

随机分组策略下的分布式多智能体一致性

侯 健^{1,2†}, 郑荣濠^{3,4}

(1. 浙江理工大学 信息学院, 浙江 杭州 310018; 2. 浙江省电子商务促进中心, 浙江 杭州 310006;

3. 浙江大学 电气工程学院, 浙江 杭州 310027; 4. 浙江省海洋可再生能源电气装备与系统重点实验室, 浙江 杭州 310027)

摘要: 多智能体分布式一致性算法一般需要获得相对状态差值 $x_i - x_j$, 本文针对无法得到智能体间相对状态差值的情况, 提出一种基于智能体分组, 通过组间信息交换来达到智能体状态一致的算法. 本文仅讨论离散情况下智能体被随机划分为两组和多组的情况. 当存在两个随机分组时, 每个智能体都进行状态更新, 且更新量为组间的状态差值. 此时, 系统达到期望一致的充要条件为所给出的状态更新参数应大于1. 当存在多个随机分组时, 仅通过Gossip算法选中的两组智能体以这两组间的状态差值进行状态更新. 在这种情况下, 系统达到期望一致的充分条件为各分组概率相等, 且状态更新参数大于1. 最后通过计算机仿真验证了结论的正确性.

关键词: 一致性; 多智能体系统; 分组信息; 随机网络

引用格式: 侯健, 郑荣濠. 随机分组策略下的分布式多智能体一致性. 控制理论与应用, 2018, 35(4): 517 – 522

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Distributed multi-agent consensus via a novel randomized group partition approach

HOU Jian^{1,2†}, ZHENG Rong-hao^{3,4}

(1. School of Information Science and Technology, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou Zhejiang 310018, China;

2. Zhejiang E-commerce Promotion Center, Hangzhou Zhejiang 310006, China;

3. College of Electrical Engineering, Zhejiang University, Hangzhou Zhejiang 310027, China;

4. Zhejiang Province Marine Renewable Energy Electrical Equipment and System Technology Research Laboratory, Hangzhou Zhejiang 310027, China)

Abstract: Distributed multi-agent consensus algorithms generally require a relative state $x_i - x_j$. This paper presents a novel distributed scheme to solve the consensus problem if no such inter-agent relative state is available. The new scheme allows the agents divided into two or more groups, and then uses the relative group representative state as control variable. When two groups are considered, each agent updates its own state based on the relative group representative state, and the system achieves consensus in mean if and only if a weighting parameter is greater than 1. When three or more groups are introduced, only two groups using Gossip algorithm are chosen to update the agents states inside based on the relative group representative state. Then consensus in mean can be realized if the partition probability for each group is equivalent, and also the weighting parameter is greater than 1. Numerical simulations are provided to demonstrate the validity of our results.

Key words: consensus; multi-agent system; group information; randomized network

Citation: HOU Jian, ZHENG Ronghao. Distributed multi-agent consensus via a novel randomized group partition approach. *Control Theory & Applications*, 2018, 35(4): 517 – 522

1 引言(Introduction)

近年来, 随着机器人技术、互联网技术、传感和通讯技术的发展, 多智能体系统 (multi-agent systems, MAS) 逐渐成为当今自动控制领域一个重要的研究方向, 并对社会生产和生活起到巨大的影响. 一致性问

题是分布式多智能体研究中最基本的一个问题, 也是最为典型、应用最为广泛的问题. 一致性可以理解为群体中的成员通过与其他成员的信息交流及共同约定的简单相互作用, 使群体达到一种共同的状态或者意向. 该研究被广泛应用在分布式能源系统^[1]、分布

收稿日期: 2017-03-24; 录用日期: 2017-11-22.

†通信作者. E-mail: changeleap@163.com; Tel.: +86 18600191359.

本文责任编辑: 左志强.

国家自然科学基金项目(61503335), 浙江省自然科学基金项目(LQ17F020005)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (61503335) and the National Natural Science Foundation of Zhejiang Province (LQ17F020005).

