第 35 卷第 1 期
2018 年 1 月

控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications

Vol. 35 No. 1
Jan. 2018

DOI: 10.7641/CTA.2017.70066

排队系统定价控制问题的研究综述

陈 莎, 夏 俐†

(清华大学 自动化系 智网中心, 北京 100084)

摘要: 定价作为服务系统价值因素的调控机制, 在拥塞控制、收益管理和服务质量控制等领域有重要的应用. 服务提供商设计定价策略使得系统性能在诱导的顾客行为下达到最优. 排队模型是分析服务系统性能的重要模型. 本文介绍了排队系统定价控制的基本要素, 包括排队模型、顾客行为、性能指标以及定价策略类型, 围绕静态定价策略、动态定价策略和优先级定价策略, 详细综述了排队系统定价控制的研究现状, 然后简要介绍了作者针对排队网络动态定价问题的最新研究进展, 最后总结了该领域的研究现状、尚未解决的问题、当前的研究热点以及未来的发展方向.

关键词: 排队系统; 定价控制; 静态定价; 动态定价; 优先级定价

引用格式: 陈莎, 夏俐. 排队系统定价问题的研究综述. 控制理论与应用, 2018, 35(1): 41 – 55

中图分类号: TP273　　**文献标识码**: A

Research review of pricing control for queueing systems

CHEN Sha, XIA Li†

(Center for Intelligent and Networked Systems (CFINS), Department Automation, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract: Pricing is a control mechanism to adjust value factors for service facilities. It has important application in congestion control, revenue management and quality-of-service control, etc. Service providers design pricing strategy to induce customers to behave in a way such that system performance attains the optimum. Queueing models are fundamental to analyzing performance of service facilities. In this paper, the basic elements in pricing control for queueing systems, including queueing models, customer behaviors, system performance measures and pricing strategy types are introduced. The detailed literature on pricing control for queueing systems is reviewed, which is classified according to three major categories: static pricing, dynamic pricing and priority pricing. Then the authors' latest research progress on dynamic pricing for queueing networks is briefly introduced. Finally, the research state of art is summarized, the unresolved problems are discussed, and the current research focuses as well as the possible new directions in this area are concluded.

Key words: queueing systems; pricing control; static pricing; dynamic pricing; priority pricing

Citation: CHEN Sha, XIA Li. Research review of pricing control for queueing systems. *Control Theory & Applications*, 2018, 35(1): 41 – 55

1 引言(Introduction)

定价策略是服务提供商为产品或者服务制定价格的策略. 影响定价策略的因素有成本、市场份额、产品质量等. 在定价控制中, 顾客会根据价格做出相应的购买决策, 因此服务提供商在制定价格时需要考虑潜在顾客的行为. 在有市场竞争的情况下, 服务提供商的定价策略会受到其他服务商定价策略的影响. 定价策略在生产管理、收益管理以及拥塞控制方面都有广泛的应用. 制造商根据当前库存量制定每类产品的价格从而调节产品的购买人数. 最大利润通常是收益管理领域定价策略的研究目标. 机票、电费、道路收费等属于这类问题的研究范畴. 为有效控制网络拥塞, 网络运营商可以根据当前上网用户人数来收取带宽费用. 文献研究定价策略的两类基本模型为库存模型(inventory model)和排队模型(queueing model). 在库存模型中, 交付时间(leadtime)是固定的, 价格根据当前库存状态而确定; 而在排队模型中, 完成服务时间是随机的, 价格被用来调节排队系统的到达率, 并不一定与当前排队队长有直接关系[1]. 排队系统是建模服务系统的重要模型. 在排队系统中, 服务质量的评

收稿日期: 2017−02−07; 录用日期: 2017−09−04.
†通信作者. E-mail: xial@mail.tsinghua.edu.cn; Tel.: +86 10-62793029.
本文责任编委: 奚宏生.
国家重点研发计划(2016YFB0901902), 国家自然科学基金项目(61573206, 61203039, U1301254), 苏州–清华创新引领行动专项(2016SZ0202)资助.
Supported by the Key R&D Project of China (2016YFB0901902), the National Natural Science Foundation of China (61573206, 61203039, U1301254) and the Special Fund of SuZhou-Tsinghua Innovation Leading Action (2016SZ0202).

估因素包括服务收益、价格以及期望延迟成本. 本文针对排队模型定价控制策略的研究做综述.

排队模型的定价问题从20世纪60年代起开始引起学者们的关注和研究. Refael Hassin和Moshe Haviv[2]以及Refael Hassin[3]对该领域的文献做过详细的综述. 这篇综述主要介绍和总结了该领域的代表性文献和最新研究进展.

排队模型和顾客行为是研究排队系统定价策略最为重要的假设. 根据新来顾客是否可以观测到当前系统的状态信息或者排队人数, 排队模型可分为两类: 一类是可观测的排队模型(observable queue); 一类是不可观测的排队模型(unobservable queue). 在可观测的排队系统中, 新来顾客可利用当前系统状态的信息判断是否应该进入系统接受服务; 在不可观测的排队系统, 新来顾客不能获取当前系统状态的信息. 系统状态信息可以是排队队长、平均等待时间等. 不可观测的排队模型多见于静态定价控制问题. 一些特定假设的排队系统可以是部分可观测的排队模型(partially observable queue). 譬如在排队网络或者多顾客类型的单个服务系统中, 系统状态定义为每个服务器或者每类顾客的排队人数所组成的多维向量. 当新来顾客仅获知当前系统总人数而不知道系统状态时, 所假设的排队模型属于部分可观的排队模型. 另外根据顾客或者服务请求到达过程和服务过程服从的分布函数, 研究定价问题的排队模型可做进一步的划分.

在排队系统定价问题中, 顾客行为的假设直接影响到所设计的定价策略. 描述顾客行为的参数包括服务收益(service value)、支付水平(willingness to pay)、服务需求 (service requirement)、服务时间 (service time) 以及单位时间的期望延迟成本 (expected delay cost per unit of time). 服务收益是指顾客从服务中获得的收益. 延迟(delay)指逗留(或等待)时间. 延迟成本是指由逗留时间所产生的费用. 在定制生产排队系统(make-to-order queue) 中, 延迟是指预期交付时间(lead-time)或者实际处理时间(actual processing time). 有延迟成本的顾客被称为延迟敏感(delay-sensitive)顾客. 根据顾客行为参数是否相同或者服从同一分布, 顾客类型分为同类(homogeneous)和异类(heterogeneous). 顾客进入系统接受服务的决策逻辑也是描述顾客行为的另一要素. 最为常见的决策逻辑是当顾客的净收益大于零时, 顾客进入系统接受服务, 否则离开. 对于延迟敏感的顾客, 净收益定义为服务收益减去期望延迟成本和支付费用. 还有文献考虑了更为复杂的顾客策略行为(strategic behavior). 譬如, 顾客根据服务机构公布的价格和收益期望适时地选择进入系统接受服务的时间, 顾客基于价格和其他顾客的决策选择最大自身净收益的购买量, 后者在基于博弈论的文献中较为常见.

在很多研究拥塞定价控制的文献中, 到达率和服务速率被同时作为系统性能的优化变量. 到达率通过价格来调节, 服务速率直接可控. 一些文献称服务速率为capacity或service capacity. 在排队系统定价策略的文献中, 最常见的两个性能指标为社会收益(social welfare)和利润(profit). 社会收益是衡量服务机构和顾客总体从服务中获取的收益. 社会收益被定义为接受服务的顾客的服务收益之和减去系统的运营成本 (operating cost) 和存储成本 (holding cost). 运营成本是服务速率或者到达率的函数. 存储成本是由顾客等待时间产生的成本. 利润是指服务机构通过给顾客提供服务收取的费用减去服务机构的运营成本.

定价策略根据价格是否随时间变化分为静态定价策略(static pricing)和动态定价策略(dynamic pricing). 静态定价策略的价格固定, 实施简单. 动态定价策略的价格可能是系统当前人数, 剩余的资源量或者剩余销售时间的函数, 实施较为复杂. 在拥塞定价(congestion pricing)控制问题中, 动态价格随当前系统的拥塞程度而变化. 动态定价策略是收益管理(revenue management) 领域常见的研究目标, 其主要应用于航空和医疗领域.

排队系统的服务原则(service discipline)有先来先服务(first-come-first-serve, FCFS), 后来先服务(last-come-first-serve, LCFS)和优先级(priority). 在优先级服务系统中, 高优先级的顾客比低优先级顾客先接受服务, 该服务顺序与他们到达系统的时间先后无关. 优先级越高, 收取的费用越多. 优先级服务可以根据顾客的类型合理调配有限的服务资源, 在优化排队系统性能方面有重要应用. 由于研究这类问题的文献较多, 本文把它单独作为一小节综述该领域的研究进展.

2 排队系统定价问题研究现状 (Review of the literature on pricing control for queueing systems)

2.1 静态定价策略(Static pricing)

根据新来顾客是否可以观测到当前系统状态, 将静态定价控制的文献分为两类. 在可观测的排队系统, 延迟敏感的顾客可以获知当前系统的排队等待人数或者平均等待时间, 基于此信息得到服务的净收益. 在不可观测的排队系统, 服务系统提供的平均等待(或逗留)时间与系统当前状态无关.

文献[4–12] 研究了可观测排队系统的定价控制问题. Naor 最早将定价问题引入排队系统研究[4]. 文献假设顾客根据当前排队人数决定是否进入系统接受服务, 得到顾客最优策略具有阈值型结构, 最大利润的价格比最优社会收益的价格高. Yechiali[5–6], Knudsen[7], Lippman和Stidham[8], Bell和Stidham[9]研究了顾客在可观测排队系统中以最小期望延迟成本为指

标选择是否进入系统接受服务的问题. 文献得到顾客个人利益的最优策略与顾客总体(社会收益)的最优策略不同, 原因是顾客优化个人利益时没有考虑其对其他顾客带来的额外延迟费用. Ziya, Ayhan和Foley[10]假设顾客没有延迟成本, 研究了可观测的G/GI/s/m排队系统的最优定价控制策略. 文献分析了最优价格与系统容量和服务速率之间的单调关系. Ziya, Ayhan和Foley[11]将上述结论推广至服务多类顾客的排队系统. Maoui, Ayhan和Foley[12]在Ziya等[10]的工作基础上, 考虑了与顾客等待时间成比例的系统存储成本, 研究了静态价格和容量控制问题. 文献得到最优价格随系统参数的变化关系.

文献[13–22]研究了不可观测排队系统的定价策略. Edelson和Hildebrand[13]研究了服务同类顾客的单个服务台的排队系统的最优价格及性质. Littlechild[14]在Edelson和Hildebrand的问题中考虑了当顾客的服务收益不同时的最优定价策略. Mendelson[15]进一步将结论推广至GI/G/s模型. Mendelson假设顾客的服务收益服从已知的分布函数, 顾客有相同的单位时间延迟成本, 新来顾客不能观测到当前排队队长, 但可以获知平均等待时间. Mendelson得出当顾客的延迟成本是等待时间的线性函数时, 系统的利润期望加上期望延迟成本等于期望运营成本, 换句话说, 系统收取的费用只会覆盖部分的容量费用, 导致预算赤字. Dewan和Mendelson[16]在Mendelson[15]模型基础上考虑了当顾客类型相同、延迟成本为非线性函数时, 最大社会收益的定价策略. 文献表明收取顾客的费用与该顾客给其他顾客带来的延迟成本成正比. Stidham[17]在Dewan和Mendelson[16]的模型基础上, 考虑顾客到达率存在上限情况下的最优价格和服务速率控制问题. 文献证明当到达率存在上限时, 系统全局最优解不在可行域内部并且不能用一阶微分条件描述. Haviv和Randhawa[18]研究了不可观测的M/M/1排队系统在不知道实际到达率的静态定价策略. 文献得出在该定价策略下最大利润和社会收益的下界. Daniel[19]用带有随机队列的瓶颈模型描述到达、离开和排队的随机性质, 研究了大型枢纽机场的拥塞定价和容量控制问题. Yang, Guo和Wang[20]假设顾客对等待时间和价格有期望参考值, 研究了顾客的排队策略以及顾客行为在单个服务器环境中和两个服务器竞争的环境中对定价策略的影响. 邹宗保等[21]研究了垄断环境下, 机器故障加工排队系统的最优定价和顾客的决策行为. 姚树俊、陈菊红和和征[22]研究了M/M/s/k排队系统产品服务能力和定价联合优化策略. Cachon和Feldman[23]在没有排队结构的拥塞模型中, 得出没有用量限制按时间收费的订购策略比按照使用量收费的定价策略得到的利润高.

