

## 两竞争推广商与酒店的合作协调研究

周永务, 嵇 凯, 胡树安, 钟远光<sup>†</sup>

(华南理工大学 工商管理学院, 广东 广州 510640)

**摘要:** 随着酒店市场竞争的日趋激烈, 酒店为了提高入住率, 纷纷与第三方推广商开展合作. 酒店如何通过与推广商合作来提高利润率成为酒店业重点关注的话题. 本文分析市场上存在一个占主导地位的酒店以及和酒店合作的两家推广商, 利用博弈论构建了酒店和推广商的利润函数模型. 为此, 首先分析了分散决策下博弈三方的最优策略, 进而分析了集中决策下三方的最优策略, 并刻画了影响酒店和推广商最优策略的影响因素. 并进一步提出了能实现整体最优并能实现双方Pareto改善的协调契约. 本文的研究发现以下现象: 1) 酒店的价格增加, 两推广商的利润均有提升; 2) 当推广商间的竞争激烈程度增大时, 推广商会压低利润水平并提升推广力度. 从而, 酒店的利润会不断提升, 并且供应链的协调程度也在不断增加. 数值例子也验证了所设计的协调契约对整体协调的有效性.

**关键词:** 酒店; 需求; 推广; 供应链协调

**引用格式:** 周永务, 嵇凯, 胡树安, 等. 两竞争推广商与酒店的合作协调研究. 控制理论与应用, 2018, 35(6): 868 – 877

**中图分类号:** O225      **文献标识码:** A

## Research on coordination strategy between hotel and two competing promoters

ZHOU Yong-wu, JI Kai, HU Shu-an, ZHONG Yuan-guang<sup>†</sup>

(School of Business and Administration, South China University of Technology, Guangzhou Guangdong 510640, China)

**Abstract:** With the increasing competition, hotels are seeking cooperation with the third party promoters to increase the occupancy rate. How hotels cooperate with promoters becomes a hot topic in hotel industry. This paper analyzes a market with one dominant hotel and two competing promoters and constructs their profit model by using game theory method. Then the optimal strategies are derived in the case of decentralized and centralized setting and some factors influencing their strategies are analyzed. The paper further proposes a coordination contract that can achieve Pareto improvement for the whole system. Our studies show that : 1) the profit of two competing promoters increases as the price of hotel increases; 2) As the degree of competition among promoters is increasing, promoters will reduce their profit to improve the promotion efforts, which makes the profit of the hotel and the coordination level of supply chain increase. We also validate the effectiveness of this contract and show the sensitivity analysis of parameters through other numerical examples.

**Key words:** hotel; demand; promotion; supply chain coordination

**Citation:** ZHOU Yongwu, JI Kai, HU Shuan, et al. Research on coordination strategy between hotel and two competing promoters. *Control Theory & Applications*, 2018, 35(6): 868 – 877

### 1 引言(Introduction)

随着酒店市场竞争的加剧, 为提高酒店客房的入住率, 各大酒店纷纷开展同第三方销售渠道的合作. 这其中最为常见的是酒店同线上旅行社(online travel agency, OTA)的合作, 如国内的速8、锦江之星等快捷连锁酒店同携程网、去哪儿网的合作, 这类合作有效地帮助酒店降低了客房的空置率. 然而, 由于当前市场上的几家强势OTA有着极大的市场影响力, 它们不仅向酒店提出过高的佣金要求, 还在很大程度上掌控

了酒店的销售渠道, 这样的情形对酒店的运作和发展极为不利. 因此, 为实现对销售渠道的控制以及降低成本等目标, 以7天、如家等为代表的连锁酒店开始侧重自有线上销售渠道的建设. 然而, 酒店自有线上销售网站存在点击率偏低的问题, 在转化率都相对稳定的情形下, 无法为酒店显著地提高客房需求. 因此, 这些酒店开始寻求第三方推广商的合作, 期望通过这些推广商所拥有的资源, 包括搜索引擎和门户网站页面等, 将包含酒店的线上销售网站链接的广告进行推广,

收稿日期: 2017-03-06; 录用日期: 2017-12-21.

<sup>†</sup>通信作者. E-mail: bmygzhong@scut.edu.cn; Tel.: +86 20-22236983.

本文责任编辑: 汪定伟.

国家自然科学基金项目(71371075, 71520107001, 71571070, 71420107024), 广东省高等学校珠江学者岗位计划项目(2017)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (71371075, 71520107001, 71571070, 71420107024) and the Guangdong Province Universities and Colleges Pearl River Scholar Funded Scheme (2017).

以此来提高酒店客房的需求. 通过对用户的购买记录以及在推广网站和酒店网站间的跳转次数进行统计, 酒店可以确定哪些用户订单由推广商的推广行为带来的. 其中国内外的搜索引擎如谷歌和百度均有提供单次点击付费 (cost per click, CPC)、单次购买付费 (cost per purchase, CPP) 服务<sup>[1-2]</sup>. 与此同时, 确定和第三方推广商的合作机制以及策略等成为酒店业急需解决的重要课题.

当前, 真正涉及酒店与推广商的研究很少, 相关的研究主要包括两部分. 第1部分研究聚焦在推广行为对供应链有关决策的影响, 主要有两类. 一类研究是假定供应链中仅有一方进行推广, 如Chen等<sup>[1]</sup>针对线上零售商与第三方网站的CPC合作模式, 分析了何时开通不同的分销渠道; Zhang等<sup>[3]</sup>考虑了多阶段供应链上的价格、库存和推广的联合决策问题; He等<sup>[4]</sup>则在需求受推广影响下研究了由单供应商和单零售商组成的供应链的协调问题; 进一步Kaya<sup>[5]</sup>讨论了外包和自主生产两种模型下各种契约的适用性; Ma等<sup>[6]</sup>则在3种供应链结构下, 研究了需求受推广及产品质量影响时各方决策问题; 而Eduardo等<sup>[7]</sup>在两层供应链上讨论了一个需求受推广影响的多物品EOQ模型等. 另一类研究是假定供应链上的各方进行联合推广或不同供应链间进行竞争推广, 如Karray<sup>[8]</sup>和Karray等<sup>[9]</sup>在假定供应链进行联合需求推广情形下, 分别研究了不同渠道结构的差别, 并对互补品联盟与相同产品联盟进行了比较; Wu<sup>[10]</sup>则在推广影响需求情形下, 研究了两个竞争供应链的谈判问题等; 基于竞价排名的广告模式, Ye等<sup>[11]</sup>研究了当零售商通过竞价获得较前排名时, 其销售价格应当降低还是提高; 王磊等<sup>[12]</sup>和谭建等<sup>[13]</sup>在制造商与多家零售商竞争合作下, 前者研究了制造商的广告补贴问题, 而后者则比较了制造商与零售商进行广告推广的4种供应链广告模型. 第2部分研究主要集中在酒店与OTA合作上. 这类研究主要是讨论如何将OTA上的客房需求分配给特定的酒店以提高其入住率, 而酒店如何将客房资源分配部分给OTA销售. 例如, Guo等<sup>[14]</sup>和Ling等<sup>[15]</sup>研究了酒店与OTA合作机制, 探讨了该合作机制下酒店定价策略以及客房资源分配等问题, 并为酒店选择何种类型的OTA进行合作提供了建议; 而Toh等<sup>[16]</sup>则在OTA采用折扣销售模式下, 研究了酒店与OTA的合作模型.