式平行计算^[2]、队形控制^[3]、小世界网络、传感器网络估计^[4]及聚合控制等各种应用当中。

一致性问题的研究起源于20世纪80年代^[5-6],而该问题直到21世纪初才由Olfati-Saber和Jadbabaie等人^[7-8]从理论的角度给出分析和证明。在绝大多数研究中,智能体之间通过局部的通信来交换彼此的状态信息,从而更新自身的状态量。因此,早期的研究主要集中在探索怎样的拓扑结构才能保证系统的收敛以及提升收敛速度。大量的文献表明,对固定结构拓扑系统,其收敛的条件为系统的强连通性;对于变结构拓扑系统,其收敛的条件为在每个有限的时间段内系统都为强连通。此后该领域得到快速发展,并吸引了大量研究者的关注,分别在高阶系统^[9]、非线性系统、量化^[10]、存在时延^[11]、通信噪音、网络丢包等方面进行了深入研究。

然而,在一致性问题的一些实际应用中,既无法估计出各智能体的绝对状态量,也无法得到智能体间相对的状态差值。在这类应用中,上述所提的一致性算法便不再适用。例如,在多天线协同发射信号的过程中,状态量(每个发射信号的相位)以及智能体间相对的状态差值(两个发射信号之间的相位差)均无法获取。然而通过一些辅助手段,可以利用一个接收器来获得两个小组内所有发射天线之间的相位差并反馈回发射端以调节发射端的控制输入,从而达到波束形成^[12]。再例如,在PageRank算法中通过赋予每个网页一个权重值来表征该网页的重要性大小,而该权重值可以通过分布式随机算法得到。由于网络节点数量的巨大从而不能保证节点间的强连通通讯,于是将节点进行分组并通过组间的通讯可以大大减少系统的运算量^[2]。

本文讨论离散情况下,无智能体间相对状态差值的分布式一致性问题。每次迭代时,各智能体都以一定概率被划分为两组或多组,且同一组内的智能体具有相同的控制输入。为了分析的简单,假设每个组的状态均为组内所有智能体状态的凸组合,且满足一定的联合分布要求。本文给出结论,对于划分为两组或多组的情况系统均可达到期望一致。当仅有两个随机分组时,每个智能体都以这两组间的状态差值进行状态更新,从而该系统达到期望一致的充要条件为所给出的状态更新参数大于1。当存在多个随机分组时,每次迭代通过Gossip算法随机选取两个更新组并得到这两组间的状态差值,对组内智能体进行状态更新。当分组概率相等,且状态更新参数大于1时,该系统也达到期望一致。

据作者所知,在已有的一致性问题的研究当中有考虑分组的情况^[13-15],然而依旧是利用智能体间的状态差值来进行状态更新,并无考虑组间的状态差。另外,本文所提出的控制策略中允许负权重的存在,从而无法借用随机矩阵已有的经典结论^[8,16],也增加了论证

的难度。本文可以作为一致性问题的一个新的分支进行研究和讨论。

本文中: $\mathbb{R}^{|\cdot|}$ 表示 $\cdot$ 维矢量, $\ast$ 为1时表示标量; i, j 指代智能体, h, l, r 表示分组, $E[\cdot]$ 为期望。

2 问题描述(Problem formulation)

设 $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathbf{W})$ 为一个由 n 个节点有向网络构成的加权图,其中: $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ 为该图 n 个节点的集合,它的边集 $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$;邻接矩阵 $\mathbf{W} = [w_{ij}]$,其中矩阵元素 w_{ij} 表示节点 i 到节点 j 的连接权重。如果节点 i 可以得到节点 j 的信息则 $w_{ij} \neq 0$,否则 $w_{ij} = 0$ 。

考虑 n 个智能体的离散时间模型

$$x_i(k+1) = x_i(k) + u_i(k), i = 1, \dots, n, \quad (1)$$

其中 $x_i(k) \in \mathbb{R}$ 和 $u_i(k) \in \mathbb{R}$ 分别表示智能体 i 的状态量和控制输入量。 n 个智能体的初始状态为 $\mathbf{x}(0) = [x_1(0) \dots x_n(0)]^T$ 。