当顾客的行为不能用统一的参数来描述时, 研究的定价问题为多类顾客的定价问题. 针对多类顾客的定价策略分为两种: 统一定价(uniform pricing)和差别定价(differentiated pricing). 统一定价是对所有顾客收取相同的费用. 统一定价多为顾客类型信息不可获取情况的策略, 差别定价是在顾客类型信息已知的情况下. 根据顾客的类型提供相应等级的服务并收取相应的费用. 在排队系统中, 不同等级的服务主要体现在优先级. 研究多类顾客差别定价的文献大多属于优先级定价的范畴. 因此本文把差别定价的相关文献归入第2.3节优先级定价策略介绍.

文献[24–27]研究了多类顾客的统一定价策略. Ha[24]在M/M/1处理器共享(processor sharing)排队和M/M/s先到先服务(FCFS)排队中, 研究了顾客可以选择服务需求情况下, 诱导最优的到达率和服务需求的统一定价策略. Armony和Haviv[25]研究了两个提供相同服务的公司针对多类延迟敏感顾客的统一定价策略. 文献分别得到顾客选择策略和公司定价策略的Nash平衡点. Menache, Ozdaglar和Shimkin[26]在假设运营成本和顾客值函数为凸函数的条件下, 得到服务多类顾客的云计算系统社会收益的最优解并证明了存在统一价格诱导出最优的社会收益. Zhou, Chao和Gong[27] 研究表明顾客类型的市场结构组成和系统参数对统一定价策略有重要的影响.

鉴于服务机构和顾客可视为具有不同优化目标而又相互影响的决策个体, 基于博弈论的方法被用于研究排队系统的定价策略以及顾客的决策. 文献[28–32]用M/M/1排队模型来模拟有限带宽的链路, 并用M/M/1排队系统的平均等待时间来表示由流量引起的拥塞费用. 文献分别采用主从博弈(leader-foll-ower game)和非合作博弈(non-cooperative game) 描述顾客与网络服务供应商以及顾客之间的决策关系. Başar和Srikant[28]用分级博弈(hierarchical game) 研究服务机构在不知道顾客类型信息情况下的统一定价策略以及顾客购买带宽资源的策略. Shen和Başar[29]将该问题扩展为按顾客收取带宽资源费用的情形. Shen和Başar[30–32]在反向Stackelberg博弈框架下, 采用机制设计的思路研究了单个服务提供商的非线性定价策略. 文献[30]和[31]分别研究了有限个顾客和高负荷模式下, 在顾客类型信息对其他顾客和网络服务提供商完全已知和不已知两种情况下的非线性定价策略. 文献[32]进一步研究了顾客相互已知类型信息而服务提供商不知道顾客类型信息情况下, 高负荷模式下的非线性定价策略. Guo, Liu和Wang[33]考虑了M/M/1排队系统两个阶段的跨期(intertemporal)定价博弈问题. 顾客基于当前价格, 收益, 等待成本以及未来收益的预测来决定购买策略. 文献在社会收益和利润的指标下得到每个阶段的Nash 均衡点. Jinting Wang 和 Feng Zhang[35]研究了M/M/1重试(retrial)排队系统在顾客

选择进入系统策略的Nash均衡点处, 最大利润的定价策略以及最优社会收益的定价策略. Do, Tran等[34]用非合作博弈描述M/M/1排队系统不同用户之间的决策关系, 证明了Nash均衡点的定价策略可得到最优的社会收益. 张峰[36]、曾禎[37]等学者从博弈论角度研究了排队系统的定价策略以及顾客的策略行为.

在排队论中, 渐近分析(asymptotic analysis)是研究排队系统在高负荷(heavy traffic)的性能的常用方法. 排队系统在高负荷的定价问题得到学者们的关注. Maglaras和Zeevi[38]用大容量渐进(large-capacity asymptotics)得到提供一类服务的大容量马尔科夫排队系统价格和服务速率的近似解. Maglaras和Zeevi[39]考虑服务系统提供两类服务: 保证服务率的服务和分享剩余服务容量的服务, 研究了保证服务率服务的准入控制和实时拥塞通知机制以及分享剩余服务容量服务的静态价格策略. 文献基于扩散极限(diffusion limits)的近似分析得到最优策略的结构性质. Kumar和Randhawa[40]研究了当市场需求(到达率)增长时, 顾客延迟成本的函数形式对最大利润的定价策略和服务速率的影响. 文献表明价格和服务速率的最优解会导致系统进入利用率接近100%的高负荷模式, 利用率接近100%的速率取决于延迟成本函数的形式. Lee和Ward[41]考虑了顾客在接受服务前放弃排队的行为, 通过求解近似扩散(approximating diffusion)控制问题得到使系统进入高负荷的最优静态价格和服务速率.

2.2 动态定价策略(Dynamic pricing)

前已提及, 动态定价策略的价格可以是系统当前人数、剩余的资源量或者剩余销售时间的函数. 在排队系统中, 动态价格多为系统状态的函数, 因此一些文献称之为状态相关定价(state-dependent pricing), 即价格随系统状态的跳变而被调整.

文献[42–49]研究了简单马尔科夫排队模型的动态定价策略. Low[42]研究了M/M/s排队系统从有限价格选项中选出与系统状态相关的最优价格使得系统长期平均收益最大. 文献假设顾客的成本只有收取的费用, 得到了最优价格具有随系统状态单调递减的性质. Chen和Frank[43]在Naor的模型假设[4]下研究了动态定价问题. 文献研究了当排队队长小于阈值的动态定价策略, 证明了最优社会收益与最大利润的定价策略相同. 此外Chen和Frank还考虑了顾客服务收益不同并且不可观测的情况. Borgs等人[44]在Chen和Frank[43]的工作基础上研究了最优阈值的闭值表达式. Ata和Shneorson[45]在Mendelson[15]的模型假设下进一步考虑顾客可以观测当前状态的平均等待时间, 研究了M/M/1排队系统依赖于状态的最优价格和服务率. 在最大化长期平均社会收益指标下, 文献得到最优到达率和服务速率与系统状态之间存在单调关系, 但是最优价格与系统状态之间不存在单调关系. Gans和Savin[46]用马氏决策过程分析了签有合同的顾客的最优签订时间和随机进入的顾客的定价策略. 文献得到最大化长期平均利润的最优准入策略具有阈值型的结构, 最优价格和阈值随系统参数具有单调性质. Paschalidis和Tsitsiklis[47]考虑了服务多类顾客, 带宽资源有限的通讯网络的动态定价问题. 文献假设顾客的成本只有价格而没有延迟成本. 文献表明选取合适的静态价格能够逼近最优动态定价策略的系统性能. Yoon和Lewis[48]研究了非稳态到达过程和服务过程的排队系统的动态定价策略及结构性质. 文献研究了在不同形式的代价函数下最优价格的单调性, 提出了逐点静态近似的方法来逼近最优动态定价策略. Hall, Kopalle和Pyke[1]研究了定制生产系统针对长期签订合同的顾客和随机顾客的定价策略. 文献比较了静态定价策略、当排队队长小于阈值时接受随机顾客的静态定价策略和与状态相关的动态定价策略. 文献得出当排队队长小于阈值时, 综合考虑执行复杂度和利润收益, 接受随机顾客的静态定价策略最优. Çil, Karaesmen和Örmeci[49]通过求解马氏决策过程得到服务两类顾客的单个队列排队系统的最优动态定价和调度策略以及其结构性质. Çil, Örmeci和Karaesmen[50]还利用基于事件的动态规划(event-based dynamic programming)研究了系统参数: 到达率、服务速率、系统容量等对最优动态定价和准入控制策略的影响.

文献[51–54]研究了排队网络的动态定价控制问题. Adelman[51]考虑了船舶公司通过价格来决策是否接受闭物流排队网络中船只运输请求的问题. 文献通过线性规划的方法提供了最优收益的上界并利用近似动态规划的方法求得最优的动态定价策略. Waserhole和Jost[52]和Banerjee等[53]分别用启发式算法和凸松弛的近似方法研究了的车辆共享系统的静态定价策略. 文献用最优动态定价策略下系统性能描述系统性能在静态定价策略下的界. Banerjee等[54]用大规模市场极限(large market limit)研究了车辆共享平台的静态定价和阈值型动态定价策略. 文献发现任何动态定价策略下的利润和吞吐量不会超过最优静态定价策略下的性能, 但是与静态定价策略相比, 动态定价策略对系统负载的随机变化更加鲁棒.

文献[55–57]考虑了参数不确定或未知完整顾客信息情况下的动态定价方案. Masuda和Whang[55]研究了服务系统不知道到达率和值函数关系时, 用实际到达率的期望代替最优到达率的动态定价方案. 文献得出最大社会收益值是平衡点并且由于系统可能不会到达平衡点, 因此不稳定. Besbes和Maglaras[56]假设到达过程是非时齐的不可观测的随机过程, 采用多尺度流近似(multiscale fluid approximation)研究了接

近最优 (near-optimal) 的动态定价策略. Afèche 和Ata[57]假设服务系统不知道耐心顾客与不耐心顾客的比例, 采用贝叶斯估计来学习两类顾客出现的概率并基于此研究了以排队人数为自变量的动态定价策略.

综上所述, 将排队系统动态定价策略分为3类: 价格是系统状态的函数(例如[42–43, 45, 58]); 价格是不可观测或者不确定的随机变量(或随机过程)的函数(例如[55]); 价格是实际服务时间或者交付时间的函数(例如[59–60]). 针对第1种动态定价策略, 在马尔科夫排队模型中, 最优策略可通过马氏决策过程(MDP) 或者动态规划(DP)来求解. 但是在多类顾客定价问题或者排队网络的定价问题中, 系统状态的维数由一维变为多维, 基于精确分析 (exact analysis) 很难得到最优动态定价策略, 尤其是考虑顾客的延迟成本或者服务系统的拥塞成本与存储成本的时候. 当遇到这种情况时, 渐近分析(asymptotic analysis)是解决办法之一. 文献citemaglaras2006revenue,kim2015asymptotically和 文献[63]分别采用扩散模型近似与流模型近似来简化真实排队模型的随机性, 通过渐近分析得到服务系统在高负荷下接近最优的动态定价策略. 针对第2类动态定价策略, 服务系统需要分析排队系统在该定价策略下的稳定性.

2.3　优先级定价策略(Priority pricing)

文献[64–69] 研究了同类顾客在可观测排队系统的选择优先级和服务系统的优先级定价问题. Balachandran[64], Tilt和Balachandran[65] 和Balachandran和Srinidhi[66]研究了顾客在可观测的M/M/1 排队系统以最小成本为目标选择优先级的问题. 文献得到顾客个人的最优策略不一定是稳定的策略. 策略稳定是指在其他顾客采取该购买策略条件下, 没有顾客可以选择其他策略来减少其期望成本.Adiri和Yechiali[67]研究了顾客在可观测M/M/1排队系统根据排队人数购买优先级的问题. 文献得到当系统内顾客人数大于等于某个阈值时, 新来顾客购买优先级. Hassin和Haviv[68]将该纯策略扩展至混合策略. Alperstein[69]研究了M/M/1 FCFS排队系统最优优先级个数和最优定价. 文献表明最大利润的优先级服务原则为LCFS.

文献[70–72]研究了服务两类顾客的排队系统的优先级定价问题. Sinha, Rangaraj和Hemachandra[70]研究了服务系统剩余资源的定价问题. 服务系统需要保证首要顾客的平均等待时间小于阈值, 次要顾客的平均等待时间与价格有关. 文献研究了最大利润期望的优先级定价策略. Afèche和Sarhangian[71]研究了在可观测的M/M/1优先级排队系统中低优先级顾客排队后放弃排队对定价策略的影响. 文献证明低优先级顾客的策略具有阈值形式. Mandjes[72]研究了服务延迟敏感和不敏感两类顾客的排队系统分别在分配优先级和顾客选择优先级情况下的优先级定价策略.

服务机构在设计优先级定价策略时需要知道顾客信息, 包括服务需求时间、支付能力、延迟成本等. 当这些信息可以直接获取时, 服务机构可以根据顾客类型提供相应等级的服务, 但是这些信息通常从顾客的描述中获得, 服务系统不能判断顾客提供信息的准确性. 在这种情况下服务系统需要设计激励兼容(incentive-compatible)的定价策略. 激励兼容的含义是定价策略不仅能够优化系统性能, 还可以诱导顾客选择与真实类型相符的服务类型[2]. 也就是说, 最大化个人收益与最优化系统性能所选择的优先级购买策略一致.