与本文最为接近的是胡树安等<sup>[17-18]</sup>的研究, 同样是以酒店与推广商合作为研究背景. 虽然胡树安等<sup>[17-18]</sup>针对信息不对称下酒店与推广商的合作进行了契约设计, 帮助酒店规避的推广商的谎报行为. 但是其仅考虑单个推广商, 而且没有考虑供应链的合作协调研究. 本文将聚焦酒店与两家第三方推广商间的合作问题, 讨论了两家推广商在竞争情形下同酒店的合作模式. 与酒店同OTA的合作不同, 酒店与推广商的合作机制如下: 酒店负责销售客房而两家第三方推

广商只负责推广; 第三方推广商决定对酒店客房的推广力度, 而酒店则要为因推广增加的客房需求支付相应的佣金. 本文研究的问题是: i) 酒店如何设计佣金策略来激励推广商加大推广力度, 以提高酒店的客房入住率进而提高酒店经营效益; ii) 酒店如何设计契约来协调推广商的推广力度, 以便在达到整体利润最优时也实现三方利润的帕累托改善. 对比酒店与单个推广商合作的情形, 文章还分析了推广商间竞争激烈程度和推广商的谈判能力对推广商利润、酒店利润以及供应链协调效率的影响. 分析还发现, 由于推广商间存在竞争关系, 推广商之间的决策还会互相影响.

## 2 问题描述(Problem description)

设有一家酒店和两个推广商组成的两层服务供应链, 其中酒店为主导方, 两家推广商为跟随方. 酒店以价格 $p$ 在线预订销售客房, 面对不确定需求, 为了提高其客房入住率, 酒店需要推广商为其推广, 为获得推广商 $i$  ( $i = 1, 2$ ) 的推广, 酒店制定支付给推广商的佣金水平 $w_i$  (每多销售出一间客房的抽成), 而推广商在该佣金水平上决定对酒店客房的推广力度 $\rho_i$  ( $\rho_i \geq 1$ ), 以提高酒店总体的顾客需求. 三方依据期望利润最大化原则进行决策.

假定酒店拥有客房数为 $c$  ( $c > 0$ ), 酒店客房的原有市场需求 $\xi$ 是个随机变量, 设 $f(\xi) > 0$ 和 $F(\xi)$ 分别为其概率密度和概率分布, 且 $E\xi = \mu < c$ ,  $D\xi = \sigma^2$ .

**假设 1** 在只存在一个推广商时, 经推广后, 酒店的客房需求实现由 $\xi$ 到 $\rho\xi$ 的增长, 即使得酒店客房需求增加 $(\rho - 1)\xi$ . 而当两家推广商同时为酒店进行推广时, 某推广商实际形成的推广作用受另一推广商的推广力度影响. 此时, 推广商 $i$ 实际形成的推广力度为 $\bar{\rho}_i = \rho_i + \lambda(\rho_i - \rho_j)$ , 其中:  $i, j \in \{1, 2\}$ ,  $i \neq j$ ,  $\lambda > 0$ , 表示两推广商的竞争程度. 那么, 由两家推广商推广所形成的总体推广力度为 $\rho = (\bar{\rho}_1 - 1) + (\bar{\rho}_2 - 1) + 1 = \rho_1 + \rho_2 - 1$ . 在同两家推广商开展合作后, 酒店的客房销售期望增长为

$$D = \int_0^{c/\rho} \rho \xi f(\xi) d\xi + \int_{c/\rho}^{\infty} c f(\xi) d\xi = c - \rho \int_0^{c/\rho} F(\xi) d\xi,$$

其中 $\rho = \rho_1 + \rho_2 - 1$ .

此外, 本文还假定推广商由于竞争优势所带来的有效的需求增量要小于推广商在无竞争情形下推广力度引致的有效需求增量, 即

$$\rho_1 - 1 > \lambda|\rho_1 - \rho_2|, \quad \rho_2 - 1 > \lambda|\rho_1 - \rho_2|.$$

此时, 就有

$$\lambda < \frac{\min\{\rho_1 - 1, \rho_2 - 1\}}{|\rho_1 - \rho_2|}, \quad \rho_i > 1, \quad i = 1, 2.$$

**假设 2** 在推广商的推广成本上, 本文参照Kapusinski等(2004)<sup>[19]</sup>, 假设推广商提供推广力度 $\rho_i$ 对

应的推广成本为  $C(\rho_i, \xi) = k_i(\rho_i - 1)^2 \xi^2$ , 其中  $k_i > 0$  表示吸引顾客即增加需求的困难程度, 且推广商的推广成本信息是透明的.

**假设3** 在这两家推广商中, 推广商1由于掌握了更多的资源而处于相对优势地位, 其推广成本系数较推广商2来的小, 有  $k_1 < k_2$ . 那么, 两家推广商的成本期望分别为  $k_1(\mu^2 + \sigma^2)(\rho_1 - 1)^2$  和  $k_2(\mu^2 + \sigma^2)(\rho_2 - 1)^2$ .

### 3 分散决策模型(The model of decentralized decision)

本节将在Stackelberg博弈架构下, 研究处于主导地位的酒店与两家处于从属地位的推广商的策略选择, 即酒店在预期到两家推广商对其任意给定策略的最佳响应时, 确定其给予推广商的佣金  $w_i$ . 而在两家推广商则在Nash博弈架构下, 研究推广商各自在观察酒店的决策后确定其推广力度  $\rho_i$ .

在酒店与推广商合作后, 其客房需求得到提高, 酒店需要为这部分客房需求支付推广费用, 这部分费用的期望为  $w_i(\bar{\rho}_i - 1)\mu$ ,  $i = 1, 2$ , 其中  $\bar{\rho}_i$  为推广商  $i$  实际形成的推广力度. 这样酒店的期望利润  $\pi_h$  和推广商的期望利润  $\pi_{O_i}$  分别为

$$\pi_h = p(c - \rho \int_0^{c/\rho} F(x)dx) - w_1(\bar{\rho}_1 - 1)\mu - w_2(\bar{\rho}_2 - 1)\mu, \quad (1)$$

$$\pi_{O1} = w_1(\bar{\rho}_1 - 1)\mu - k_1(\mu^2 + \sigma^2)(\rho_1 - 1)^2, \quad (2)$$

$$\pi_{O2} = w_2(\bar{\rho}_2 - 1)\mu - k_2(\mu^2 + \sigma^2)(\rho_2 - 1)^2. \quad (3)$$

#### 3.1 推广商的决策(The decision of promoter)

对于酒店任意给定的佣金水平, 推广商必须决策自己的最优推广力度  $\rho_i$  以最大化自己的期望利润.

由于分别求式(2)–(3)关于  $\rho_1$  和  $\rho_2$  的二阶偏导得

$$\frac{\partial^2 \pi_{O_i}}{\partial \rho_i^2} = -2k_i(\mu^2 + \sigma^2) < 0, \quad i = 1, 2.$$

因此两推广商的期望利润分别是关于  $\rho_1$  和  $\rho_2$  的凹函数, 所以对两家推广商而言, 一定存在最优的推广力度, 使得自身利润最大化. 分别求式(2)–(3)关于  $\rho_1$  和  $\rho_2$  的一阶偏导, 并使之为零, 可得推广商的最优推广力度为

$$\rho_{i1} = \frac{\mu(1 + \lambda)}{2k_i(\mu^2 + \sigma^2)} w_{i1} + 1, \quad i = 1, 2. \quad (4)$$

**性质1** 酒店决策的最优佣金水平  $w_i$  与推广商决策的最优推广力度  $\rho_i$  呈一一对应关系, 即双方在应对对方可能的策略时只有一种策略选择, 二者满足

$$\rho_{i1} = \frac{\mu(1 + \lambda)}{2k_i(\mu^2 + \sigma^2)} w_{i1} + 1, \quad i = 1, 2.$$

#### 3.2 酒店的决策(The decision of hotel)

处于主导地位的酒店, 必须在预期推广商可能的反应对策下, 给出自己的决策. 由性质1可以看出两个

推广商的可能反应, 那么将式(4)代入式(1), 得

$$\begin{aligned} \pi_h(w_1, w_2) = & p[c - \rho(w_1, w_2) \int_0^{c/\rho(w_1, w_2)} F(x)dx] - \\ & \mu[w_1(\bar{\rho}_1(w_1, w_2) - 1) + w_2(\bar{\rho}_2(w_1, w_2) - 1)]. \end{aligned} \quad (5)$$