本文假设智能体间无信息交换,从而无法得到智能体间的状态差值 $x_i - x_j$ 。于是通过将智能体随机划分为 $m(\leq n)$ 组,并将组间的状态差值作为控制变量来进行智能体状态更新。在 k 时刻,每个智能体 i 都以一定概率 $q_i^{(h)}(k)(>0)$ 被划分到组 $G_h(k)$ 中,且各组所对应的智能体数目分别为 $|G_h(k)|$, $\sum_{h=1}^m |G_h(k)| = n$, $\sum_{h=1}^m q_i^{(h)}(k) = 1$ 。可以看出,当 $m=n$ 时,系统就退化为一般的多智能体一致性问题。

现在给出每个组状态信息的定义,该状态为满足一定联合分布的组内所有智能体状态的凸组合。

定义1 令 $f_{G_h(k)}: \mathbb{R}^{|G_h(k)|} \rightarrow \mathbb{R}$ 表示组 G_h 中所有智能体状态的凸组合,即

$$f_{G_h(k)} = \sum_{i \in G_h(k)} a_i^{(h)}(k) x_i(k), \quad (2)$$

其中 $a_i^{(h)}(k)$ 为非负随机系数,满足 $\sum_{i \in G_h(k)} a_i^{(h)}(k) = 1$ 。

另外,本文要求

$$\begin{aligned} E[f_{G_h(k)}] &= \text{Ave}(G_h(k)), \\ E[f_{G_h(k)}^2] &= \text{Ave}^2(G_h(k)), \end{aligned}$$

即 k 时刻 G_h 中智能体状态的平均值, $h = 1, \dots, m$ 。

注1 当仅考虑 $a_i^{(h)}(k)$ 为随机系数时,由于多随机变量的联合分布及其非独立性,证明较为复杂。为了简化分析,本文对系数 $a_i^{(h)}(k)$ 及其所构成的凸组合进行严格限制。

注2 $a_i^{(h)}(k) = \frac{1}{|G_h(k)|}$ 为一种满足定义的系数条件。

为了方便,本文以后统称 $f_{G_h(k)}$ 为组 G_h 的状态, $f_{G_h(k)} - f_{G_l(k)}$ 为 G_h 和 G_l 两组之间的状态差值, $h, l = 1, \dots, m$ 。

定义2 期望一致^[17]。如果对任意的初始状态 $\mathbf{x}(0)$,都有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E[x_i(k) - x_j(k)] = 0, \quad (3)$$

$i, j = 1, \dots, n$, 称系统达到期望一致.

3 划分组 $m = 2$ (Partition number $m = 2$)

这一节考虑智能体仅被划分为两组的情况, 每个智能体都基于组间的状态差值 $f_{G_1(k)} - f_{G_2(k)}$ 进行状态更新. 给出控制策略为当 $|G_1(k)||G_2(k)| = 0$ 时, $u_i(k) = 0$, 否则

$$u_i(k) = \begin{cases} (f_{G_2(k)} - f_{G_1(k)})/\gamma, & \text{当 } i \in G_1(k), \\ (f_{G_1(k)} - f_{G_2(k)})/\gamma, & \text{当 } i \in G_2(k), \end{cases} \quad (4)$$

其中 $\gamma > 0$ 为状态更新参数.

根据上述控制策略, 整个系统可以写作

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{x}(k) + \mathbf{W}(k)\mathbf{x}(k). \quad (5)$$

如果 $|G_1(k)||G_2(k)| = 0$, $\mathbf{W}(k) = \mathbf{0}$; 否则 $\mathbf{W}(k)$ 的第 ij 个输入为

$$w_{ij}(k) = \begin{cases} -a_j^{(1)}(k)/\gamma, & i \in G_1(k), j \in G_1(k), \\ a_j^{(2)}(k)/\gamma, & i \in G_1(k), j \in G_2(k), \\ a_j^{(1)}(k)/\gamma, & i \in G_2(k), j \in G_1(k), \\ -a_j^{(2)}(k)/\gamma, & i \in G_2(k), j \in G_2(k). \end{cases}$$

注 3 w_{ij} 中, 下标 j 决定数值的大小, 而 i 仅影响数值的符号. 下同.