文献[60, 73–77]研究了最优社会收益的激励兼容(incentive compatible)定价策略. Ghanem[73]最早研究排队系统激励兼容定价问题. 文献研究了不可观测的M/G/1系统在不知道顾客延迟成本信息时, 以最小化期望延迟费用为目标分配顾客优先级的问题. 文献证明了最优社会收益的优先级分配策略是将高优先级分配给延迟成本高的顾客, 即cμ rule. c表示顾客的单位延迟成本, μ表示顾客的服务速率, cμ rule表示按照$c_i\mu_i$递增的顺序从高到低分配优先级. Dolan[74]在可观测排队模型中假设顾客具有不同的延迟成本和确定的服务时间, 系统根据顾客的延迟成本分配优先级. 文献研究了诱导顾客真实延迟成本的激励兼容定价策略. Mendelson和Whang[60]在Mendelson[15]的模型假设基础上研究了多类顾客的激励兼容定价问题. 文献假设不同类型的顾客具有不同的服务时间和延迟成本, 其中延迟成本是线性函数. 文献得到M/M/1排队系统与cμ rule一致的最优激励兼容定价策略, 并且该定价策略是实际服务时间的二次函数. Kim和Mannino[75]将Mendelson和Whang[60]的结论推广至M/G/1排队系统. Van Mieghem[76]在Mendelson和Whang[60]的问题基础上, 假设了凸增的延迟成本函数, 得出渐近最优的激励兼容定价策略: Gcμ rule (generalized cμ rule). Gcμ rule是指根据边际延迟成本(marginal delay cost)与服务速率的乘积从大到小服务顾客. Van Mieghem[77]假设在服务多类顾客的不可观测的单个服务器排队系统中, 顾客将服务请求拆分至若干个服务等级的任务请求流, 并选择任务请求流的到达率. 文献假设延迟成本是等待时间的凸函数,利用高负荷布朗模型(heavy traffic Brownian model)近似分析得到Gcμ rule调度策略对应的激励兼容定价策略. Van Mieghem[78]证明了在服务多类顾客的G/G/1排队系统, 当顾客的服务时间存在交付时间约束时, Gcμ rule是渐近最优的调度策略.

文献[79–81]研究了最大利润的激励兼容定价策略. Lederer和Li[79]研究了多个公司针对多类延迟敏感顾客的定价和服务速率控制策略. 文献假设每个公司根据$c\mu$ rule来服务顾客, 得到具有激励兼容性的竞

争均衡点. Rao和Petersen[80]假设顾客的期望延迟成本是流量的函数, 利用非合作博弈得出每个优先级的流量定价以及顾客的最优购买量. Doroudi, Akan, Harchol Balter等[81]研究了当顾客类型是连续值、服务系统可以观测到顾客类型时, 不可观测的M/G/1 排队系统最大利润的激励兼容定价策略.

Afèche针对Mendelson的顾客行为假设[15]研究了最大利润指标的激励兼容定价机制. Afèche[82]研究表明当顾客的支付意愿、延迟敏感程度以及服务需求不为服务系统所知时, M/M/1排队系统最大平均利润的激励兼容定价–调度策略不一定是$c\mu$ rule, 也就是说最大利润的调度策略不会最小化系统的期望延迟成本. 最优的调度策略取决于c_i之间和μ_i之间的具体关系. 一种情况下优先级调度策略会给延迟敏感的顾客分配高优先级, 而策略性地延迟低优先级顾客的服务. 这样会使延迟敏感的顾客付更多的费用购买高优先级. 而另一种情况最优调度策略会随机分配优先级, 甚至以$c\mu$ rule相反的顺序服务顾客. 文献还表明不同类型顾客之间的延迟的区别不仅取决于顾客属性, 还和系统结构和拥塞水平有关. Afèche[83]采用机制设计和实现区域的方法研究了当多类延迟敏感顾客的信息不可被服务系统观测时, 最大利润的定价、交付时间和调度策略. 文献证明了cμ rule不能得到最大利润, 最优策略会给没有耐心的顾客分配高优先级, 延迟有耐心顾客的交付时间. Yahalom, Harrison和Kumar[84]在Afèche[82]的研究基础上, 假设更为一般的服务收益分布函数和乘积可分的凸的延迟成本函数, 采用布朗模型描述系统的动态行为, 给出Gcμ rule是最大利润的激励兼容定价策略的到达率条件. Katta和Sthuraman[85]假设所有顾客的服务需求相同, 服务系统提供至多M个服务等级, 分别研究了顾客类型为N个和连续顾客类型情况下, 最大利润的定价–调度机制. 文献证明两种情况最优的调度机制不一定是$c\mu$ rule. 文献给出了$c\mu$ rule是最优调度策略的条件.

上述文献考虑的优先级定价方案是顾客从服务系统给定的优先级服务中选择其中之一并付对应的价格. 当服务系统不知道服务顾客的类型以及相关信息时, 除了设计激励兼容的定价策略, 还有文献考虑了另一种优先级分配方案: 每一位顾客选择购买优先级所支付的费用, 服务系统根据顾客支付的费用安排排队位置: 支付的费用越高, 所在队列的位置越前. 在文献中, 这类问题被称为拍卖(auction) 或者贿赂(bribery). 顾客支付的费用被称为bribe或者bid.

文献[86–93] 研究了顾客不知道系统状态信息条件下的优先级购买策略. Kleinrock[86]假设顾客的排队位置取决于顾客支付的费用, 顾客在购买优先级时不知道系统状态信息. 文献得到多种支付函数下的排队规则. Glazer和Hassin[87], Liu[88]假设顾客的延迟成本不同、信息不被服务系统所知, 顾客以最小化成本为目标的拍卖问题. 文献得到顾客的延迟成本越高, 提出的拍卖价格越高, 该拍卖得到的优先级服务原则是cμ rule. Hassin[89]表明在服务时间为指数分布的优先级服务系统中, 拍卖可以得到最优的社会收益. 当排队系统不可观时, 系统的利润可以被最大化. Afèche和Mendelson[90]提出了广义的延迟成本结构来描述服务收益与延迟成本的相互关系, 得出以cμ rule服务顾客的优先级拍卖机制比统一定价得到的社会收益和利润高. 文献得出最大利润的价格比最大社会收益的价格低, 系统的使用率高. Abhishek, Kash和Key[91]研究了到达率和服务速率服从一般分布的云计算服务系统在提供固定价格的计算资源基础上, 针对剩余资源的拍卖方案. 文献得出服务系统仅提供固定价格的服务资源比混合定价策略得到的利润高. 在Bayes Nash平衡点处, 顾客根据延迟成本的阈值来决定选择固定价格或者优先级拍卖的购买方式. Doncel等[92]和Wu等[93]利用高负荷近似研究了DPS(Discriminatory Processor Sharing)排队系统中顾客的优先级购买策略.

在订货型生产排队(make-to-order queue)系统中, 生产商需要采取合适的调度策略保证预定的产品在预期交付时间(lead-time)内完成. 价格和交付时间作为一个组合出现. 为完成此目标, 定制生产商需要联合考虑定价(pricing), 交付时间(lead-time quotation), 调度(scheduling)和必要时加快生产(expediting)的策略. 文献[62–63, 94–95]研究了这类问题. So和Song[94]研究了G/G/s订货型生产排队系统在超过交付时间概率上界的约束下的静态价格、服务速率和交付时间控制策略. Palaka, Erlebacher和Kropp[95]假设顾客的延迟成本是价格和交付时间的线性递减函数, 服务系统需要承担拥塞成本和超过预期交付时间的惩罚成本. 文献研究了最优交付时间、定价和服务速率控制策略. Maglaras[62]考虑了M/M/1排队系统的多类顾客动态定价和优先级排序的问题. 文献用流模型近似原马氏决策过程模型, 表明定价和调度策略在过渡阶段后可被解耦. 解耦后, 定价策略仅取决于系统总的工作量(aggregate system load); 调度策略是greedy cμ rule, 该策略可以最小化系统瞬时维持成本. Çelik和Maglaras[63]研究了在生产多类产品的M/GI/1订货型生产排队系统, 价格是当前系统总工件数的函数, 交付时间从有限个给定的选项中选择. 文献通过近似扩散(approximating diffusion)得到接近最优的动态定价、交付时间、调度和加快生产的策略. 文献证明最优调度策略会把优先级分给最接近违反交付时间约束的产品类型, 维持所有类型产品的相对存货(relative backlogs) 相等.

类似地, 在定制生产排队系统, 当顾客的偏好或者

类型不被系统所知时, 最大利润的定价–交付时间策略需要具有激励兼容性. Afèche和Pablin[96–97]研究了当系统无法观测多类延迟敏感顾客信息的静态价格–交付时间组合和调度策略. 文献得到最大利润的策略会对多类顾客提供同一类型的服务、策略性地延迟交付时间、服务延迟成本高和低的顾客, 给延迟成本处于中间范围的顾客定高价. Afèche, Baron和Kerner[59]在定制生产系统中, 假设了顾客的延迟成本和费用是实际交付时间的函数, 对净收益不确定性敏感和不敏感两类顾客, 研究了最大利润的统一静态定价策略、基于稳态交付时间的激励兼容静态定价策略以及基于实际等待时间的定价策略. 文献研究表明当顾客对延迟成本和费用的变化敏感时, 基于实际交付时间的定价策略比固定价格的策略得到的利润高. Plambeck[98]研究了服务两类顾客的M/M/1排队系统在动态报出交付时间条件下的静态定价、服务速率和调度策略. 在耐心顾客可以容忍长段的交付时间的假设下, 最优价格和服务速率会导致系统进高负荷. 文献采用扩散近似(diffusion approximation) 研究了渐近最优的激励兼容定价和交付时间策略. Plambeck[99]针对有加快和回收策略的订单装配(assemble-to-order)系统, 利用近似布朗控制研究了高负荷模式下的动态定价, 服务率控制和最大交付时间策略. Ata和Olsen[58]研究了服务两类顾客的M/G/1排队系统渐近最优的激励兼容动态定价和交付时间组合策略. 文献假设顾客的服务收益相同, 延迟成本是交付时间的分段凸和凹函数. 文献用延迟函数的凸包得到原问题的下界, 提出在高负荷渐近模式(heavy traffic asymptotic regime) 达到该下界的渐近最优的动态定价和交付时间策略.

优先级可视为排队系统的资源调配机制. 文献针对同类顾客研究了优先级购买策略. 针对多顾客类型的定价问题, 文献考虑了两种策略. 一种是统一定价(uniform pricing)策略, 但是统一定价策略通常不能得到系统性能的最优解; 另一种是差别定价(differentiated pricing), 即对不同类型的顾客收取不同的费用, 也就是价格依据顾客类型或者提供服务的等级而定. 服务等级在排队系统中多反映为顾客的等待时间. 当顾客可以自主选择顾客类型而不受服务系统的集中控制时, 服务系统需要设计激励兼容的定价策略. 在社会收益指标下, 最优的激励兼容定价策略是cμ rule: 将高优先级分配给单位延迟成本与服务时间期望比值大的顾客. cμ rule可以最小化进入系统接受服务的顾客的期望延迟成本, 该结论对单个服务器、到达率与状态无关的排队系统成立[100–101]. 但是对于到达过程与状态相关的排队系统, cμ rule不能保证是最优的调度策略[102]. 排队系统在高负荷模式下渐近最优的激励兼容定价策略是Gcμ rule. 与cμ rule不同的是, Gcμ rule是动态调度策略. 在Mendelson[15]对顾客行为的假设下, cμ rule不一定得到最大的利润, 以最大利润为指标的调度机制可能会随机分配优先级, 甚至在极端情况下以cμ rule相反的顺序来服务顾客. 这说明最小化顾客的延迟成本不是最大化系统利润的首要考虑因素[82]. 当服务系统不能观测顾客类型时, 一些文献研究了由顾客的支付费用决定其在队列中的位置的拍卖策略. 出价越高的顾客在排队系统的位置越前, 所需等待时间越短. 另外尚未有文献对排队网络的优先级定价问题作出研究.

在订货型生产排队系统, 价格和交付时间同为顾客的选项, 因此激励兼容性针对定价和交付时间组合策略讨论.由于订货型生产排队系统模型较为复杂, 文献均采用渐近分析、模型近似的方法研究. 最优调度策略取决于模型假设和所用的分析方法, 没有统一的规则描述.