由于对式(5)求关于  $w_i$  的二阶偏导, 得

$$\begin{aligned} A_1 = \frac{\partial^2 \pi_h(w_1, w_2)}{\partial w_1^2} = & -\frac{\mu(1 + \lambda)}{2k_1(\mu^2 + \sigma^2)} \cdot \{2\mu(1 + \lambda) + \\ & \frac{pc^2}{\rho(w_1, w_2)^3} f(\frac{c}{\rho(w_1, w_2)}) \frac{\mu(1 + \lambda)}{2k_1(\mu^2 + \sigma^2)}\} < 0, \\ B_1 = \frac{\partial^2 \pi_h(w_1, w_2)}{\partial w_1 \partial w_2} = & -\frac{\mu(1 + \lambda)}{2k_1(\mu^2 + \sigma^2)} \cdot \{-\lambda(\frac{k_1}{k_2} + 1) + \\ & \frac{pc^2}{\rho(w_1, w_2)^3} f(\frac{c}{\rho(w_1, w_2)}) \frac{\mu(1 + \lambda)}{2k_2(\mu^2 + \sigma^2)}\}, \\ C_1 = \frac{\partial^2 \pi_h(w_1, w_2)}{\partial w_2^2} = & -\frac{\mu(1 + \lambda)}{2k_2(\mu^2 + \sigma^2)} \cdot \{2\mu(1 + \lambda) + \\ & \frac{pc^2}{\rho(w_1, w_2)^3} f(\frac{c}{\rho(w_1, w_2)}) \frac{\mu(1 + \lambda)}{2k_2(\mu^2 + \sigma^2)}\} < 0. \end{aligned}$$

又因为

$$\begin{aligned} A_1 C_1 > & (\frac{\mu(1 + \lambda)}{2k_1(\mu^2 + \sigma^2)})^2 (\frac{\mu(1 + \lambda)}{2k_2(\mu^2 + \sigma^2)})^2 \cdot \\ & \frac{pc^2}{\rho(w_1, w_2)^3} f(\frac{c}{\rho(w_1, w_2)})^2, \\ B_1^2 < & (\frac{\mu(1 + \lambda)}{2k_1(\mu^2 + \sigma^2)})^2 (\frac{\mu(1 + \lambda)}{2k_2(\mu^2 + \sigma^2)})^2 \cdot \\ & \frac{pc^2}{\rho(w_1, w_2)^3} f(\frac{c}{\rho(w_1, w_2)})^2, \end{aligned}$$

那么  $A_1 C_1 - B_1^2 > 0$ , 所以存在最优的  $w_1$  和  $w_2$  使得酒店的利润最大. 对式(5)求关于  $w_i$  的一阶偏导, 并使之为零, 得

$$\begin{aligned} \frac{\mu(1 + \lambda)}{2k_1(\mu^2 + \sigma^2)} \{p \int_0^{c/\rho(w_1, w_2)} [F(\frac{c}{\rho(w_1, w_2)}) - \\ F(x)]dx - \mu[2(1 + \lambda)w_1 - \lambda(\frac{k_1}{k_2} + 1)w_2]\} = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\mu(1 + \lambda)}{2k_2(\mu^2 + \sigma^2)} \{p \int_0^{c/\rho(w_1, w_2)} [F(\frac{c}{\rho(w_1, w_2)}) - \\ F(x)]dx - \mu[2(1 + \lambda)w_2 - \lambda(\frac{k_2}{k_1} + 1)w_1]\} = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

由式(6)–(7)可得

$$w_2 = tw_1, \quad (8)$$

$$\text{其中 } t = \frac{2 + 3\lambda + \lambda \frac{k_2}{k_1}}{2 + 3\lambda + \lambda \frac{k_1}{k_2}}.$$

将上式代入式(6)中, 得关于 $w_1$ 的方程

$$p \int_0^{c/\rho(w_1)} [F(\frac{c}{\rho(w_1)}) - F(x)] dx - \mu[2(1 + \lambda) - \lambda(\frac{k_1}{k_2} + 1)t]w_1 = 0. \quad (9)$$

求解式(9)并结合式(8)和式(4), 即可得到酒店决策的最优佣金水平 $w_i$ 及推广商的最优推广力度 $\rho_{i1}$ , 从而使得两方期望利润最大化.

**引理 1** 分散决策下, 对于推广竞争因子 $\lambda$ , 有 $\lambda < \frac{2}{\gamma - 1}$ , 其中 $\gamma = \frac{k_2}{k_1}$ . 证明见附录I.

**性质 2** 分散决策情形下, 酒店决策的佣金水平以及两推广商决策的最优推广力度一定满足 $w_{i1} > 0$ ,  $\rho_{i1} > 1$ ,  $i = 1, 2$ . 证明见附录II.

**性质 3** 在酒店决策的最优佣金水平中, 有 $w_{11} < w_{21}$ ; 而在由两推广商决策的最优推广力度上, 有 $\rho_{11} > \rho_{21}$ . 推广商实际起作用的推广力度上, 有 $\rho_{11} < \bar{\rho}_1$ ,  $\rho_{21} > \bar{\rho}_2$ ,  $\bar{\rho}_1 > \bar{\rho}_2$ 且 $\frac{\bar{\rho}_1 - \bar{\rho}_2}{\rho_{11} - \rho_{21}} = 1 + 2\lambda$ . 证明见附录III.

由性质2可以看出, 尽管酒店给予推广商1的佣金水平小于推广商2的佣金水平, 但酒店由推广商1获得的推广要大于推广商2的, 这主要是由推广商1的推广成本小于推广商2导致. 在实际起到推广的力度上, 推广商1也要大于推广商2, 且两者实际推广力度的差额与所决策的推广力度的差额之比同 $\lambda$ 正相关. 此外, 推广商1实际形成的推广力度要大于决策的推广力度; 推广商2则相反.

**性质 4** 分散决策情形下: i) 酒店支付的最佳佣金水平 $w_i$ 与酒店客房数 $c$ 、客房价格 $p$ 成正比, 与酒店原有需求期望 $\mu$ 、方差 $\sigma^2$ 成反比. 即有关系式

$$\frac{\partial w_{i1}}{\partial c} > 0, \frac{\partial w_{i1}}{\partial p} > 0, \frac{\partial w_{i1}}{\partial \mu} < 0, \frac{\partial w_{i1}}{\partial \sigma^2} < 0;$$

ii) 最优推广水平 $\rho_i$ 与酒店客房数 $c$ 、客房价格 $p$ 成正比, 与酒店原有需求方差 $\sigma^2$ 成反比, 即有

$$\frac{\partial \rho_{i1}}{\partial c} > 0, \frac{\partial \rho_{i1}}{\partial p} > 0, \frac{\partial \rho_{i1}}{\partial \sigma^2} < 0.$$

证明见附录IV.

由性质4可以发现, 当酒店客房数以及客房价格增大时, 酒店提供给两推广商最优佣金水平, 以及两推广商的推广力度都相应提高. 这主要由于酒店客房数以及客房价格越有动机激励推广商进行推广. 而当酒店原有需求方差增大时, 两推广商的最优推广水平却随之下降. 这主要由于推广成本的提高, 会降低酒店

推广的需求, 而原有需求的波动增大也使得酒店因无法有效确定原有需求而少有动力进行推广.

分散决策时酒店与两推广商进行合作所获得的整体利润并非最优. 所以, 下面将讨论酒店如何进行契约设计, 以在实现整体利润最优的同时, 使得酒店和推广商的利润都得到帕累托改善. 为此首先讨论集中决策情形下的最优决策, 然后再讨论酒店的协调契约设计.

#### 4 集中决策模型(The model of centralized decision)

在集中式决策情形下, 酒店和两个推广商组成一个统一的整体进行决策, 目的是借由权力集中来实现整体利益的改善.