下面给出本文的第1个主要结论:

定理 1 当智能体被随机划分为两组时, 通过控制策略(4), 系统(1)达到期望一致的充要条件为 $\gamma > 1$.

为证明该定理, 首先给出下列正定函数:

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} (x_i - x_j)^2.$$

由上可知该函数非负, 当且仅当对所有 i 和 j , $x_i = x_j$ 时其值为零. 另外, 当 $|G_1(k)||G_2(k)| = 0$ 时,

$$V(\mathbf{x}(k+1)) = V(\mathbf{x}(k)).$$

当 $|G_1(k)||G_2(k)| \neq 0$ 时,

$$\begin{aligned} V(\mathbf{x}(k+1)) = & \sum_{i \in G_1(k), j \in G_2(k)} (x_i(k) - x_j(k) + \\ & \frac{2(f_{G_2(k)} - f_{G_1(k)})}{\gamma})^2 + \\ & \frac{1}{2} \sum_{i_1, i_2 \in G_1(k)} (x_{i_1}(k) - x_{i_2}(k))^2 + \\ & \frac{1}{2} \sum_{j_1, j_2 \in G_2(k)} ((x_{j_1}(k) - x_{j_2}(k))^2. \end{aligned}$$

由

$$E[f_{G_j(k)}] = \text{Ave}(G_j(k)),$$

$$E[f_{G_j(k)}^2] = \text{Ave}^2(G_j(k)), \quad j = 1, 2,$$

可得

$$\begin{aligned} V(\mathbf{x}(k+1)) - V(\mathbf{x}(k)) = & \frac{4}{\gamma} (f_{G_2(k)} - f_{G_1(k)}) \left[\frac{|G_1(k)||G_2(k)|}{\gamma} \right. \\ & (f_{G_2(k)} - f_{G_1(k)}) + \\ & \sum_{i \in G_1(k), j \in G_2(k)} (x_i(k) - x_j(k)) = \\ & \frac{4}{\gamma} (f_{G_2(k)} - f_{G_1(k)}) \left[\frac{|G_1(k)||G_2(k)|}{\gamma} \right. \\ & (f_{G_2(k)} - f_{G_1(k)}) + \\ & \left. |G_1(k)||G_2(k)| (\text{Ave}(G_2(k)) - \text{Ave}(G_1(k))) \right], \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned} E[V(\mathbf{x}(k+1)) - V(\mathbf{x}(k))] = & \frac{4|G_1(k)||G_2(k)|}{\gamma^2} (\text{Ave}(G_2(k)) - \\ & \text{Ave}(G_1(k)))^2 (1 - \gamma). \end{aligned} \quad (6)$$

由此可知, 式(6)的符号取决于 γ 是否大于1. 具体证明过程详见附录.

注 4 对于不同的智能体 i 和 j , 其分组概率 q_i 与 q_j 可以不同; 对于同一智能体 i , 其不同时刻的分组概率也可能不一样.

4 多个分组 (Multiple group)

这一节考虑多个分组情况下的一致性问题. 在 k 时刻, 每个智能体通过一定概率被划分到 $m (\geq 3)$ 组中, 且仅通过 Gossip 算法选取的组 $G_h(k)$ 和 $G_l(k)$ 内智能体进行状态更新, 其余智能体状态保持不变. 则其控制策略为当 $|G_h(k)||G_l(k)| = 0$ 时, $u_i(k) = 0$, 否则

$$u_i(k) = \begin{cases} (f_{G_l(k)} - f_{G_h(k)})/\gamma, & i \in G_h(k), \\ (f_{G_h(k)} - f_{G_l(k)})/\gamma, & i \in G_l(k), \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad (7)$$

类似于上一节两个分组情况的分析, 可以得到控制系统

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{x}(k) + \mathbf{W}(k)\mathbf{x}(k). \quad (8)$$

