delta\boldsymbol{\rho}(k)$的1阶李导数. 则系统(B-2)可转化为如下不确定线性分式模型的形式:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}(k+1) = A_c[\boldsymbol{\rho}_0(k)]\boldsymbol{x}(k) + \\ \qquad B_v[\boldsymbol{\rho}_0(k)]\boldsymbol{e}(k) + E_1\boldsymbol{w}(k) \\ \boldsymbol{y}(k) = C\boldsymbol{x}(k) \\ \boldsymbol{q}(k) = F_1\boldsymbol{x}(k) + F_2\boldsymbol{e}(k) \\ \boldsymbol{w}(k) = \Delta(k)\boldsymbol{q}(k) \end{cases} \tag{B-3}$$

其中: $E_1 = [I,\ I, 0, 0]$, $F_1 = [I, 0, 0, 0]^{\mathrm{T}}$, $F_2 = [0,\ I, 0, 0]^{\mathrm{T}}$, $\Delta(k) = \mathrm{diag}(A_{c\Delta}[\Delta\boldsymbol{\rho}(k)], B_{v\Delta}[\Delta\boldsymbol{\rho}(k)], 0, 0)$. 令向量$\boldsymbol{z}(k) = [\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(k), \boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}(k)]^{\mathrm{T}}$, 模型(B-3)又可转化为:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}(k+1) = A_c[\boldsymbol{\rho}_0(k)]\boldsymbol{x}(k) + \\ \qquad B_v[\boldsymbol{\rho}_0(k)]\boldsymbol{e}(k) + E_1\boldsymbol{w}(k) \\ \boldsymbol{z}(k) = \tilde{F}_1\boldsymbol{x}(k) + \tilde{F}_2\boldsymbol{e}(k) \\ \boldsymbol{w}(k) = \tilde{\Delta}(k)\boldsymbol{z}(k) \end{cases} \tag{B-4}$$

其中: $\tilde{F}_1 = \begin{bmatrix} C \\ F_1 \end{bmatrix}$, $\tilde{F}_2 = \begin{bmatrix} C \\ F_2 \end{bmatrix}$, $\tilde{\Delta}(k) = \begin{bmatrix} 0\ \Delta(k) \end{bmatrix}$, $\tilde{\Delta}^{\mathrm{T}}(k)\cdot\tilde{\Delta}(k) \leqslant M$, $M = \mathrm{diag}(0, M_A, M_B, 0, 0)$为已知的半正定阵. 至此, 系统(B-4)与系统(B-2)等价; 当$\boldsymbol{e}(k) = 0$时, 系统(B-4)可转化为:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}(k+1) = A_c[\boldsymbol{\rho}_0(k)]\boldsymbol{x}(k) + E_1\boldsymbol{w}(k) \\ \boldsymbol{z}(k) = \tilde{F}_1\boldsymbol{x}(k) \\ \boldsymbol{w}(k) = \tilde{\Delta}(k)\boldsymbol{z}(k) \end{cases} \tag{B-5}$$

此时, 系统(B-5)与系统(B-1)等价.

综上分析可知, 研究包含鲁棒控制分配环节的过驱动系统闭环模型(B-2)的稳定性, 即是研究系统(B-4)的稳定性. 由系统(B-4)可以看出, 影响其稳定性的因素有两个方面, 一是由控制分配环节所造成的分配误差量$\boldsymbol{e}(k)$; 二是由时变摄动量$\Delta\boldsymbol{\rho}(k)$造成的系统扰动量$\boldsymbol{w}(k)$. 但是, 根据正文中系统(1)的设定条件S1)可知, $\boldsymbol{e}(k)$ 对整个闭环系统(B-4) 的渐近稳定性不造成影响. 因此, 系统(B-4)的稳定性由系统(B-5)的稳定性来决定. 又由Lyapunov稳定性理论可知, 系统(B-5) 渐近稳定的充要条件是: 存在对称正定阵$P(k)$, 基本控制律$F(k)$和正实数γ, 使

$$\begin{bmatrix} \begin{matrix} A_c^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{\rho}_0(k)]P(k+1)\cdot \\ A_c[\boldsymbol{\rho}_0(k)] - P(k) \end{matrix} & A_c^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{\rho}_0(k)]P(k+1)E_1 \\ E_1^{\mathrm{T}}P(k+1)A_c[\boldsymbol{\rho}_0(k)] & \begin{matrix} E_1^{\mathrm{T}}P(k+1)E_1 - \\ \gamma^2 I \end{matrix} \end{bmatrix} + \gamma^2 \begin{bmatrix} \tilde{F}_1^{\mathrm{T}} \\ 0 \end{bmatrix} M \begin{bmatrix} \tilde{F}_1\ 0 \end{bmatrix} < 0 \tag{B-6}$$

成立, 且有$\|T_w(z)\|_\infty \leqslant \gamma$成立, $T_w(z)$为$\boldsymbol{w}(k)$到$\boldsymbol{z}(k)$的传递函数. 因此, 对于系统P_v(即正文中模型(4a)), 只需设计合适的基本控制律$F(k)$来保证式(B-6)成立, 则系统(B-5)渐近稳定, 系统(B-4)也渐近稳定. 所以, 在基本控制律保证系统(B-5)渐近稳定后, 时变摄动量$\Delta\boldsymbol{\rho}(k)$在$[\Delta\boldsymbol{\rho}_{\max}\ \ \Delta\boldsymbol{\rho}_{\min}]$内变化时, 对基于本文鲁棒控制分配算法的LPV 过驱动系统(B-4)闭环稳定性不造成影响.

作者简介:

张慎鹏　(1992–), 男, 硕士研究生, 主要研究方向控制分配、容错控制, E-mail: 977620773@qq.com;

张登峰　(1973–), 男, 教授、博士生导师, 主要研究方向动态系统的故障诊断与容错控制理论, E-mail: mydfzhang@qq.com;

王执铨　(1939–), 男, 教授、博士生导师, 主要研究方向复杂系统的建模、控制与优化, 容错控制理论, E-mail: wangzqwhz@gmail.com.