3 排队网络动态定价问题的最新研究进展 (Latest research progress of dynamic pricing control for queueing networks)

排队网络可以模拟现实中大量随机服务系统, 譬如计算机网络、公共卫生服务排队系统以及生产过程. 然而尚未有文献在假设顾客对延迟和价格敏感的条件下, 研究排队网络的动态定价问题. 本文近期研究了开Jackson排队网络(open Jackson network)的动态定价和控制问题, 即选取最优的动态价格和服务速率使得系统的长期平均社会收益最大[103].

3.1 问题描述(Problem formulation)

考虑如图1所示的开Jackson排队网络. 假设该系统有M个服务台, 系统容量是N. 进入系统的顾客以概率q_{0i}被分配给服务台i, $i=1,2,\cdots,M$, $\sum\limits_{i=1}^{M} q_{0i}=1$; 在服务台$i$完成服务的顾客以概率$q_{ij}$被分配给服务台$j$, $i,j=1,\cdots,M$; 顾客以概率q_{i0}从服务台i离开排队网络. $\sum\limits_{j=0}^{M} q_{ij}=1, i=1,\cdots,M$. 不失一般性, 假设$q_{ii}=0$, $i=0,1,\cdots,M$. 服务台的服务规则是FCFS (first-come-first-serve). 服务台i的排队人数(包括排队等待和正在被服务的顾客)用n_i来表示, 系统的状态为$\boldsymbol{n}:=(n_1,\cdots,n_M)$, 状态空间为$\mathcal{S}:=\{\boldsymbol{n}:\sum\limits_{i=1}^{M} n_i \leqslant N\}$. 在状态$\boldsymbol{n}$下, 服务台$i$的服务时间服从均值为$1/\mu_{i,\boldsymbol{n}}$的指数分布, 其中$\mu_{i,\boldsymbol{n}}\in[0,U]$. 外来顾客的到达过程服从速率为$\varLambda$的泊松分布. 顾客从服务中获得的服务收益$u$是服从给定分布$F$的正随机变量. f是随机变量u的概率密度函数, 也即$f=F'$. 假设$u\in[\underline{u},\bar{u}]$. 顾客对由等待和服务造成的延迟敏感: 每一位顾客在系统内逗留单位时间产生延迟费用v. 在每个状态下, 系统张贴出顾客从进入到离开系统的逗留时间

关于当前状态$\boldsymbol{n}$的条件期望$D_{\boldsymbol{n}}$和完成一次服务所收取的费用$p_{\boldsymbol{n}}$. 新来顾客观测到系统张贴的信息, 根据净收益是否为正决定是否进入系统接受服务. 在状态$\boldsymbol{n}$下, 新来顾客的净收益为

$$R_{\boldsymbol{n}} = u - p_{\boldsymbol{n}} - v \cdot D_{\boldsymbol{n}}. \tag{1}$$

当$R_{\boldsymbol{n}} > 0$, 顾客进入排队网络接受服务, 否则离开. 因此可以定义服务收益阈值$\tilde{u}_{\boldsymbol{n}}$为

$$\tilde{u}_{\boldsymbol{n}} = p_{\boldsymbol{n}} + v \cdot D_{\boldsymbol{n}}. \tag{2}$$

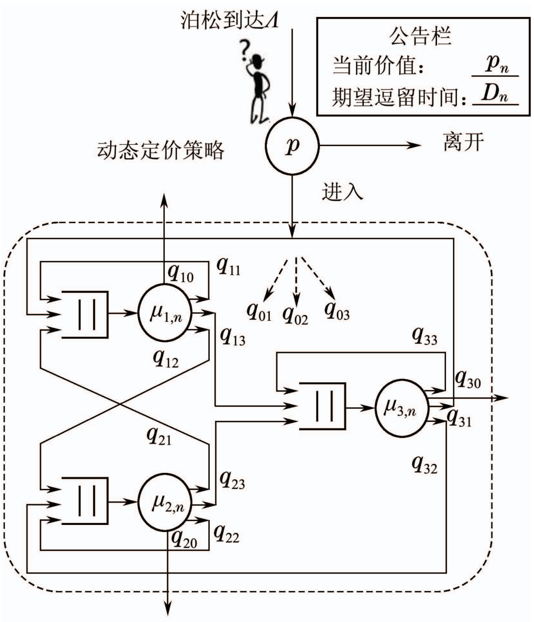

图 1 3个服务台的开Jackson排队网络的定价控制示意图

Fig. 1 An illustrative example of pricing control in a 3-server Jackson network

根据顾客的决策规则可知: 在状态$\boldsymbol{n}$下, 当顾客的服务收益u大于$\tilde{u}_{\boldsymbol{n}}$时, 顾客才会进入系统. 在状态$\boldsymbol{n}$下, 新来顾客进入系统的概率是$1 - F(\tilde{u}_{\boldsymbol{n}})$. 因此系统在状态$\boldsymbol{n}$时的有效到达率为

$$\lambda_{\boldsymbol{n}} = \Lambda(1 - F(\tilde{u}_{\boldsymbol{n}})). \tag{3}$$

当价格$p_{\boldsymbol{n}} \leqslant \underline{u} - v \cdot D_{\boldsymbol{n}}$或$p_{\boldsymbol{n}} \geqslant \bar{u} - v \cdot D_{\boldsymbol{n}}$时, 相应的服务收益阈值$\tilde{u}_{\boldsymbol{n}} \leqslant \underline{u}$或$\tilde{u}_{\boldsymbol{n}} \geqslant \bar{u}$. $F(\tilde{u}_{\boldsymbol{n}})$是常数, F不可逆. 为了避免这种情况, 重新定义$\tilde{u}_{\boldsymbol{n}}$为

$$\tilde{u}_{\boldsymbol{n}} := \min\{\max\{p_{\boldsymbol{n}} + v \cdot D_{\boldsymbol{n}}, \underline{u}\}, \bar{u}\}. \tag{4}$$

用$F^{-1}(\cdot)$表示分布函数F的逆函数, 定义$F^{-1}(0) = \underline{u}$和$F^{-1}(1) = \bar{u}$, 服务收益阈值$\tilde{u}_{\boldsymbol{n}}$也可以写成

$$\tilde{u}_{\boldsymbol{n}} = F^{-1}(1 - \frac{\lambda_{\boldsymbol{n}}}{\Lambda}). \tag{5}$$

当$\tilde{u}_{\boldsymbol{n}} = \bar{u}$时, 没有顾客进入系统, 系统生成的服务收益为零. 当$\underline{u} \leqslant \tilde{u}_{\boldsymbol{n}} < \bar{u}$时, 系统在状态$\boldsymbol{n}$下单位时间内产生的服务收益之和为

$$b(\boldsymbol{n}) = \lambda_{\boldsymbol{n}} \cdot \int_{\tilde{u}_{\boldsymbol{n}}}^{\bar{u}} x \cdot \frac{\mathfrak{f}(x)}{1 - F(\tilde{u}_{\boldsymbol{n}})} \mathrm{d}x. \tag{6}$$

服务台i在状态$\boldsymbol{n}$下的服务率为$\mu_{i,\boldsymbol{n}}$, 由此单位时间产生的运营成本(operating cost)为$c(\mu_{i,\boldsymbol{n}})$. 假设$c(\mu_{i,\boldsymbol{n}})$是$\mu_{i,\boldsymbol{n}}$的凸和非减函数. 除了运营成本外, 系统还需要承担存储成本(holding cost). 存储成本反映了顾客的等待时间成本. 在系统状态$\boldsymbol{n}$下, 存储成本为$v \cdot \sum\limits_{i=1}^{M} n_i$, 其中$v$是一个给定的系数. 社会收益被定义为顾客的服务收益减去系统的运营成本和存储成本, 基于这个定义, 系统在状态$\boldsymbol{n}$下的社会收益率函数可以写成

$$f(\boldsymbol{n}) = b(\boldsymbol{n}) - \sum_{i=1}^{M} c(\mu_{i,\boldsymbol{n}}) - v \cdot \sum_{i=1}^{M} n_i. \tag{7}$$

用$\boldsymbol{f}$表示$|\mathcal{S}|$–维由$f(\boldsymbol{n})$组成的列向量, 其中$\boldsymbol{n} \in \mathcal{S}$. 用$\boldsymbol{n}_t$表示系统在$t$时刻的状态. 假设排队网络是稳定的. 整个系统的长期平均社会收益为

$$\eta = \mathrm{E}\{f(\boldsymbol{n}_t)\} = \sum_{\boldsymbol{n} \in \mathcal{S}} \pi(\boldsymbol{n}) \cdot f(\boldsymbol{n}) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\boldsymbol{n}_t) \mathrm{d}t, \tag{8}$$

式中$\pi(\boldsymbol{n})$是系统在状态$\boldsymbol{n}$下的稳态概率, 对于遍历链, 最后一个等式成立. 有了上述描述, 可将动态定价控制问题描述如下.

问题 1 动态定价控制问题是选择最优的、与状态相关的价格和服务率使得长期平均社会收益最大. 在这个问题中, 策略是$\mathcal{P}_0 = (p_{\boldsymbol{n}}, \mu_{i,\boldsymbol{n}} : p_{\boldsymbol{n}} \in \mathbb{R}, \mu_{i,\boldsymbol{n}} \in [0, U], i = 1, \cdots, M, \boldsymbol{n} \in \mathcal{S})$, 或者可以简单写成$\mathcal{P}_0 = (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\mu})$. 策略空间是$\Psi_0 = \{$所有$\mathcal{P}_0\}$. 最优策略由下式给出:

$$\mathcal{P}_0^* = \underset{\mathcal{P}_0 \in \Psi_0}{\mathrm{argmax}}\{\eta\}. \tag{9}$$

在式(6)中, 服务收益率函数取决于服务收益阈值$\tilde{u}_{\boldsymbol{n}}$, 进而取决于价格$p_{\boldsymbol{n}}$和期望延迟时间$D_{\boldsymbol{n}}$. 期望延迟时间$D_{\boldsymbol{n}}$很难写成$\boldsymbol{p}$和$\boldsymbol{\mu}$的函数, 使得问题1难以求解. 此外, 从式(6)和式(8)中可看出, 对$b(\boldsymbol{n})$的积分项求期望使得问题更加复杂. 因此难以直接求解问题1.

下面将问题1分解为两个较容易求解的子问题. 这两个子问题的完整描述如下.

问题 2 速率设定问题 (rate setting problem) 是在不考虑顾客行为的条件下, 选取与状态相关的最优到达率和服务率使得长期平均社会收益最大. 这里社会收益率函数是

$$f(\boldsymbol{n}) = b(\lambda_{\boldsymbol{n}}) - \sum_{i=1}^{M} c(\mu_{i,\boldsymbol{n}}) - v \cdot \sum_{i=1}^{M} n_i. \tag{10}$$

在这个问题中, 策略是系统状态到到达率和服务率的映射, 被定义为$\mathcal{P}_1 = (\lambda_{\boldsymbol{n}}, \mu_{i,\boldsymbol{n}} : \lambda_{\boldsymbol{n}} \in [0, \Lambda], \mu_{i,\boldsymbol{n}} \in [0, U], i = 1 \cdots, M, \boldsymbol{n} \in \mathcal{S})$. 策略空间是$\Psi_1 = \{$所有$\mathcal{P}_1\}$. 最优的到达率和服务率$\mathcal{P}_1^* = (\lambda_{\boldsymbol{n}}^*, \mu_{i,\boldsymbol{n}}^*)$由下

式给出

$$\mathcal{P}_1^* = \underset{\mathcal{P}_1 \in \Psi_1}{\operatorname{argmax}}\{\eta\}. \tag{11}$$

问题 3 价格设定问题(price setting problem)是确定最优的与状态相关的价格使得系统在该价格策略下产生的长期平均社会收益等于速率设定问题得到的社会收益. 在这个问题中, 服务率与问题2的最优服务率相同. 策略是价格到系统状态的映射, 可以写成$\mathcal{P}_2 := (p_{\boldsymbol{n}} : p_{\boldsymbol{n}} \in \mathbb{R}, \boldsymbol{n} \in \mathcal{S})$. 策略空间是$\Psi_2 = \{$所有$\mathcal{P}_2\}$. 价格$\mathcal{P}_2$由下式给出:

$$\mathcal{P}_2 : \eta(\mathcal{P}_2) = \eta(\mathcal{P}_1), \text{其中 } \mathcal{P}_2 \in \Psi_2. \tag{12}$$

3.2 主要结论(Main results)

首先, 证明了动态定价和控制问题等价于速率设定问题和价格设定问题. 为了方便阐述证明, 本文分别使用了更为清晰的符号来表示问题1、问题2和问题3.