如果 $|G_h(k)||G_l(k)| = 0$, $\mathbf{W}(k) = \mathbf{0}$; 否则 $\mathbf{W}(k)$ 的第 ij 个输入为

$$w_{ij}(k) = \begin{cases} -a_j^{(h)}(k)/\gamma, & i \in G_h(k), j \in G_h(k), \\ a_j^{(l)}(k)/\gamma, & i \in G_h(k), j \in G_l(k), \\ a_j^{(h)}(k)/\gamma, & i \in G_l(k), j \in G_h(k), \\ -a_j^{(l)}(k)/\gamma, & i \in G_l(k), j \in G_l(k), \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

通过若干步数学运算, 可以得到

$$\begin{aligned}
V(\mathbf{x}(k+1)) = & \sum_{i \in G_h(k), j \in G_l(k)} (x_i(k) - x_j(k) + \\
& \frac{2(f_{G_l(k)} - f_{G_h(k)})}{\gamma})^2 + \\
& \frac{1}{2} \sum_{i_1, i_2 \in G_h(k) \text{ or } G_l(k) \text{ or } G_r(k)} (x_{i_1}(k) - x_{i_2}(k))^2 + \\
& \sum_{j_1 \in G_h(k), j_2 \in G_r(k)} ((x_{j_1}(k) - x_{j_2}(k) + \\
& \frac{f_{G_l(k)} - f_{G_h(k)}}{\gamma})^2 + \\
& \sum_{j_1 \in G_l(k), j_2 \in G_r(k)} ((x_{j_1}(k) - x_{j_2}(k) + \\
& \frac{f_{G_h(k)} - f_{G_l(k)}}{\gamma})^2,
\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}
E[V(\mathbf{x}(k+1)) - V(\mathbf{x}(k))] = & \frac{4|G_h(k)||G_l(k)|}{\gamma^2} (\text{Ave}(G_l(k)) - \\
& \text{Ave}(G_h(k)))^2 (1 - \gamma) + \\
& \frac{|G_r(k)|(\text{Ave}(G_l(k)) - \text{Ave}(G_h(k)))}{\gamma^2} \cdot \\
& \{(|G_h(k)| + |G_l(k)|)(\text{Ave}(G_l(k)) - \text{Ave}(G_h(k))) + \\
& 2\gamma(|G_h(k)|\text{Ave}(G_h(k)) - |G_h(k)|\text{Ave}(G_r(k)) - \\
& |G_l(k)|\text{Ave}(G_l(k)) + |G_l(k)|\text{Ave}(G_r(k)))\}, \quad (9)
\end{aligned}$$

其中: G_r 表示既不属于组 G_h 又不属于组 G_l . $\text{Ave}(G_r(k))$ 为除在组 $G_h(k)$ 和 $G_l(k)$ 之外所有智能体的均值, 那么 $|G_r(k)| = n - |G_h(k)| - |G_l(k)|$.

当每个智能体划分到各组的概率相等, 即

$$E[|G_h(k)|] = E[|G_l(k)|],$$

那么等式(9)可以写作

$$\begin{aligned}
E[V(\mathbf{x}(k+1)) - V(\mathbf{x}(k))] = & \frac{2|G_h(k)||G_r(k)| + 4|G_h(k)|^2}{\gamma^2} \cdot \\
& (\text{Ave}(G_h(k)) - \text{Ave}(G_l(k)))^2 (1 - \gamma). \quad (10)
\end{aligned}$$

定理2 当智能体被随机划分为 $m(\geq 3)$ 组时, 通过Gossip算法进行选组并利用(7)进行控制. 若各分组概率相等, 且 $\gamma > 1$, 则系统(1)达到期望一致.

具体证明过程详见附录.

5 仿真实验(Simulation)

本节分别对定理1和定理2进行仿真实验, 以验证所得结论的正确性. 考虑智能体数目 $n = 40$, 每个智能体的初始状态都为1到1000之间的随机数. 采用 $V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} (x_i - x_j)^2$ 作为系统收敛与否的指标函数.