集中决策下, 整体的期望利润 $\pi$ 为

$$\pi = p(c - \rho \int_0^{c/\rho} F(x) dx) - k_1(\mu^2 + \sigma^2)(\rho_1 - 1)^2 - k_2(\mu^2 + \sigma^2)(\rho_2 - 1)^2. \quad (10)$$

由于对式(7)关于 $\rho_i$ 的二阶导数, 得

$$A_2 = \frac{\partial^2 \pi}{\partial \rho_1^2} = -p \frac{c^2}{\rho^3} f(\frac{c}{\rho}) - 2k_1(\mu^2 + \sigma^2) < 0,$$

$$B_2 = \frac{\partial^2 \pi}{\partial \rho_1 \partial \rho_2} = -p \frac{c^2}{\rho^3} f(\frac{c}{\rho}),$$

$$C_2 = \frac{\partial^2 \pi}{\partial \rho_2^2} = -p \frac{c^2}{\rho^3} f(\frac{c}{\rho}) - 2k_2(\mu^2 + \sigma^2) < 0.$$

又因为 $A_2 C_2 > (p \frac{c^2}{\rho^3} f(\frac{c}{\rho}))^2$ , 那么 $A_2 C_2 - B_2^2 > 0$ , 所以存在最优的 $\rho_{12}$ 和 $\rho_{22}$ 使得供应链的利润最大. 对式(10)求关于 $\rho_i$ 的一阶偏导, 并使之为零, 得

$$\frac{\partial \pi}{\partial \rho_1} = p[\frac{c}{\rho} F(\frac{c}{\rho}) - \int_0^{c/\rho} F(x) dx] - 2k_1(\mu^2 + \sigma^2)(\rho_1 - 1) = 0, \quad (11)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial \rho_2} = p[\frac{c}{\rho} F(\frac{c}{\rho}) - \int_0^{c/\rho} F(x) dx] - 2k_2(\mu^2 + \sigma^2)(\rho_2 - 1) = 0. \quad (12)$$

由式(11)–(12)得

$$\rho_2 = \frac{k_1}{k_2}(\rho_1 - 1) + 1. \quad (13)$$

将式(13)代入式(11)得关于 $\rho_1$ 的方程.

$$p[\frac{c}{\rho(\rho_1)} F(\frac{c}{\rho(\rho_1)}) - \int_0^{c/\rho(\rho_1)} F(x) dx] - 2k_1(\mu^2 + \sigma^2)(\rho_1 - 1) = 0. \quad (14)$$

求解式(14)并结合式(13), 即可得到最优的 $\rho_{12}$ 和 $\rho_{22}$ 使得供应链的利润最大, 且有 $\rho_{12} > \rho_{22}$ .

**性质 5** 集中决策情形下, 最优推广水平 $\rho_{i2}$ 与酒店的客房数 $c$ 、客房价格 $p$ 、另一推广商的成本系数 $k_j$ , ( $i \neq j$ )成正比, 与酒店原有需求期望 $\mu$ 、方差 $\sigma^2$ 、自身推广成本 $k_i$ 成反比, 即有关系式

$$\frac{\partial \rho_{i2}}{\partial c} > 0, \frac{\partial \rho_{i2}}{\partial p} > 0, \frac{\partial \rho_{i2}}{\partial k_j} > 0,$$

$$\frac{\partial \rho_{i2}}{\partial \mu} < 0, \frac{\partial \rho_{i2}}{\partial \sigma^2} < 0, \frac{\partial \rho_{i2}}{\partial k_i} < 0.$$

性质5的证明与性质4类似, 这里从略. 通过性质5可以看出, 在集中决策情形下, 若酒店的客房数越多、客房单价越高就越需要推广商的推广; 而当酒店原有的需求期望、方差以及推广成本系数越大, 酒店所需求的推广力度就会相对降低. 此外, 若竞争推广的成本系数越大, 推广商进行推广的动力越大.

**性质 6** 由于双边效应存在, 集中决策下, 整体利润至少不小于分散决策下的各方利润之和. 证明见附录V.

由性质6可知, 在集中决策情形下所获得的整体利润至少不会少于分散决策下的各方利润之和. 下面, 本文将在基于整体利润最优下, 进行契约设计以使得酒店和推广商的利润得到帕累托改善, 即对增加的利润进行分配.

## 5 推广商与酒店间协调契约设计(Design of coordination contract between promoter and hotel)

设计契约的原则是在保证整体利润最优的前提下, 为促使酒店和两家推广商都有接受契约的动机, 需要设计出的契约能够实现酒店和两推广商的利润的帕累托改善. 即在酒店设计契约下无论是酒店还是推广商所实现的利润水平都不小于分散决策下实现的利润水平, 亦即在契约下酒店和两推广商的利润分别不小于:

$$\pi_h^S = \pi_h(w_{11}, w_{21}, \rho_{11}, \rho_{21}),$$

$$\pi_{O1}^S = \pi_{O1}(\rho_{11}, w_{11}),$$

$$\pi_{O2}^S = \pi_{O2}(\rho_{21}, w_{21}).$$

换言之, 本文的契约主要是对决策模式由分散决策转为集中决策时所增加的利润进行分配.

### 5.1 契约设计(The design of coordination contract)

本文考虑的契约是实际中酒店常用的模式, 即由酒店一次性支付费用 $f_i$  ( $i=1, 2$ )给推广商 $i$ , 而推广商 $i$ 则按契约要求进行推广力度为 $\rho_{i2}$  ( $i=1, 2$ )的推广.

这时的需求为 $D_F = c - \rho_F \int_0^{c/\rho_F} F(\xi) d\xi$ , 其中 $\rho_F = \rho_{12} + \rho_{22} - 1$ . 而两推广商推广成本为 $k_i(\mu^2 + \sigma^2)(\rho_{i2} - 1)^2$ . 酒店为保证自己和两推广商由足够的动机接受这个契约, 必须要确定合理的支付给推广商的费用 $f_i$ . 在该契约下酒店的利润 $\pi_h^*$ 与推广商的利润 $\pi_{O_i}^*$ 满足:

$$\pi_h^* = pD_F - f_1 - f_2 \geq \pi_h^S, \quad (15)$$

$$\pi_{O1}^* = f_1 - k_1(\mu^2 + \sigma^2)(\rho_{12} - 1)^2 \geq \pi_{O1}^S, \quad (16)$$

$$\pi_{O2}^* = f_2 - k_2(\mu^2 + \sigma^2)(\rho_{22} - 1)^2 \geq \pi_{O2}^S. \quad (17)$$

**定理 1** 当酒店给予的费用 $f_i$ 在 $(f_i^{\min}, f_i^{\max})$ 区

间上时, 在此契约下制造商和零售商的利润都至少不小于分散决策下的利润, 其中:

$$f_i^{\min} = \pi_{O_i}^S + k_i(\mu^2 + \sigma^2)(\rho_{i2} - 1)^2,$$

$$f_i^{\max} = pD_F - \pi_h^S - \pi_{O_j}^S - k_j(\mu^2 + \sigma^2)(\rho_{j2} - 1)^2, \quad i \neq j.$$

由定理1可以给出 $f_i$ 的合理取值范围, 但对于 $f_i$ 的准确取值还无法确定. 本文将在下一小节讨论费用 $f_i$ 的确定.

### 5.2 契约中支付费用的确定 (Determination of payment costs in contract)

对于费用 $f_i$ 的确定不是单由酒店决定的, 而与酒店和两推广商的谈判能力相关. 本文将运用纳什谈判模型来讨论费用 $f_i$ 的取值. 针对 $f_1$ 的谈判由酒店和推广商1展开, 在谈判中推广商1的谈判能力为 $\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ ), 酒店的谈判能力为 $1 - \alpha$ . 而 $f_2$ 的谈判则由酒店与推广商2进行, 其中: 推广商2的谈判能力为 $\beta$  ( $0 < \beta < 1$ ), 酒店的谈判能力为 $1 - \beta$ . 这样对最优 $f_i^*$ 的确定就转化为求解问题 $R_1$ 和 $R_2$ :

$$R_1 : \max_{f_1} \{pD_F - \pi_h^S - f_1 - f_2\}^{1-\alpha} \cdot \{f_1 - \pi_{O1}^S - k_1(\mu^2 + \sigma^2)(\rho_{12} - 1)^2\}^\alpha,$$

$$R_2 : \max_{f_2} \{pD_F - \pi_h^S - f_1 - f_2\}^{1-\beta} \cdot \{f_2 - \pi_{O2}^S - k_2(\mu^2 + \sigma^2)(\rho_{22} - 1)^2\}^\beta.$$