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P0} : \max_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{\mu}} \eta(\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\mu}),\boldsymbol{\mu}),\\
&\mathrm{P1} : \max_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}} \eta(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}),\\
&\mathrm{P2}(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}) : \{\boldsymbol{p} : \eta(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\mu}) = \eta(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu})\}.
\end{aligned}$$

P0和P1的最优平均社会收益分别用η^*_{P0}和η^*_{P1}表示. 用下述定理来描述问题P0, P1和P2三者之间的关系.

定理 1 若$(\boldsymbol{\lambda}^*,\boldsymbol{\mu}^*)$为P1的最优解, P2$(\boldsymbol{\lambda}^*,\boldsymbol{\mu}^*)$的解为$\boldsymbol{p}^*$, 那么$(\boldsymbol{p}^*,\boldsymbol{\mu}^*)$也是P0的最优解并且有$\eta^*_{\mathrm{P0}} = \eta^*_{\mathrm{P1}}$.

证 首先, 证明$\eta^*_{\mathrm{P0}} = \eta^*_{\mathrm{P1}}$. 由式(2)和式(5)可知, 对于P1任意可行的策略$(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu})$, 诱导到达率$\boldsymbol{\lambda}$的价格$\boldsymbol{p}$可由下式计算得到:

$$p_{\boldsymbol{n}} = F^{-1}(1-\lambda_{\boldsymbol{n}}/\Lambda) - v\cdot D_{\boldsymbol{n}}. \tag{13}$$

该$\boldsymbol{p}$对于P0总是可行的, 所以$\eta^*_{\mathrm{P0}} \geqslant \eta^*_{\mathrm{P1}}$. 另一方面, 对于P0的任意一个可行的策略$(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\mu})$, 其诱导的到达率$\boldsymbol{\lambda}$由式(3)给出, 该$\boldsymbol{\lambda}$对于P1是可行的, $\eta^*_{\mathrm{P1}} \geqslant \eta^*_{\mathrm{P0}}$. 因此有$\eta^*_{\mathrm{P1}} = \eta^*_{\mathrm{P0}}$.

其次, 证明$(\boldsymbol{p}^*,\boldsymbol{\mu}^*)$是P0的最优解. 因为$(\boldsymbol{\lambda}^*,\boldsymbol{\mu}^*)$是P1的最优解, 有$\eta(\boldsymbol{\lambda}^*,\boldsymbol{\mu}^*) = \eta^*_{\mathrm{P1}}$. 由于$\boldsymbol{p}^*$是P2$(\boldsymbol{\lambda}^*,\boldsymbol{\mu}^*)$的解, 根据P2的定义, 有$\eta(\boldsymbol{p}^*,\boldsymbol{\mu}^*) = \eta(\boldsymbol{\lambda}^*,\boldsymbol{\mu}^*)$. 因此, $\eta(\boldsymbol{p}^*,\boldsymbol{\mu}^*) = \eta^*_{\mathrm{P1}}$. 由于之前已经证明了$\eta^*_{\mathrm{P0}} = \eta^*_{\mathrm{P1}}$. 因此从P0的定义中可知, $(\boldsymbol{p}^*,\boldsymbol{\mu}^*)$是P0的最优解.

证毕.

采用基于灵敏度优化理论[104]研究问题2. 首先, 分别写出当到达率由$\lambda_{\boldsymbol{n}}$变为$\lambda'_{\boldsymbol{n}}$, 服务率由$\mu_{i,\boldsymbol{n}}$变为$\mu'_{i,\boldsymbol{n}}$时, 系统的性能差分方程[103]

$$\begin{aligned}
\eta'-\eta = &\sum_{\boldsymbol{n}\in\mathcal{S}} \pi'(\boldsymbol{n})\{(\lambda'_{\boldsymbol{n}}-\lambda_{\boldsymbol{n}})\sum_{i=1}^{M} q_{0i}[g(\boldsymbol{n}_{+i}) - \\
&g(\boldsymbol{n})] + b(\lambda'_{\boldsymbol{n}}) - b(\lambda_{\boldsymbol{n}})\}.
\end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}
\eta'-\eta = &\sum_{\boldsymbol{n}\in\mathcal{S}} \pi'(\boldsymbol{n}\{\sum_{i=1}^{M}(\mu'_{i,\boldsymbol{n}}-\mu_{i,\boldsymbol{n}}))\\
&\sum_{j=0}^{M} q_{ij}[g(\boldsymbol{n}_{-i,+j}) - g(\boldsymbol{n})] - \\
&[c(\mu'_{i,\boldsymbol{n}}) - c(\mu_{i,\boldsymbol{n}})]\}.
\end{aligned} \tag{15}$$

基于性能差分方程式(14)和式(15), 可得如下定理.

定理 2 如果选择一个策略$\mathcal{P}'_1 = (\lambda'_{\boldsymbol{n}},\mu'_{i,\boldsymbol{n}} : \lambda'_{\boldsymbol{n}} \in [0,\Lambda], \mu'_{i,\boldsymbol{n}} \in [0,U], i = 1,\cdots,M, \boldsymbol{n}\in\mathcal{S})$使它满足

$$\begin{aligned}
&\lambda'_{\boldsymbol{n}}\sum_{i=1}^{M} q_{0i}[g(\boldsymbol{n}_{+i}) - g(\boldsymbol{n})] + b(\lambda'_{\boldsymbol{n}}) \geqslant\\
&\lambda_{\boldsymbol{n}}\sum_{i=1}^{M} q_{0i}[g(\boldsymbol{n}_{+i}) - g(\boldsymbol{n})] + b(\lambda_{\boldsymbol{n}})
\end{aligned} \tag{16}$$

和

$$\begin{aligned}
&\mu'_{i,\boldsymbol{n}}\sum_{j=0}^{M} q_{ij}[g(\boldsymbol{n}_{-i,+j}) - g(\boldsymbol{n})] - c(\mu'_{i,\boldsymbol{n}}) \geqslant\\
&\mu_{i,\boldsymbol{n}}\sum_{j=0}^{M} q_{ij}[g(\boldsymbol{n}_{-i,+j}) - g(\boldsymbol{n})] - c(\mu_{i,\boldsymbol{n}}),
\end{aligned} \tag{17}$$

$i = 1,\cdots,M, \forall \boldsymbol{n}\in\mathcal{S}$, 那么有$\eta' \geqslant \eta$. 如果至少存在一个状态$\boldsymbol{n}$在策略$\mathcal{P}'_1$下的稳态概率为正数且不等式(16)或(17)严格成立, 那么有$\eta' > \eta$.

鉴于遍历状态的稳态分布为正数, 定理2容易从式(14)和式(15)中得到, 在这里省略它的证明.

定理 3 策略$\mathcal{P}_1 = (\lambda_{\boldsymbol{n}},\mu_{i,\boldsymbol{n}} : \lambda_{\boldsymbol{n}} \in [0,\Lambda], \mu_{i,\boldsymbol{n}} \in [0,U], i = 1,\cdots,M, \boldsymbol{n}\in\mathcal{S})$是最优的当且仅当

$$\begin{aligned}
&\lambda_{\boldsymbol{n}}\sum_{i=1}^{M} q_{0i}[g(\boldsymbol{n}_{+i}) - g(\boldsymbol{n})] + b(\lambda_{\boldsymbol{n}}) \geqslant\\
&\lambda'_{\boldsymbol{n}}\sum_{i=1}^{M} q_{0i}[g(\boldsymbol{n}_{+i}) - g(\boldsymbol{n})] + b(\lambda'_{\boldsymbol{n}})
\end{aligned} \tag{18}$$

和

$$\begin{aligned}
&\mu_{i,\boldsymbol{n}}\sum_{j=0}^{M} q_{ij}[g(\boldsymbol{n}_{-i,+j}) - g(\boldsymbol{n})] - c(\mu_{i,\boldsymbol{n}}) \geqslant\\
&\mu'_{i,\boldsymbol{n}}\sum_{j=0}^{M} q_{ij}[g(\boldsymbol{n}_{-i,+j}) - g(\boldsymbol{n})] - c(\mu'_{i,\boldsymbol{n}}),
\end{aligned} \tag{19}$$

对于所有$\mathcal{P}'_1 = (\lambda'_{\boldsymbol{n}},\mu'_{i,\boldsymbol{n}} : \lambda'_{\boldsymbol{n}} \in [0,\Lambda], \mu'_{i,\boldsymbol{n}} \in [0,U], i = 1,\cdots,M, \boldsymbol{n}\in\mathcal{S})$, $i = 1,\cdots,M$和$\boldsymbol{n}\in\mathcal{S}$.

证 充分条件: 如果一个策略$\mathcal{P}_1 = (\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu})$满足式(18)和式(19), 根据定理2, 对于所有策略$\mathcal{P}'_1 = (\boldsymbol{\lambda}',\boldsymbol{\mu}') \in \Psi_1, \eta \geqslant \eta'$. 因此, $\mathcal{P}_1$是最优的.

必要条件: 假设$\mathcal{P}_1 = (\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu})$是最优策略但是其不满足式(18)和式(19). 因此至少存在一个策略, 记为$\mathcal{P}^{\mathrm{h}}_1 = (\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{h}},\boldsymbol{\mu}^{\mathrm{h}})$, 使得式(18)或式(19)不成立. 也就是说, 至少存在一个状态, 记为$\boldsymbol{n}'$, 使得

$$\begin{aligned}
&\lambda_{\boldsymbol{n}'}\sum_{i=1}^{M} q_{0i}[g(\boldsymbol{n}'_{+i}) - g(\boldsymbol{n}')] + b(\lambda_{\boldsymbol{n}'}) <\\
&\lambda^{\mathrm{h}}_{\boldsymbol{n}'}\sum_{i=1}^{M} q_{0i}[g(\boldsymbol{n}'_{+i}) - g(\boldsymbol{n}')] + b(\lambda^{\mathrm{h}}_{\boldsymbol{n}'})
\end{aligned} \tag{20}$$

或

$$\mu_{i,\boldsymbol{n}'}\sum_{j=0}^{M}q_{ij}[g(\boldsymbol{n}'_{-i,+j})-g(\boldsymbol{n}')]-c(\mu_{i,\boldsymbol{n}'})<$$
$$\mu^{\mathrm{h}}_{i,\boldsymbol{n}'}\sum_{j=0}^{M}q_{ij}[g(\boldsymbol{n}'_{-i,+j})-g(\boldsymbol{n}')]-c(\mu^{\mathrm{h}}_{i,\boldsymbol{n}'}) \quad (21)$$

成立. 因此可以构造一个新策略$\mathcal{P}_1^d=(\boldsymbol{\lambda}^d,\boldsymbol{\mu}^d)$, 其中$\lambda^d_{\boldsymbol{n}'}=\lambda^{\mathrm{h}}_{\boldsymbol{n}'}$, $\mu^d_{i,\boldsymbol{n}'}=\mu^{\mathrm{h}}_{i,\boldsymbol{n}'}$, 对于所有$\boldsymbol{n}\neq\boldsymbol{n}'$, $\lambda^d_{\boldsymbol{n}}=\lambda_{\boldsymbol{n}}$, $\mu^d_{i,\boldsymbol{n}}=\mu_{i,\boldsymbol{n}}$. 根据定理2, 在策略$\mathcal{P}^d$下的长期平均收益$\eta^d>\eta$. 这与假设$\mathcal{P}_1$是最优策略矛盾. 因此如果$\mathcal{P}_1$是最优策略, 它需满足式(18)和式(19). 证毕.

基于定理2和定理3, 提出了寻找速率设定问题最优策略$\mathcal{P}_1^*$的策略迭代算法[103].