实验1 令各智能体每个时刻划分到组 G_1 的概率为0.6. 具有不同状态更新参数 γ 的仿真结果如图1和图2所示. 从仿真结果可以看出, 系统在 $\gamma = 1.3 > 1$ 时指标函数由 2.5×10^8 经2000次迭代逐渐收敛到27.7, 而在 $\gamma = 0.8 < 1$ 时发散. 从而再次验证了系统收敛的充要条件为 $\gamma > 1$.

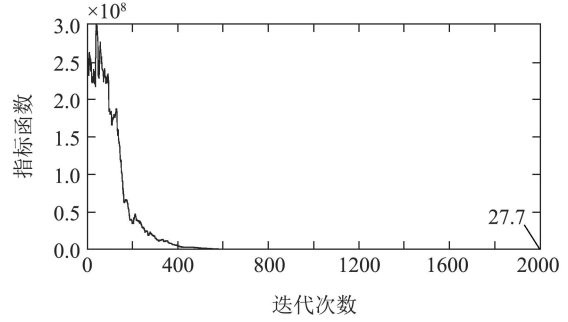


图1 系统状态收敛($\gamma = 1.3 > 1$)

Fig. 1 Convergence of the system ($\gamma = 1.3 > 1$)

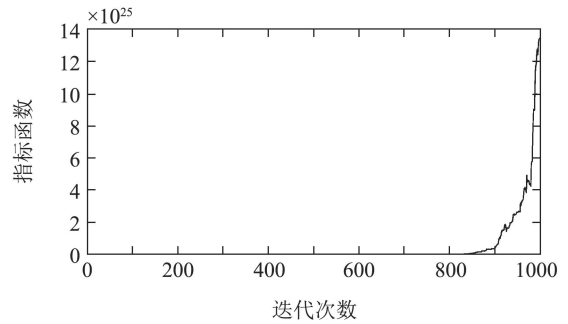


图2 系统状态发散($\gamma = 0.8 < 1$)

Fig. 2 Divergence of the system ($\gamma = 0.8 < 1$)

实验2 令各智能体每个时刻划分到组 G_1 的概率都为0到1之间的随机数. 当状态更新参数 $\gamma = 1.3 > 1$ 时系统的仿真结果如图3所示. 可以得到, 当分组数目为2时系统的收敛性与分组概率无关.

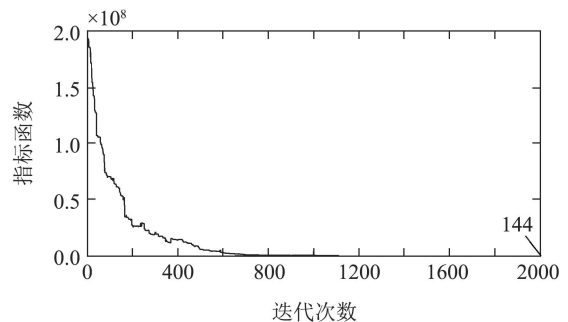
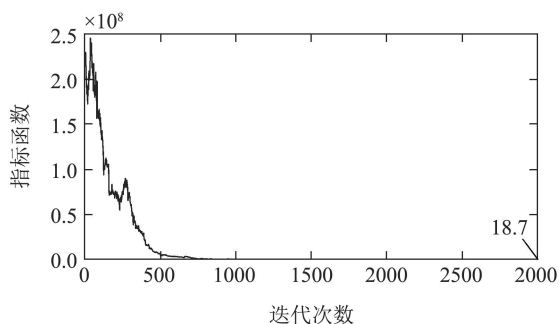


图3 系统状态收敛($\gamma = 1.3 > 1$)

Fig. 3 Convergence of the system ($\gamma = 1.3 > 1$)

实验3 取分组数目 $m = 6$, $\gamma = 1.3 > 1$, 各组分配概率均为1/6. 那么每个时刻各组划分到的智能体期望数目一样, 满足定理2的条件. 指标函数由 2.2×10^8 经3000次迭代逐渐收敛到18.7, 系统最终达到均值一致, 如图4.