分别求解问题 $R_1$ 和 $R_2$ , 得

$$f_1 = \alpha\{pD_F - \pi_h^S - \pi_{O1}^S - k_1(\mu^2 + \sigma^2)(\rho_{12} - 1)^2 - f_2\} + \pi_{O1}^S + k_1(\mu^2 + \sigma^2)(\rho_{12} - 1)^2, \quad (18)$$

$$f_2 = \beta\{pD_F - \pi_h^S - \pi_{O2}^S - k_2(\mu^2 + \sigma^2)(\rho_{22} - 1)^2 - f_1\} + \pi_{O2}^S + k_2(\mu^2 + \sigma^2)(\rho_{22} - 1)^2. \quad (19)$$

联立式(18)–(19), 得

$$f_1^* = \frac{\alpha(1-\beta)}{1-\alpha\beta} \Delta\pi + \pi_{O1}^S + k_1(\mu^2 + \sigma^2)(\rho_{12} - 1)^2, \quad (20)$$

$$f_2^* = \frac{\beta(1-\alpha)}{1-\alpha\beta} \Delta\pi + \pi_{O2}^S + k_2(\mu^2 + \sigma^2)(\rho_{22} - 1)^2, \quad (21)$$

其中 $\Delta\pi = pD_F - k_1(\mu^2 + \sigma^2)(\rho_{12} - 1)^2 - k_2(\mu^2 + \sigma^2)(\rho_{22} - 1)^2 - \pi_h^S - \pi_{O1}^S - \pi_{O2}^S$ 为由分散决策模式转为集中决策模式时, 供应链上增加的利润.

**定理 2** 存在最优契约 $\{(\rho_{12}, f_1^*), (\rho_{22}, f_2^*)\}$ , 使得整体供应链得到协调. 其中:  $f_i^* \in (f_i^{\min}, f_i^{\max})$ , 满足式(20)和式(21),  $\rho_{i2}$ 为集中决策下推广商 $i$ 的最优推广力度.

由定理1和定理2可知,在最优契约下,酒店的利润增加 $\Delta\pi_h = \frac{(1-\beta)(1-\alpha)}{1-\alpha\beta}\Delta\pi$ ,而推广商1和推广商2增加的利润分别为

$$\Delta\pi_{O1} = \frac{\alpha(1-\beta)}{1-\alpha\beta}\Delta\pi,$$

$$\Delta\pi_{O2} = \frac{\beta(1-\alpha)}{1-\alpha\beta}\Delta\pi.$$

由此可见,契约下酒店和推广商的对利润分配与它们的谈判能力密切相关,能力越强,获得的收益越大.此外,推广商1所增加的利润还与推广商2的谈判能力相关,当推广商2的谈判能力越强时,推广商1所增加的利润越小;对于推广商2也有类似特征.

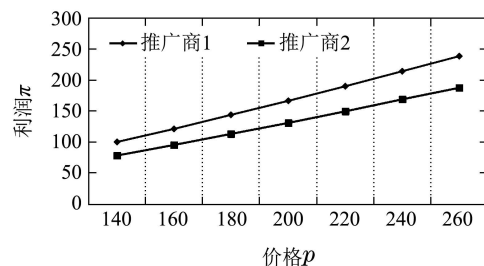
在该契约下,不仅使得供应链的利润达到最优,还使得酒店和推广商的利润都得到了提升.

## 6 算例分析(Numerical analysis)

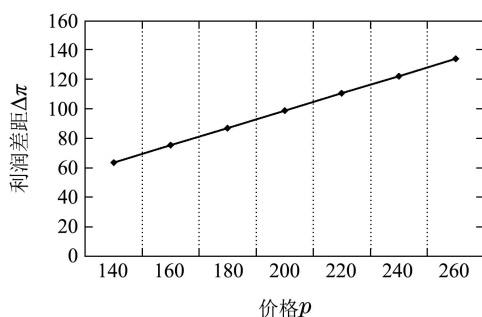
某酒店拥有客房100间,每间客房都是一样的.客房原有需求服从(0, 100)均匀分布,则 $E\xi^2 = \frac{1000}{3}$ .推广商*i*的推广成本期望为 $k_i(\rho - 1)^2 E\xi^2$ .在此情形下,来观察价格*p*、推广成本系数 $k_i$ 以及推广商竞争程度 $\lambda$ 的变化对相应决策和利润的影响.

### 6.1 价格变化的影响(The impact of price)

由性质3和性质5可以知道价格变化对分散决策下的推广力度、佣金水平以及集中决策下的推广力度的影响,因此本节主要考虑在不影响需求变动的范围内,考虑价格变化对两情形下各方利润的影响.此时令 $k_1 = 4$ ,  $k_2 = 4.5$ ,  $\lambda = 0.3$ ,酒店单间客房的价格*p*从140增加到260,通过计算结果制图1.



(a) 推广商利润



(b) 集中和分散决策下利润差距

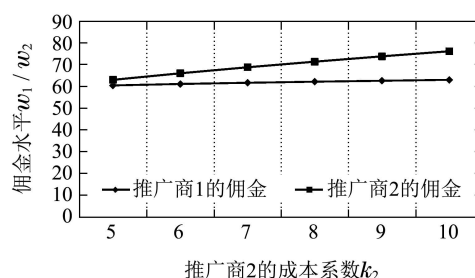
图1 价格变化对利润的影响

Fig. 1 The impact of price changes on profits

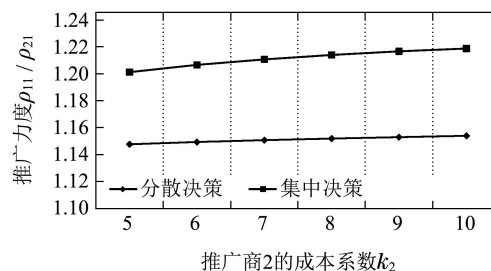
由图1不难看出,随着价格的增大,分散决策下,两家推广商的利润都呈增长趋势,并且随着价格的增大,推广商1与推广商2的利润差距不断扩大.同时,相对分散决策,集中决策下的整体利润都来得大,且随着价格的增大而不断扩大,这也意味着本文的契约在价格越大时,优势越明显.

### 6.2 推广成本系数变化的影响(The impact of promotion cost)

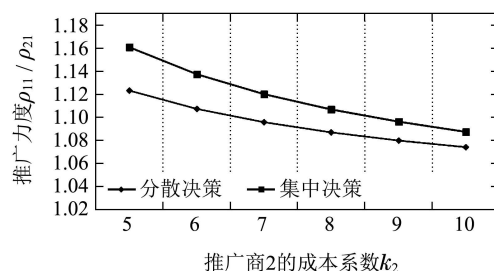
本节主要讨论推广商1和推广商2相对推广成本系数变化对各方利润的影响,即考虑推广商1的推广成本系数固定,而推广商2的推广成本系数变化时的影响,等同于考察 $\gamma$ 值变化的影响.令 $k_1 = 4$ ,  $\lambda = 0.3$ ,  $p = 200$ ,  $k_2$ 从5增加到10,计算得图2-3.