在得到最优的到达率$\lambda^*_{\boldsymbol{n}}$和服务率$\mu^*_{i,\boldsymbol{n}}$之后, 求解诱导出最优到达率$\lambda^*_{\boldsymbol{n}}$的最优价格$p^*_{\boldsymbol{n}}$. 在最优策略$\mathcal{P}_1^*$下, 最优价格$p^*_{\boldsymbol{n}}$由下式给出:

$$p^*_{\boldsymbol{n}}=F^{-1}(1-\frac{\lambda^*_{\boldsymbol{n}}}{\Lambda})-v\cdot D^*_{\boldsymbol{n}},\ \boldsymbol{n}\in\mathcal{S}. \quad (22)$$

为了求解逗留时间关于系统状态的条件期望$D^*_{\boldsymbol{n}}$, 先计算了当系统状态是$\boldsymbol{n}_{+i}$时, 从服务台i开始接受服务的顾客的逗留时间的条件期望, 其中$i=1,\cdots,M$. 用$W^{\boldsymbol{n}}_{i,k}$表示在给定状态$\boldsymbol{n}$下在服务台i前排队等待的第k个顾客在系统逗留时间的条件期望, 得出求解$W^{\boldsymbol{n}}_{i,k}$的递推算法, 具体算法可参见文献[103]. 然后$D^*_{\boldsymbol{n}}$的值由下式给出

$$D^*_{\boldsymbol{n}}=\sum_{i=1}^{M}q_{0i}\cdot W^{\boldsymbol{n}_{+i}}_{i,n_i+1}. \quad (23)$$

在仿真实验中, 进一步研究了长期平均社会收益、进入系统的顾客的长期平均收益以及服务机构的长期平均利润三者随单位时间延迟成本v的变化关系. 考虑这样一个开Jackson排队网络: 服务台数$M=2$, 容量$N=10$, 路由概率为$q_{01}=0.3$, $q_{02}=0.7$, $q_{10}=0.8$, $q_{12}=0.2$, $q_{20}=0.4$, $q_{21}=0.6$. 顾客的服务收益服从在$[\underline{u},\bar{u}]$的均匀分布, 服务价值率函数为$b(\lambda_{\boldsymbol{n}})=B\lambda_{\boldsymbol{n}}-C\lambda^2_{\boldsymbol{n}}$, 其中: $B=\bar{u}$, $C=\dfrac{\bar{u}-\underline{u}}{2\Lambda}$. 运营成本率函数为$c(\mu_{i,\boldsymbol{n}})=\dfrac{1}{2}\mu^2_{i,\boldsymbol{n}}$. 到达率 $\lambda_{\boldsymbol{n}}\in[0,\Lambda]$, 服务率$\mu_{i,\boldsymbol{n}}\in[0,U]$, 其中$i=1,\cdots,M$, $\boldsymbol{n}\in\mathcal{S}$. 进入系统的顾客的长期平均收益是

$$r_{\mathrm{c}}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\lambda_{\boldsymbol{n}_t}\cdot R_{\boldsymbol{n}_t}\mathrm{d}t=\sum_{\boldsymbol{n}\in\mathcal{S}}\pi(\boldsymbol{n})\cdot\lambda(\boldsymbol{n})\cdot(\mathrm{E}\{u|u>\tilde{u}_{\boldsymbol{n}}\}-p_{\boldsymbol{n}}-v\cdot D_{\boldsymbol{n}}). \quad (24)$$

服务机构的利润被定义为毛收入减去系统的运营成本. 在状态$\boldsymbol{n}$下, 服务系统的利润率函数可以写成

$$S_{\boldsymbol{n}}=\lambda_{\boldsymbol{n}}\cdot p_{\boldsymbol{n}}-\sum_{i=1}^{M}c(\mu_{i,\boldsymbol{n}}). \quad (25)$$

服务机构的长期平均利润是

$$r_{\mathrm{s}}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T S_{\boldsymbol{n}_t}\mathrm{d}t=\sum_{\boldsymbol{n}\in\mathcal{S}}\pi(\boldsymbol{n})\cdot S_{\boldsymbol{n}}. \quad (26)$$

表1展示了不同v下的最优值r^*_{c}, r^*_{s}和η^*. 可以发现r^*_{c}, r^*_{s}和η^*的值随v单调减小, 并且在每一个v下, r^*_{c}与r^*_{s}之和等于η^*. 因此可以得到当顾客的单位时间延迟成本v较小时, 顾客的期望净收益不仅变大, 社会收益和服务机构的利润也会增长. 这说明耐心等待的顾客对服务系统的所有参与者都有好处, 因此服务机构应采取措有效措施降低顾客延迟成本, 提供一个舒适的排队等候环境, 提高耐心等待顾客的比例. 这也验证了一句谚语"耐心是一种美德"(patience is a virtue).

表 1 在最优策略$\mathcal{P}_1^*$下, 不同v值对应的顾客平均收益(r^*_{c})、服务机构的平均利润(r^*_{s}), 和平均社会收益(η^*), $B=10, C=1, \Lambda=4, U=6$

Table 1 Average profits of customers (r^*_{c}), service provider (r^*_{s}), and the average social welfare (η^*) produced by optimal policy under different v, $B=10$, $C=1$, $\Lambda=4, U=6$

v	r^*_{c}	r^*_{s}	η^*
0.1	7.25	5.37	12.63
0.3	6.97	4.66	11.63
0.5	6.62	4.17	10.79
1.0	5.78	3.42	9.19
2.0	4.55	2.53	7.08
5.0	2.46	1.19	3.66

4 总结与展望(Summary and prospect)

本文将排队系统的定价控制策略分为静态定价策略、动态定价策略和优先级定价策略进行综述, 其中研究优先级静态和动态定价策略的文献归到第2.3节优先级定价策略介绍. 最后还介绍了作者针对排队网络动态定价问题的最新研究进展. 根据排队模型的复杂度、价格是否随时间变化这两个维度, 将这篇综述中出现的该领域代表性文献分类, 总结出表2. 从这张表大致可以看出, 大部分研究排队系统定价策略的文献集中在简单马尔科夫排队系统, 研究静态定价策略的文献数量远多于研究动态定价策略的文献. 综合这张表与之前的文献综述, 对排队系统定价控制研究做出如下总结和展望.

顾客的行为会影响平衡点处顾客的策略和相应的定价策略. 除了假设顾客为理性的决策者, 现有文献考虑了更复杂的顾客行为对定价策略的影响. 譬如文献[20]考虑了规避风险的行为: 即比起收获, 顾客在心理上会更在意同样大小的损失, 研究了规避风险行

为下不可观测排队系统的定价策略. 另外, 理性的决策者需要计算平衡点处的策略. 已有研究[105]表明当平衡点的策略需要涉及复杂计算时, 顾客在决策中采用较为简单的评判标准, 这种行为偏离了理性行为的假设, 被称为有界理性. 文献[106–108]研究了logit模型下多个服务台竞争的定价问题. 此外在排队系统中, 顾客的行为不单单包括选择进入和离开服务系统, 还有重试、转移队列、选择进入系统的时间以及当系统条件恶化时, 排队等待的顾客选择中途离开队列等. 在这些顾客行为假设下, 顾客平衡点处的选择策略以及定价策略与传统假设下相应策略有所不同. 研究这些行为下服务系统的定价策略是值得研究的问题.

表 2 研究排队系统定价控制的代表性文献分类

Table 2 A classification of representative literature on pricing control for queueing systems

排队模型	静态定价策略	动态定价策略
M/M/1	[4, 10, 13–14, 18, 20, 25, 33–35, 64, 67–69, 89, 95] [40](高负荷)	[1, 43–45, 56, 86]
M/M/1 多顾客类型排队 (multi-class queue)	[1, 24, 28–30, 32, 71–72, 82–85, 97] [93](高负荷)	[1, 48–49, 57, 60]
M/M/s	[7, 87–88]	[42]
M/M/s 多顾客类型排队	[22, 24] [39]	[46–47]
M/M/∞	[38, 75]	
M/D/1 多顾客类型排队		[58](高负荷)
M/D/s	[19]	
M/G/1	[8–9, 21, 66, 70, 73]	
M/G/1 多顾客类型排队	[27, 79, 81] [92](高负荷)	
M/G/s 多顾客类型排队	[24]	
M/G/∞	[26]	
G/M/1	[5, 12, 89]	
G/M/s	[6]	
G/G/1	[16–17, 76, 90]	
G/G/1 多顾客类型排队		[77]
G/G/s	[10, 15, 99]	[91]
G/G/∞	[91]	
G/D/1	[59, 74]	
G/D/1 多顾客类型排队	[59]	
排队网络	[52]	[51–55, 103]
扩散模型(diffusion model)	[41]	[63, 98]
布朗模型(Brownian model)	[84]	
流模型(fluid model)	[61]	[62]

在多个服务台竞争下的定价问题中, 服务台张贴完成服务所需的费用, 顾客根据最大化净收益选择服务台. 通常求解这类问题分为两步. 第1步为计算顾客选择策略的均衡点, 即在给定服务台的价格情况下, 顾客最大化净收益的选择策略. 第2步计算服务台价格的均衡点: 在给定其他服务台价格的情况下, 每个服务台最大利润的价格. 在第2步中, 到达率由顾客均衡点处的策略决定. 针对不可观测排队队列, 文献[109]研究了服务台可以设定价格情况下的Bertrand均衡点(价格竞争)和服务台可以选择到达率情况下的Cournot 均衡点(市场份额竞争). 文献 [110–111] 和 [112] 分别考虑了顾客的延迟成本为连续分布的随机变量和离散值情况下的竞争问题.

通常服务系统的价格与服务质量密切相关. 在排队系统中, 与延迟相关的指标被认为与服务质量等同. 当假设顾客的策略基于服务系统的许诺送达时间 (promised delivery time, PDT) 而非实际的等待时间时, 顾客被称为引用敏感类型(quote-sensitive)[3]. 服务机构利用顾客的单纯来决定交付时间策略. 在考虑有预付时间管理的文献中, 只有少数文献考虑了预计交付时间对顾客下单策略的影响以及依赖于交付时间的定价策略[113].

服务系统提供的延迟信息会影响顾客的决策. 在服务系统完全可以掌握系统信息, 而顾客通过服务系统来获取关于系统状态的信息时, 服务系统会根据自身利益来选择向顾客透露还是隐瞒这些信息. 文献[114]研究比较了不可观、部分可观以及完全可观测情况下顾客的净收益和排队系统的吞吐量. 文献[115]研

究了当顾客无法验证服务系统提供信息的真伪时, 理性顾客的选择策略和服务系统依赖于系统状态的信息公布策略. 文献假设顾客可以从系统提供的比较模糊信息中推断出系统的状态. 文献[116–117]分别研究了服务系统在可以获取未来一段时间内顾客的到达时间信息情况下的准入控制以及减少排队等待时间问题. 然而排队系统信息控制的程度以及对顾客到达信息的获取程度对定价策略的影响尚未得到研究.

订货型生产系统是一个多顾客(产品)类型、有预期交付时间保证的排队系统. 为了保证订货型生产系统在既定的交付时间内完成生产, 服务系统需要综合设计定价、调度、交付时间和必要时加快生产策略. 订货型生产排队系统多以最大利润为优化目标, 依据当前的工作量或者存货量定出当前状态的预期交付时间和对应的价格, 从而控制选择各类交付时间的顾客人数. 由于订货型生产排队系统是多顾客(产品)类型的排队系统, 因此当系统采用动态定价和交付时间策略时, 很难基于模型精确分析得到最优策略. 文献[62, 98]采用扩散模型近似或者流模型等方法近似高负荷的排队系统, 得到渐近最优的静态(或者动态)定价和交付时间策略.

在服务多类顾客的排队系统中, 当服务原则是优先级时, 不同类型顾客被赋予不同或者相同的优先级, 优先级的高低决定了服务顺序, 这本质上可被理解为一种调度策略(scheduling policy). 当不同类型顾客的到达过程和服务时间具有相似的分布函数时, 排队系统最大社会收益的调度策略是cμ rule, 在高负荷下渐近最优的调度策略是Gcμ rule. 当服务系统采用依赖于状态的动态定价策略, 有效到达率随系统状态变化, 这时cμ rule不一定是最优的调度策略. 在最大利润指标下, 最优的定价–调度策略需要更为严格的条件限制, 文献[82, 85]和文献[84]分别给出cμ rule和Gcμ rule是最优调度策略的成立条件.

当顾客的偏好属于私人信息, 服务系统不能通过强制手段来掌握这些信息时, 理性的顾客以最大自身利益为需求来选择优先级, 选择的优先级可能与真实类型不相符. 但是服务机构设计的最优定价和调度策略建立在顾客真实类型与优先级匹配的假设基础上, 因此服务机构还需要设计合适的机制来诱导顾客选择与真实类型相符合的优先级. 这样的机制反映在定价策略就是激励兼容性. 激励兼容的定价策略被用来实现最优的优先级分配原则. 在最优社会收益指标下, Mendelson和Whang[60]得到与cμ rule一致的激励兼容优先级定价策略, Van Mieghem[76–77]在高负荷下得到与Gcμ rule一致的激励兼容优先级定价策略. Afèche[82]在Mendelson和Whang[60]的模型假设下得到最大利润的激励兼容静态定价策略由c_i, μ_i之间的关系决定. 给出cμ rule是最优调度策略的条件. 但是对于最大利润的动态定价–调度策略, 文献还缺乏研究. 针对订货型生产排队系统, 文献[59, 96–97]研究了激励兼容的静态定价-交付时间策略, 文献[58, 98]研究了在高负荷下激励兼容的动态定价-交付时间策略.