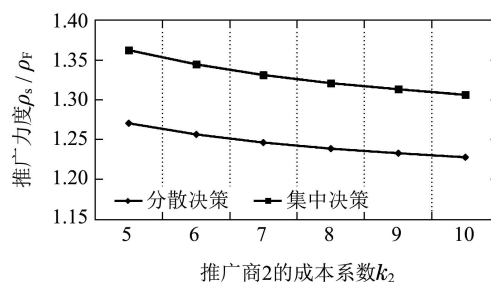
(a) 推广商佣金



(b) 集中和分散决策下推广商1的最优推广力度



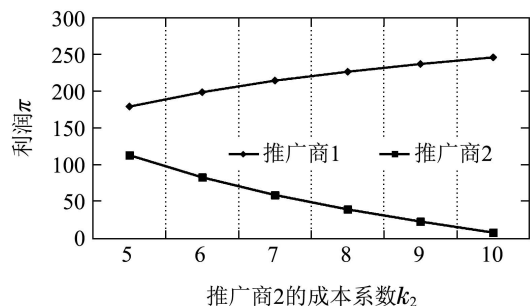
(c) 集中和分散决策下推广商2的最优推广力度



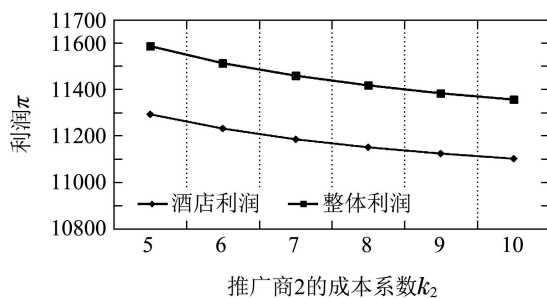
(d) 总体推广力度

图2  $k_2$ 变化对各方决策的影响

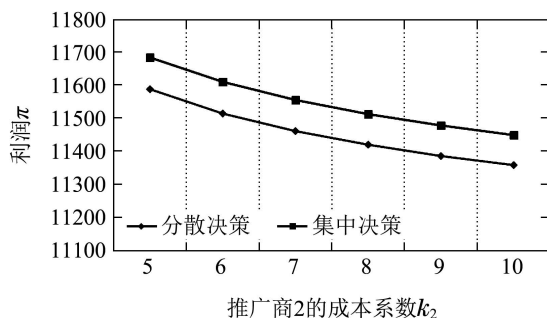
Fig. 2 The impact of  $k_2$  on decision-making



(a) 推广商利润



(b) 酒店与整体利润



(c) 集中和分散决策下整体利润

图3  $k_2$ 变化对各方利润的影响Fig. 3 The impact of  $k_2$  on profits

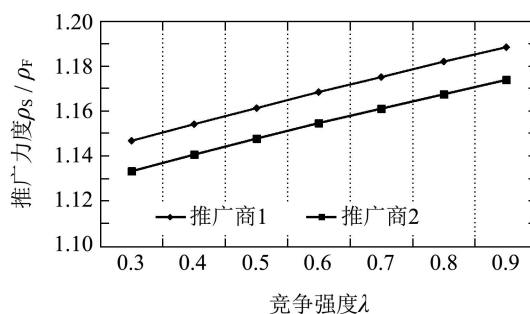
由图2不难看出, 当 $k_2$ 增大时, 分散决策下推广商2的佣金水平显著提高, 而推广商1的佣金也呈现出一定的升高趋势, 这主要由于推广商之间的交互影响引起的. 集中决策和分散决策模式下推广商2的最优推广力度都减小, 而推广商1的最优推广力度在增大, 但总体上的推广力度都呈下降趋势. 总的说, 各方在集中决策下的推广力度都较分散决策下的来的大.

由图3可以发现, 随着 $k_2$ 的增大, 分散决策下推广商2的利润呈显著下降趋势, 而推广商1的利润却在上升, 这主要由于推广商1相对与推广商2的成本优势不断扩大. 此时, 酒店和整体的利润也都在下降, 但集中决策下总体的利润都要大于分散决策下的整体利润, 且利润差额保持相对确定.

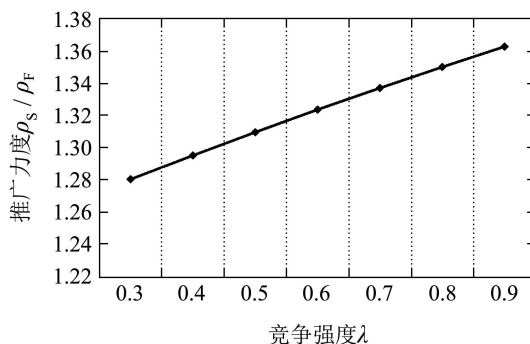
由此不难看出, 在 $k_2$ 变化时, 集中决策下的整体推广力度和利润水平都有高于分散决策下的, 也就是本文所设计的契约下所实现的整体利润都大于分散决策下的.

### 6.3 竞争系数 $\lambda$ 变化的影响(The impact of competition coefficient $\lambda$ )

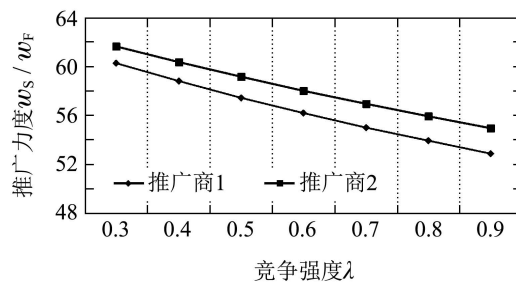
$\lambda$ 表示的是两推广商竞争的激烈程度, 当 $\lambda$ 的取值越大时, 推广商间的竞争就越激烈. 本节将讨论 $\lambda$ 值变化的影响, 由第4部分的分析可知,  $\lambda$ 取值变化对集中决策模式没有影响. 令 $k_1 = 4$ ,  $k_2 = 4.5$ ,  $p = 200$ , 计算得图4-5.



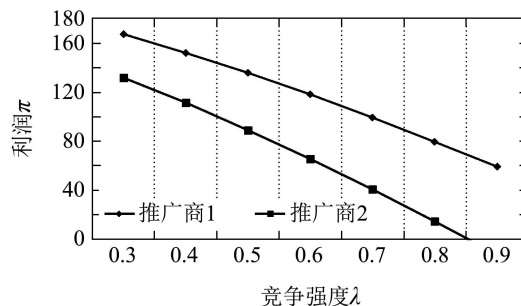
(a) 推广力度



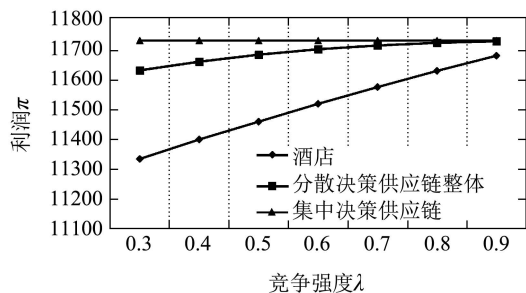
(b) 整体推广力度



(c) 佣金水平

图4  $\lambda$ 变化对各方决策的影响Fig. 4 The impact of  $\lambda$  on decision-making

(a) 推广商利润



(b) 酒店和供应链整体利润

图5 λ变化对各方利润的影响

Fig. 5 The impact of  $\lambda$  on profits

由图4可以看出,随着 $\lambda$ 的增大,即推广商竞争的加剧,分散决策下两推广商所获得的佣金水平都在下降,而推广力度却都在上升,从而整体的推广力度都在不断上升。

由图5可以发现,随着 $\lambda$ 的增大,分散决策下推广商的利润都呈下降趋势,甚至推广商2会出现负盈利,而酒店的利润却呈上升趋势。由此可以看出,在推广商竞争越激烈时,酒店越可以凭借自己的主导优势获利。并且随着 $\lambda$ 的增大,分散决策模式和集中决策模式下的整体利润的差距在不断减小,那么意味着竞争越激烈时是否采取契约对各方的影响不大。但在竞争相对不那么激烈时,采用契约无论是对推广商还是酒店而言都是有好处的。

## 7 结论(Conclusions)

本文考虑了单酒店和两家推广商组成的服务供应链,探究了三方的合作竞争机制问题。本文先是在分散决策下研究了三方的决策问题,并指出影响三方决策的因素。分析发现,推广竞争因子 $\lambda$ 越大,两推广商实际推广力度的差额与所决策的推广力度的差额之比越大。成本系数较低的推广商实际形成的推广力度要大于决策的推广力度;成本系数较高的推广商则相反。接着讨论了整体利润最优的情形,发现在两种决策模式下,推广商的推广力度都同酒店客房数及客房价格成正比,同酒店原有需求期望成反比。也就是说酒店客房数越多,价格越高就越需要推广商的推广;而酒店需求越大就越不需要推广,这对酒店经营有十分重大的现实意义。此外,还发现无论在分散决策模式还是集中决策模式下,推广商的推广成本系数越大,其推广力度就越小,且在分散决策下所要求的佣金水平越高。