针对马尔科夫排队模型, 理论上来说, 采用马氏决策优化理论可以求解依赖于系统状态的最优动态定价策略. 然而针对服务多类顾客的排队系统或者排队网络, 系统状态为高维向量, 若优化问题非凸或者有交付时间约束, 基于模型精确分析难以求解依赖于系统状态的最优策略. 此外随着系统规模的增大, 最优策略的搜索维度成指数型增长, 这是著名的维数灾问题. 文献[42, 58, 103]通过降低行动空间的搜索维度来降低求解最优策略的复杂度, 文献[51–53, 62–63]求解接近最优的动态或者静态定价策略. 文献[42, 58]考虑有限价格和服务选项的动态定价策略, 降低了行动空间的搜索维度. 文献[103]在特定成本率和服务收益率函数假设下, 通过性能差分方程分析得到最优策略的结构性质, 减少了求解最优策略的计算量. 文献[62–63]分别采用扩散模型和流模型近似高负荷模式下的排队系统, 求解渐近最优的动态定价和调度策略. 文献[52–53]分别采用启发式算法和凸松弛的近似方法研究静态定价策略, 用最优动态定价策略下的系统性能表示静态定价策略下系统性能的界. 文献[51]采用近似动态规划研究排队网络接近最优的动态定价策略.

近年来随着滴滴打车, Uber的迅猛发展以及共享车辆平台的普及, 出租车打车以及共享车辆系统的定价问题成为新的研究热点. 若用排队模型描述共享车辆平台, 需要考虑的因素有车辆在多个区域内转移、租车司机(或者现有车辆)以及等待打车(或者等待租车)乘客的排队行为. 这些因素使得描述共享车辆平台的排队模型不是单个队列的简单排队模型, 而是多个简单排队模型组合在一起构成的复杂排队系统. 排队网络可以方便地刻画车辆在平台内部各个区域之间转移的情况. 设计合适的定价机制使得平台运营效率最高、调配不同区域的资源都是具有现实意义的问题. 动态定价策略可以有效应对供给和需求之间的实时不匹配性[54], 若以排队网络为模型研究共享车辆平台的动态定价问题, 高维甚至非凸的优化问题为最优动态定价策略的求解带来计算难度. 现有文献考虑的方法有用启发式算法[52]、凸松弛的近似方法[53]研究静态定价策略, 用最优动态定价策略的系统性能表示在该策略下系统性能的界. 还有文献[54]采用大规模市场极限的方法得到具有特定结构的动态定价策略. 针对共享平台的定价策略有待进一步的研究.

综上所述, 排队系统定价控制领域仍有很多问题值得探讨和研究. 近年来, 随着新的研究方法的出现,

排队系统定价策略的研究会有新的突破和进展.

参考文献(References):

[1] HALL J M, KOPALLE P K, PYKE D F. Static and dynamic pricing of excess capacity in a make-to-order environment [J]. *Production and Operations Management*, 2009, 18(4): 411 – 425.

[2] HASSIN R, HAVIV M. *To Queue or not to Queue: Equilibrium Behavior in Queueing Systems* [M]. USA: Springer Science & Business Media, 2003.

[3] HASSIN R. *Rational Queueing* [M]. New York: CRC press, 2016.

[4] NAOR P. The regulation of queue size by levying tolls [J]. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 1969, 37(1): 15 – 24.

[5] YECHIALI U. On optimal balking rules and toll charges in the GI/M/1 queuing process [J]. *Operations Research*, 1971, 19(2): 349 – 370.

[6] YECHIALI U. On optimal balking rules and toll charges in the GI/M/1 queuing process [J]. *Operations Research*, 1971, 19(2): 349 – 370.

[7] CHR N. Individual and social optimization in a multiserver queue with a general cost-benefit structure [J]. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 1972: 515 – 528.

[8] LIPPMAN S A, STIDHAM Jr S. Individual versus social optimization in exponential congestion systems [J]. *Operations Research*, 1977, 25(2): 233 – 247.

[9] BELL C E, STIDHAM JR S. Individual versus social optimization in the allocation of customers to alternative servers [J]. *Management Science*, 1983, 29(7): 831 – 839.

[10] ZIYA S, AYHAN H, FOLEY R D. Optimal prices for finite capacity queueing systems [J]. *Operations Research Letters*, 2006, 34(2): 214 – 218.

[11] ZIYA S, AYHAN H, FOLEY R D. A note on optimal pricing for finite capacity queueing systems with multiple customer classes [J]. *Naval Research Logistics*, 2008, 55(5): 412 – 418.

[12] MAOUI I, AYHAN H, FOLEY R D. Optimal static pricing for a service facility with holding costs [J]. *European Journal of Operational Research*, 2009, 197(3): 912 – 923.

[13] EDELSON N M, HILDERBRAND D K. Congestion tolls for Poisson queuing processes [J]. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 1975, 43(1): 81 – 92.

[14] LITTLECHILD S C. Optimal arrival rate in a simple queueing system [J]. *International Journal of Production Research*, 1974, 12(3): 391 – 397.

[15] MENDELSON H. Pricing computer services: queueing effects [J]. *Communications of the ACM*, 1985, 28(3): 312 – 321.

[16] DEWAN S, MENDELSON H. User delay costs and internal pricing for a service facility [J]. *Management Science*, 1990, 36(12): 1502 – 1517.

[17] STIDHAM S. Pricing and capacity decisions for a service facility: Stability and multiple local optima [J]. *Management Science*, 1992, 38(8): 1121 – 1139.

[18] HAVIV M, RANDHAWA R S. Pricing in queues without demand information [J]. *Manufacturing & Service Operations Management*, 2014, 16(3): 401 – 411.

[19] DANIEL J I. Congestion pricing and capacity of large hub airports: a bottleneck model with stochastic queues [J]. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 1995: 327 – 370.

[20] YANG L, GUO P, WANG Y. Service pricing with loss averse customers [EB/OL]. https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=2418303.

[21] ZOU Zongbao, WANG Jianjun, DENG Guishi, et al. Optimal pricing in manufacturing queueing system considering strategic consumer behavior and machine failures [J]. *Operations Research and Management Science*, 2014, 23(3): 1 – 7.
(邹宗保, 王建军, 邓贵仕, 等. 考虑顾客策略行为和机器故障的加工排队系统最优定价 [J]. 运筹与管理, 2014, 23(3): 1 – 7.)

[22] YAO Shujun, CHEN Juhong, HE Zheng. Research on product service capacity and pricing joint optimization strategy mechanism-based on dynamic and nonlinear perspective [J]. *Operations Research and Management Science*, 2013, 22(4): 231 – 240.
(姚树俊, 陈菊红, 和征. 产品服务能力与定价联合优化策略机制研究–基于动态性和非线性视角 [J]. 运筹与管理, 2013, 22(4): 231 – 240.)

[23] CACHON G P, FELDMAN P. Pricing services subject to congestion: Charge per-use fees or sell subscriptions? [J]. *Manufacturing & Service Operations Management*, 2011, 13(2): 244 – 260.

[24] HA A Y. Optimal pricing that coordinates queues with customer-chosen service requirements [J]. *Management Science*, 2001, 47(7): 915 – 930.

[25] ARMONY M, HAVIV M. Price and delay competition between two service providers [J]. *European Journal of Operational Research*, 2003, 147(1): 32 – 50.

[26] MENACHE I, OZDAGLAR A, SHIMKIN N. Socially optimal pricing of cloud computing resources [C] //*Proceedings of the 5th International ICST Conference on Performance Evaluation Methodologies and Tools*. Paris, France: ICST, 2011: 322 – 331.

[27] ZHOU W, CHAO X, GONG X. Optimal uniform pricing strategy of a service firm when facing two classes of customers [J]. *Production and Operations Management*, 2014, 23(4): 676 – 688.

[28] BAŞAR T, SRIKANT R. A Stackelberg network game with a large number of followers [J]. *Journal of optimization theory and applications*, 2002, 115(3): 479 – 490.

[29] SHEN H, BAŞAR T. Differentiated Internet pricing using a hierarchical network game model [C] //*Proceedings of the 2004 American Control Conference*. Boston, USA: IEEE, 2004, 3: 2322 – 2327.

[30] SHEN H, BAŞAR T. Optimal nonlinear pricing for a monopolistic network service provider with complete and incomplete information [J]. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 2007, 25(6): 1216 – 1223.

[31] SHEN H, BAŞAR T. Incentive-based pricing for network games with complete and incomplete information [J]. *Advances in Dynamic Game Theory*, 2007, 9: 431 – 458.

[32] SHEN H, BAŞAR T. Pricing under information asymmetry for a large population of users [J]. *Telecommunication Systems*, 2011, 47(1/2): 123 – 136.

[33] GUO P, LIU J J, WANG Y. Intertemporal service pricing with strategic customers [J]. *Operations Research Letters*, 2009, 37(6): 420 – 424.

[34] DO C T, TRAN N H, VAN NGUYEN M, et al. Social optimization strategy in unobserved queueing systems in cognitive radio networks [J]. *IEEE Communications Letters*, 2012, 16(12): 1944 – 1947.

[35] WANG J, ZHANG F. Monopoly pricing in a retrial queue with delayed vacations for local area network applications [J]. *IMA Journal of Management Mathematics*, 2015, 27(2): 315 – 334.

[36] ZHANG Feng. *Economics and game strategy analysis of strategic customers in queueing service systems* [D]. Beijing. Beijing Jiaotong University, 2014.
(张峰. 排队服务系统中策略性顾客的经济博弈策略分析 [D]. 北京: 北京交通大学, 2014.)

[37] ZENG Zhen. *Dynamic spectrum access mechanisms for cognitive radio based on queueing theory and game theory* [D]. Harbin:

Harbin Institute of Technology, 2014.
(曾禛. 基于排队论和博弈论的认知无线电动态频谱接入机制研究 [D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2015.)

[38] MAGLARAS C, ZEEVI A. Pricing and capacity sizing for systems with shared resources: approximate solutions and scaling relations [J]. *Management Science*, 2003, 49(8): 1018 – 1038.

[39] MAGLARAS C, ZEEVI A. Pricing and design of differentiated services: approximate analysis and structural insights [J]. *Operations Research*, 2005, 53(2): 242 – 262.

[40] KUMAR S, RANDHAWA R S. Exploiting market size in service systems [J]. *Manufacturing & Service Operations Management*, 2010, 12(3): 511 – 526.

[41] LEE C, WARD A R. Optimal pricing and capacity sizing when customers abandon[EB/OL]. https://www.researchgate.net/publication/263046748_Optimal_Pricing_and_Capacity_Sizing_when_Customers_Abandon.

[42] LOW D W. Optimal dynamic pricing policies for an M/M/s queue [J]. *Operations Research*, 1974, 22(3): 545 – 561.

[43] CHEN H, FRANK M Z. State dependent pricing with a queue [J]. *IIE Transactions*, 2001, 33(10): 847 – 860.

[44] BORGS C, CHAYES J T, DOROUDI S, et al. The optimal admission threshold in observable queues with state dependent pricing [J]. *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, 2014, 28(1): 101 – 119.

[45] ATA B, SHNEORSON S. Dynamic control of an M/M/1 service system with adjustable arrival and service rates [J]. *Management Science*, 2006, 52(11): 1778 – 1791.

[46] GANS N, SAVIN S. Pricing and capacity rationing for rentals with uncertain durations [J]. *Management Science*, 2007, 53(3): 390 – 407.

[47] PASCHALIDIS I C, TSITSIKLIS J N. Congestion-dependent pricing of network services [J]. *IEEE/ACM Transactions on Networking (TON)*, 2000, 8(2): 171 – 184.

[48] YOON S, LEWIS M E. Optimal pricing and admission control in a queueing system with periodically varying parameters [J]. *Queueing Systems*, 2004, 47(3): 177 – 199.

[49] ÇIL E B, KARAESMEN F, ÖRMECI E L. Dynamic pricing and scheduling in a multi-class single-server queueing system [J]. *Queueing Systems*, 2011, 67(4): 305 – 331.

[50] ÇIL E B, ÖRMECI E L, KARAESMEN F. Effects of system parameters on the optimal policy structure in a class of queueing control problems [J]. *Queueing Systems*, 2009, 61(4): 273 – 304.

[51] ADELMAN D. Price-directed control of a closed logistics queueing network [J]. *Operations Research*, 2007, 55(6): 1022 – 1038.