同时发现,由于双边效应存在,集中决策下整体的利润都至少不小于分散决策下整体的利润。以此为基础,本文探求三方合作协调契约问题。先是给出协调契约下酒店所需支付给推广商的费用区间,接着按纳什谈判进行求解。对比酒店与单个推广商的情形,发现酒店和推广商在契约下所得的利润与其谈判能

力成正比,且推广商1和推广商2的利润还与对方的谈判能力相关。在协调契约下,不仅可以实现供应链整体的利润最优,还改善了酒店和推广商的利润。

最后,进行数值分析。酒店的价格增大,两推广商的利润均有提升,并且两者的利润差距也会不断增大。而推广商2的成本系数增大时,除了推广商2的佣金水平有显著提升外,推广商1的佣金水平也会有部分提升。并且,分散和集中情形下推广商2的推广力度减小,推广力度差距会不断缩小;推广商1的推广力度增大,推广力度差距增大。整体的推广力度会显著减小。观察推广商的利润还发现推广商2的成本系数增大时,由于推广商1相对与推广商2的成本优势不断扩大,推广商2的利润显著降低而推广商1的利润显著提升。但是推广商成本系数的增加会在一定程度上降低酒店和供应链整体的利润。此外,当推广商间的竞争激烈程度( $\lambda$ )增大时,发现推广商会压低利润水平并提升推广力度。从而,酒店的利润会不断提升,并且供应链的协调程度也在不断增加,这一点也与酒店和单个推广商合作的情形存在较大差异。

## 参考文献(References):

- [1] CHEN F Y, CHEN J, XIAO Y B. Optimal control of selling channels for an online retailer with cost-per-click payments and seasonal products [J]. *Production and Operations Management*, 2007, 16(3): 292 – 305.
- [2] LIU B, CAI G G, TSAY A A. Advertising in asymmetric competing supply chains [J]. *Production and Operations Management*, 2014, 23(11): 1845 – 1858.
- [3] ZHANG J L, CHEN J, LEE C Y. Joint optimization on pricing, promotion and inventory control with stochastic demand [J]. *International Journal of Production Economics*, 2008, 116(2): 190 – 198.
- [4] HE Y, ZHAO X, ZHAO L D, et al. Coordinating a supply chain with effort and price dependent stochastic demand [J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2009, 33(6): 2777 – 2790.
- [5] KAYA O. Outsourcing vs. in-house production: a comparison of supply chain contracts with effort dependent demand [J]. *Omega*, 2011, 39(2): 168 – 178.
- [6] MA P, WANG H Y, SHANG J. Supply chain channel strategies with quality and marketing effort-dependent demand [J]. *International Journal of Production Economics*, 2013, 144(2): 572 – 581.
- [7] CÁRDENAS-BARRÓN L E, SANA S S. Multi-item EOQ inventory model in a two-layer supply chain while demand varies with promotional effort [J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2015, 39(21): 6725 – 6737.
- [8] KARRAY S. Periodicity of pricing and marketing efforts in a distribution channel [J]. *European Journal of Operational Research*, 2013, 228(3): 635 – 647.
- [9] KARRAY S. Cooperative promotions in the distribution channel [J]. *Omega*, 2015, 51: 49 – 58.
- [10] WU D D. Bargaining in supply chain with price and promotional effort dependent demand [J]. *Mathematical & Computer Modelling*, 2013, 58(9/10): 1659 – 1669.
- [11] YE S Q, AYDIN G, HU S S. Sponsored search marketing: dynamic pricing and advertising for an online retailer [J]. *Management Science*, 2015, 61(6): 1255 – 1274.

- [12] WANG Lei, LIANG Liang, WU Shengde, et al. Vertical cooperative advertising model under retailer competition [J]. *Chinese Journal of Management Science*, 2005, 13(2): 63–69.  
(王磊, 梁梁, 吴德胜, 等. 零售商竞争下的垂直合作广告模型 [J]. 中国管理科学, 2005, 13(2): 63–69.)
- [13] TAN Jian, WANG Xianjia. The research on supply chain price and advertising decision of retailer in cooperative and competitive [J]. *Journal of Industrial Technical Economics*, 2013, 235(4): 34–42.  
(谭建, 王先甲. 合作与竞争的零售商供应链价格与广告决策研究 [J]. 工业技术经济, 2013, 235(4): 34–42.)
- [14] GUO X L, LING L Y, DONG Y F, et al. Cooperation contract in tourism supply chains: the optimal pricing strategy of hotels for cooperative third party strategic websites [J]. *Annals of Tourism Research*, 2013, 41(1): 20–41.
- [15] LING L Y, GUO X L, YANG C C. Opening the online marketplace: an examination of hotel pricing and travel agency on-line distribution of rooms [J]. *Tourism Management*, 2014, 45(1): 234–243.
- [16] TOH R S, DEKAY C F, RAVEN P. Travel planning: searching for and booking hotels on the internet [J]. *Cornell Hospitality Quarterly*, 2011, 52(54): 388–398.
- [17] HU Shuan. *Research on optimal decision of promoter and hotel based on demand promotion* [D]. Guangzhou: South China University of Technology, 2016.  
(胡树安. 基于需求推广模式下推广商与酒店的最优决策研究 [D]. 广州: 华南理工大学, 2016.)
- [18] ZHOU Yongwu, HU Shuan. Coordination contract design for hotel and promoter under asymmetric promotion cost information [J]. *Operations Research and Management Science*, 2017, 5(26): 14–20.  
(周永务, 胡树安. 推广成本信息不对称下推广商与酒店间的合作契约设计 [J]. 运筹与管理, 2017, 5(26): 14–20.)
- [19] KRISHNAN H, KAPUSCINSKI R, BUTZ D A. Coordinating contracts for decentralized supply chains with retailer promotional effort [J]. *Management Science*, 2004, 50(1): 48–63.

## 附录(Appendix)

### I) 引理1的证明.

证 由第2部分的假设得  $\lambda < \frac{\min\{\rho_1 - 1, \rho_2 - 1\}}{|\rho_1 - \rho_2|}$ . 结合第3.1节和第3.2节的分析可知

$$\lambda < \frac{\rho_2 - 1}{\rho_1 - \rho_2} = \frac{\frac{w_2}{k_2}}{(\frac{w_1}{k_1} - \frac{w_2}{k_2})} = \frac{\frac{t}{k_2}}{(\frac{1}{k_1} - \frac{t}{k_2})} = \frac{k_1 t}{k_2 - k_1 t} = k_1 \frac{2 + 3\lambda + \lambda \frac{k_2}{k_1}}{2 + 3\lambda + \lambda \frac{k_1}{k_2}} \frac{2 + 3\lambda + \lambda \frac{k_1}{k_2}}{(2 + 2\lambda)(k_2 - k_1)},$$

即有  $\lambda < \frac{2k_1 + 3k_1\lambda + \lambda k_2}{(2 + 2\lambda)(k_2 - k_1)}$ , 转化为关于  $\lambda$  的不等式

$$2(k_2 - k_1)\lambda^2 + (k_2 - 5k_1)\lambda - 2k_1 < 0.$$

令  $h(\lambda) = 2(k_2 - k_1)\lambda^2 + (k_2 - 5k_1)\lambda - 2k_1$ , 为开口向上的抛物线.  $h(0) = -2k_1 < 0$ , 则  $\lambda$  小于  $n$ , 其中  $n$  为  $h(\lambda) = 0$  的正根.

$$n = \frac{-(k_2 - 5k_1) + \sqrt{(k_2 - 5k_1)^2 - 4(2(k_2 - k_1))(-2k_1)}}{4(k_2 - k_1)} = \frac{2k_1}{k_2 - k_1} = \frac{2}{\gamma - 1},$$

$$\gamma = \frac{k_2}{k_1}.$$

那么  $\lambda < \frac{2}{\gamma - 1}$ . 证毕.