[52] WASERHOLE A, JOST V. Pricing in vehicle sharing systems: Optimization in queuing networks with product forms [J]. *EURO Journal on Transportation and Logistics*, 2016, 5(3): 293 – 320.

[53] BANERJEE S, FREUND D, LYKOURIS T. *Pricing and Optimization in Shared Vehicle Systems: An Approximation Framework* [EB/OL]. https://pdfs.semanticscholar.org/39b1/c449c924c0ca6c4a9eacfd0a880e1efb4bf5.pdf.

[54] BANERJEE S, RIQUELME C, JOHARI R. *Pricing in Ride-share Platforms: A Queueing-theoretic Approach* [EB/OL]. https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=2568258.

[55] MASUDA Y, WHANG S. Dynamic pricing for network service: Equilibrium and stability [J]. *Management Science*, 1999, 45(6): 857 – 869.

[56] BESBES O, MAGLARAS C. Revenue optimization for a make-to-order queue in an uncertain market environment [J]. *Operations Research*, 2009, 57(6): 1438 – 1450.

[57] AFÈCHE P, ATA B. Bayesian dynamic pricing in queueing systems with unknown delay cost characteristics [J]. *Manufacturing & Service Operations Management*, 2013, 15(2): 292 – 304.

[58] ATA B, OLSEN T L. Congestion-based leadtime quotation and pricing for revenue maximization with heterogeneous customers [J]. *Queueing Systems*, 2013, 73(1): 35 – 78.

[59] AFèCHE P, BARON O, KERNER Y. Pricing time-sensitive services based on realized performance [J]. *Manufacturing & Service Operations Management*, 2013, 15(3): 492 – 506.

[60] MENDELSON H, WHANG S. Optimal incentive-compatible priority pricing for the M/M/1 queue [J]. *Operations Research*, 1990, 38(5): 870 – 883.

[61] KIM J, RANDHAWA R S. *Asymptotically Optimal Dynamic Pricing in Observable Queues* [EB/OL]. https://www.researchgate.net/publication/272168971_Asymptotically_Optimal_Dynamic_Pricing_in_Observable_Queues.

[62] MAGLARAS C. Revenue management for a multiclass single-server queue via a fluid model analysis [J]. *Operations Research*, 2006, 54(5): 914 – 932.

[63] ÇELIK S, MAGLARAS C. Dynamic pricing and lead-time quotation for a multiclass make-to-order queue [J]. *Management Science*, 2008, 54(6): 1132 – 1146.

[64] BALACHANDRAN K R. Purchasing priorities in queues [J]. *Management Science*, 1972, 18(5): 319 – 326.

[65] TILT B, BALACHANDRAN K R. Stable and superstable customer policies in queues with balking and priority options [J]. *European Journal of Operational Research*, 1979, 3(6): 485 – 498.

[66] BALACHANDRAN K R, SRINIDHI B N. A stable cost application scheme for service center usage [J]. *Journal of Business Finance & Accounting*, 1988, 15(1): 87 – 99.

[67] ADIRI I, YECHIALI U. Optimal priority-purchasing and pricing decisions in nonmonopoly and monopoly queues [J]. *Operations Research*, 1974, 22(5): 1051 – 1066.

[68] HASSIN R, HAVIV M. Equilibrium threshold strategies: the case of queues with priorities [J]. *Operations Research*, 1997, 45(6): 966 – 973.

[69] ALPERSTEIN H. Note-optimal pricing policy for the service facility offering a set of priority prices [J]. *Management Science*, 1988, 34(5): 666 – 671.

[70] SINHA S K, RANGARAJ N, HEMACHANDRA N. Pricing surplus server capacity for mean waiting time sensitive customers [J]. *European Journal of Operational Research*, 2010, 205(1): 159 – 171.

[71] AFECHE P, SARHANGIAN V. *Rational Abandonment from Priority Queues: Equilibrium Strategy and Pricing Implications* [EB/OL]. https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=2679328.

[72] MANDJES M. Pricing strategies under heterogeneous service requirements [J]. *Computer Networks*, 2003, 42(2): 231 – 249.

[73] GHANEM S B. Computing center optimization by a pricing-priority policy [J]. *IBM Systems Journal*, 1975, 14(3): 272 – 291.

[74] DOLAN R J. Incentive mechanisms for priority queuing problems [J]. *The Bell Journal of Economics*, 1978, 9(2): 421 – 436.

[75] KIM Y J, MANNINO M V. Optimal incentive-compatible pricing for M/G/1 queues [J]. *Operations Research Letters*, 2003, 31(6): 459 – 461.

[76] VAN MIEGHEM J A. Dynamic scheduling with convex delay costs: the generalized cμ rule [J]. *The Annals of Applied Probability*, 1995, 5(3): 809 – 833.

[77] VAN MIEGHEM J A. Price and service discrimination in queuing systems: incentive compatibility of $Gc\mu$ scheduling [J]. *Management Science*, 2000, 46(9): 1249 – 1267.

[78] VAN MIEGHEM J A. Due-date scheduling: asymptotic optimality of generalized longest queue and generalized largest delay rules [J]. *Operations Research*, 2003, 51(1): 113 – 122.

[79] LEDERER P J, LI L. Pricing, production, scheduling, and delivery-time competition [J]. *Operations Research*, 1997, 45(3): 407 – 420.

[80] RAO S, PETERSEN E R. Optimal pricing of priority services [J]. *Operations Research*, 1998, 46(1): 46 – 56.

[81] DOROUDI S, AKAN M, HARCHOL-BALTER M, et al. *Priority Pricing in Queues with a Continuous Distribution of Customer Valuations* [EB/OL]. https://pdfs.semanticscholar.org/684f/8870ed0b727dd570283a885f98259bb3f7d0.pdf.

[82] AFECHE P. *Incentive-Compatible Revenue Management in Queueing Systems: Optimal Strategic Delay and Other Delaying Tactics* [EB/OL]. https://pdfs.semanticscholar.org/0342/d7899e1565a1e59b731dd0977c9410d95ec6.pdf.

[83] AFECHE P. Incentive-compatible revenue management in queueing systems: optimal strategic delay [J]. *Manufacturing & Service Operations Management*, 2013, 15(3): 423 – 443.

[84] YAHALOM T, HARRISON J M, KUMAR S. *Designing and Pricing Incentive Compatible Grades of Service in Queueing Systems* [EB/OL]. https://pdfs.semanticscholar.org/6577/23ea5910fae62fe38e2d65cad088bad32a4c.pdf.

[85] KATTA A K, SETHURAMAN J. *Pricing Strategies and Service Differentiation in Queues – a Profit Maximization Perspective* [EB/OL]. https://pdfs.semanticscholar.org/cd64/b644a2d14763836361010684c31e6b8871c9.pdf.

[86] KLEINROCK L. Optimum bribing for queue position [J]. *Operations Research*, 1967, 15(2): 304 – 318.

[87] GLAZER A, HASSIN R. Stable priority purchasing in queues [J]. *Operations Research Letters*, 1986, 4(6): 285 – 288.

[88] LUI F T. An equilibrium queuing model of bribery [J]. *Journal of Political Economy*, 1985, 93(4): 760 – 781.

[89] HASSIN R. Decentralized regulation of a queue [J]. *Management Science*, 1995, 41(1): 163 – 173.

[90] AFÈCHE P, MENDELSON H. Pricing and priority auctions in queueing systems with a generalized delay cost structure [J]. *Management Science*, 2004, 50(7): 869 – 882.

[91] ABHISHEK V, KASH I A, KEY P. Fixed and market pricing for cloud services [C] //*2012 IEEE Conference on Computer Communications Workshops (INFOCOM WKSHPS)*. Orlando, USA: IEEE, 2012: 157 – 162.

[92] DONCEL J, AYESTA U, BRUN O, et al. A resource-sharing game with relative priorities [J]. *Performance Evaluation*, 2014, 79(SI): 287 – 305.

[93] WU Y, BUI L, JOHARI R. Heavy traffic approximation of equilibria in resource sharing games [J]. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 2012, 30(11): 2200 – 2209.

[94] SO K C, SONG J S. Price, delivery time guarantees and capacity selection [J]. *European Journal of Operational Research*, 1998, 111(1): 28 – 49.

[95] PALAKA K, ERLEBACHER S, KROPP D H. Lead-time setting, capacity utilization, and pricing decisions under lead-time dependent demand [J]. *IIE transactions*, 1998, 30(2): 151 – 163.

[96] AFÈCHE P, PAVLIN J M. Optimal price/lead-time menus for queues with customer choice: Segmentation, pooling, and strategic delay [J]. *Management Science*, 2016, 62(8): 2412 – 2436.

[97] AFÈCHE P, PAVLIN M. *Optimal Price-lead Time Menus for Queues with Customer Choice: Priorities, Pooling & Strategic Delay* [EB/OL]. https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=2318157.

[98] PLAMBECK E L. Optimal leadtime differentiation via diffusion approximations [J]. *Operations Research*, 2004, 52(2): 213 – 228.

[99] PLAMBECK E L, WARD A R. Optimal control of a high-volume assemble-to-order system with maximum leadtime quotation and expediting [J]. *Queueing Systems*, 2008, 60(1): 1 – 69.

[100] BARAS J S, MA D J, MAKOWSKI A M. K competing queues with geometric service requirements and linear costs: The cμ rule is always optimal [J]. *Systems & Control Letters*, 1985, 6(3): 173 – 180.

[101] BUYUKKOC C, VARIAYA P, WALRAND J. The cμ rule revisited [J]. *Advances in Applied Probability*, 1985, 17(1): 237 – 238.

[102] HORDIJK A, KOOLE G. On the optimality of LEPT and cμ rules for parallel processors and dependent arrival processes [J]. *Advances in Applied Probability*, 1993, 25(4): 979 – 996.

[103] CHEN S, XIA L. Optimal control of admission prices and service rates in open queueing networks [C] //*Proceedings of the 20th IFAC Congress*. Toulouse, France: IFAC, 2017: 951 – 956.

[104] CAO X R. *Stochastic learning and optimization-a sensitivity-based approach* [M]. USA: Springer, 2007.

[105] LU Y, MUSALEM A, OLIVARES M, et al. Measuring the effect of queues on customer purchases [J]. *Management Science*, 2013, 59(8): 1743 – 1763.

[106] ALLON G, GURVICH I. Pricing and dimensioning competing large-scale service providers [J]. *Manufacturing & Service Operations Management*, 2010, 12(3): 449 – 469.

[107] GALLEGO G, HUH W T, KANG W, et al. Price competition with the attraction demand model: Existence of unique equilibrium and its stability [J]. *Manufacturing & Service Operations Management*, 2006, 8(4): 359 – 375.

[108] SO K C. Price and time competition for service delivery [J]. *Manufacturing & Service Operations Management*, 2000, 2(4): 392 – 409.

[109] LOCH C. *Pricing in markets sensitive to delay* [D]. Stanford: Stanford University, 1991.

[110] LEVHARI D, LUSKI I. Duopoly pricing and waiting lines [J]. *European Economic Review*, 1978, 11(1): 17 – 35.

[111] LUSKI I. On partial equilibrium in a queuing system with two servers [J]. *The Review of Economic Studies*, 1976, 43(3): 519 – 525.

[112] ARMONY M, HAVIV M. Price and delay competition in make-to-order operations [J]. *European Journal of Operational Research*, 2002, 89: 226 – 236.

[113] SIMCHI-LEVI D, WU S D, SHEN Z J. *Handbook of Quantitative Supply Chain Analysis: Modeling in the E-business Era* [M]. USA: Springer Science & Business Media, 2004.

[114] GUO P, ZIPKIN P. Analysis and comparison of queues with different levels of delay information [J]. *Management Science*, 2007, 53(6): 962 – 970.

[115] ALLON G, BASSAMBOO A, GURVICH I. “We will be right with you”: Managing customer expectations with vague promises and cheap talk [J]. *Operations Research*, 2011, 59(6): 1382 – 1394.

[116] SPENCER J, SUDAN M, XU K. Queueing with future information [J]. *ACM SIGMETRICS Performance Evaluation Review*, 2014, 41(3): 40 – 42.

[117] XU K, CHAN C W. Using future information to reduce waiting times in the emergency department via diversion [J]. *Manufacturing & Service Operations Management*, 2016, 18(3): 314 – 331.

作者简介:

陈　莎 (1992–), 女, 硕士研究生, 研究方向为排队系统的定价控制, E-mail: chenshaj@gmail.com;

夏　俐 (1980–), 男, 博士, 副教授, 研究方向为随机学习与优化、强化学习、排队论、马氏决策过程, E-mail: xial@tsinghua.edu.cn.