### II) 性质2的证明.

证 要证明  $w_{i1} > 0$ ,  $\rho_{i1} > 1$ , 只需证明式(9)存在正解. 令

$$\begin{aligned} f(w_1) &= p \int_0^{c/\rho(w_1)} [F(\frac{c}{\rho(w_1)}) - F(x)] dx - \\ &\quad \mu[2(1 + \lambda) - \lambda(\frac{k_1}{k_2} + 1)t]w_1, \\ f(0) &= p \int_0^c [F(c) - F(x)] dx > 0, \\ f'(w_1) &= -\frac{pc^2}{\rho(w_1)^3} f(\frac{c}{\rho(w_1)}) \frac{\partial \rho(w_1)}{\partial w_1} - \\ &\quad \mu[2(1 + \lambda) - \lambda(\frac{k_1}{k_2} + 1)t]. \end{aligned}$$

此时若证明  $2(1 + \lambda) - \lambda(\frac{k_1}{k_2} + 1)t > 0$ , 则有  $f'(w_1) < 0$ , 那么必存在  $w_{11} > 0$  满足式(9). 结合式(8)得

$$\begin{aligned} 2(1 + \lambda) - \lambda(\frac{k_1}{k_2} + 1)t &= \\ &= \frac{-(k_1 - k_2)^2 \lambda^2 + 8k_1 k_2 \lambda + 4k_1 k_2}{2k_1 k_2 + 3k_1 k_2 \lambda + k_1^2 \lambda}, \end{aligned}$$

转化为证明式  $-(k_1 - k_2)^2 \lambda^2 + 8k_1 k_2 \lambda + 4k_1 k_2 > 0$ .

令  $g(\lambda) = -(k_1 - k_2)^2 \lambda^2 + 8k_1 k_2 \lambda + 4k_1 k_2$  为开口向下的抛物线. 又  $g(0) = 4k_1 k_2 > 0$ , 那么只需要证明  $\lambda$  小于方程  $-(k_1 - k_2)^2 \lambda^2 + 8k_1 k_2 \lambda + 4k_1 k_2 = 0$  的正根  $m$ , 即  $\lambda < m$ .

上述方程的正根为

$$\begin{aligned} &= \frac{-8k_1 k_2 - \sqrt{(8k_1 k_2)^2 - 4(-(k_1 - k_2)^2)(4k_1 k_2)}}{-2(k_1 - k_2)^2} = \\ &= \frac{8k_1 k_2 + 4\sqrt{k_1 k_2}(k_1 + k_2)}{2(k_1 - k_2)^2}, \end{aligned}$$

令  $k_2 = \gamma k_1$  ( $\gamma > 1$ ), 那么上述正根为

$$m = \frac{4\gamma + 2\sqrt{\gamma}(1 + \gamma)}{(\gamma - 1)^2}.$$

那么由引理1可知

$$\lambda < \frac{2}{\gamma - 1} = \frac{2(\gamma - 1)}{(\gamma - 1)^2} < \frac{4\gamma + 2\sqrt{\gamma}(1 + \gamma)}{(\gamma - 1)^2},$$

即  $\lambda < m$ . 证毕.

### III) 性质3的证明.

证 由  $k_1 < k_2$  可知  $t > 1$ , 那么  $w_{11} < w_{21}$ . 结合式(4)和式(8)得

$$\begin{aligned} \rho_{11} - \rho_{21} &= \frac{\mu}{2(\mu^2 + \sigma^2)} (\frac{w_{11}}{k_1} - \frac{w_{21}}{k_2}) = \\ &= \frac{\mu w_{11}}{2(\mu^2 + \sigma^2)} (\frac{1}{k_1} - \frac{t}{k_2}) = \frac{\mu w_{11}}{2(\mu^2 + \sigma^2)} (\frac{k_2 - tk_1}{k_1 k_2}), \end{aligned}$$

而

$$k_2 - tk_1 = k_2 - \frac{2 + 3\lambda + \lambda \frac{k_2}{k_1}}{2 + 3\lambda + \lambda \frac{k_1}{k_2}} k_1 =$$

$$\frac{(2+2\lambda)(k_2-k_1)}{2+3\lambda+\lambda\frac{k_1}{k_2}} > 0,$$

那么  $\rho_{11} - \rho_{21} > 0$ , 又  $\bar{\rho}_1 - \bar{\rho}_2 = \frac{(1+2\lambda)\mu w_{11}}{2(\mu^2 + \sigma^2)} (\frac{k_2 - tk_1}{k_1 k_2})$ , 所以  $\bar{\rho}_1 - \bar{\rho}_2 > 0$  且  $\frac{\bar{\rho}_1 - \bar{\rho}_2}{\rho_{11} - \rho_{21}} = 1 + 2\lambda$ . 证毕.

IV) 性质4的证明.

证 对式(9)两边求关于  $c$  的偏导, 得

$$\frac{pc}{\rho^2} f(\frac{c}{\rho}) - \{ \frac{pc^2}{\rho^3} f(\frac{c}{\rho}) \frac{\partial \rho(w_1)}{\partial w_1} + \mu[2(1+\lambda) - \lambda t(\frac{k_1}{k_2} + 1)] \} \frac{\partial w_1}{\partial c} = 0.$$

由性质2的证明可知,  $\mu[2(1+\lambda) - \lambda(\frac{k_1}{k_2} + 1)t] > 0$ , 故有  $\frac{\partial w_{11}}{\partial c} > 0$ , 而由式(8)可知  $\frac{\partial w_{21}}{\partial c} > 0$ . 又通过式(4)不难看出  $\frac{\partial \rho_{i1}}{\partial c} > 0$ . 其他证明同理可得. 证毕.

V) 性质6的证明.

证 分散决策下的各方利润和为

$$\begin{aligned} \pi(\rho_{11}, \rho_{21}) &= \\ \pi_h(w_{11}, w_{21}, \rho_{11}, \rho_{21}) &+ \pi_{O1}(\rho_{11}, w_{11}) + \\ \pi_{O2}(\rho_{21}, w_{21}) &= \\ p(c - \rho_S \int_0^{c/\rho_S} F(x)dx) &- \\ k_1(\mu^2 + \sigma^2)(\rho_{11} - 1)^2 &- k_2(\mu^2 + \sigma^2)(\rho_{21} - 1)^2, \end{aligned}$$

其中  $\rho_S = \rho_{11} + \rho_{21} - 1$ . 而集中决策下整体的利润为

$$\begin{aligned} \pi(\rho_{12}, \rho_{22}) &= \\ p(c - \rho_F \int_0^{c/\rho_F} F(x)dx) &- \\ k_1(\mu^2 + \sigma^2)(\rho_{12} - 1)^2 &- k_2(\mu^2 + \sigma^2)(\rho_{22} - 1)^2, \end{aligned}$$

其中  $\rho_F = \rho_{12} + \rho_{22} - 1$ . 由于  $(\rho_{12}, \rho_{22})$  是函数:

$$\begin{aligned} \pi(\rho_1, \rho_2) &= \\ p(c - \rho \int_0^{c/\rho} F(x)dx) &- \\ k_1(\mu^2 + \sigma^2)(\rho_1 - 1)^2 &- k_2(\mu^2 + \sigma^2)(\rho_2 - 1)^2 \end{aligned}$$

的唯一最优解, 故有  $\pi(\rho_{12}, \rho_{22}) \geq \pi(\rho_{11}, \rho_{21})$ , 即

$$\Delta\pi = \pi(\rho_{12}, \rho_{22}) - \pi(\rho_{11}, \rho_{21}) \geq 0.$$

证毕.

作者简介:

**周永务** (1964-), 男, 博士, 副院长, 教授, 目前研究方向为库存控制与优化、供应链管理等, E-mail: zyw.666@hotmail.com;

**嵇凯** (1992-), 男, 硕士, 目前研究方向为服务管理, E-mail: k.ji@foxmail.com;

**胡树安** (1990-), 男, 硕士, 目前研究方向为供应链管理, E-mail: 373918440@foxmail.com;

**钟远光** (1984-), 男, 博士, 副教授, 目前研究方向为物流与供应链管理、供应链金融, E-mail: bmygzhong@scut.edu.cn.