图4 系统状态收敛 $\gamma = 1.3 > 1$ Fig. 4 Convergence of the system ($\gamma = 1.3 > 1$)

6 结论(Conclusions)

本文研究了基于智能体分组信息的一致性问题的传统的一致性算法需要通过各智能体间的状态差值 $x_i - x_j$ 来进行状态更新. 当该信息无法得到时, 本文通过对智能体进行随机分组, 采取组间的状态差值作为变量进行控制. 针对随机划分为两组和多组的情况, 本文分别给出系统达到期望一致的充要条件和充分条件. 最后, 通过对多智能体系统的一致性问题进行数值仿真, 验证了所得结论的正确性.

致谢 本文作者感谢中国电机工程学会青年人才托举工程(项目名称: 面向建筑群分布式能源系统的协同优化调度)对本研究工作的资金支持.

参考文献(References):

- [1] SUN Q, HAN R, ZHANG H, et al. A Multiagent based consensus algorithm for distributed coordinated control of distributed generators in the energy internet [J]. *IEEE Transactions on Smart Grid*, 2015, 6(6): 3006 – 3019.
- [2] ISHII H, TEMPO R, BAI E. A web aggregation approach for distributed randomized PageRank algorithms [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, 57(11): 2703 – 2717.
- [3] RICCARDO F, LORENZO S, CRISTIAN S, et al. Edge-weighted consensus-based formation control strategy with collision avoidance [J]. *Robotica*, 2015, 33(2): 332 – 347.
- [4] ZHU S, CHEN C, MA X. Consensus based estimation over relay assisted sensor networks for situation monitoring [J]. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 2015, 9(2): 278 – 291.
- [5] BORKAR V, VARAIYA P. Asymptotic agreement in distributed estimation [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1982, 27(3): 650 – 655.
- [6] TSITSIKLIS J, ATHANS M. Convergence and asymptotic agreement in distributed decision problems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1984, 29(1): 42 – 50.
- [7] OLFATI-SABER R, MURRAY R M. Consensus protocols for networks of dynamic agents [C] // *Proceedings of 2003 American Control Conference*. Denver: IEEE, 2003, 6: 951 – 956.
- [8] JADBABAIE A, LIN J, MORSE A S. Coordination of groups of mobile autonomous agents using nearest neighbor rules [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, 48(6): 988 – 1001.
- [9] PAN Huan, NIAN Xiaohong, GUO Ling. Consensus control of higher-order multi-agent systems with delays [J]. *Control Theory & Applications*, 2013, 30(7): 229 – 232.

(潘欢, 年晓红, 郭凌. 高阶时滞多智能体系统一致性控制 [J]. 控制理论与应用, 2013, 30(7): 229 – 232.)

- [10] CHEN W, LI X, JIAO L. Quantized consensus of second-order continuous-time multi-agent systems with a directed topology via sampled data [J]. *Automatica*, 2013, 49(7): 2236 – 2242.
- [11] LIU Dejin, LIU Chenglin. Consensus problem of discrete-time second-order multi-agent network with communication delay [J]. *Control Theory & Applications*, 2010, 27(8): 1108 – 1112. (刘德进, 刘成林. 具有通信时延的离散时间二阶多智能体网络的一致性 [J]. 控制理论与应用, 2010, 27(8): 1108 – 1112.)
- [12] HOU J, YAN G, LIN Z, et al. Distributed transmit beamforming via feedback-based inter-cluster synchronization [C] // *Proceedings of 2012 Conference on Decision and Control*. Hawaii: IEEE, 2012, 12: 1392 – 1397.
- [13] CHEN Y, LU J, HAN F, et al. On the cluster consensus of discrete-time multi-agent systems [J]. *Systems & Control Letters*, 2011, 60(7): 517 – 523.
- [14] HAN Y, LU W, CHEN T. Achieving cluster consensus in continuous-time networks of multi-agents with inter-cluster non-identical inputs [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2015, 60(3): 793 – 798.
- [15] WU J, ZHANG L, BAI Y, et al. Cluster-based consensus time synchronization for wireless sensor networks [J]. *IEEE Sensors Journal*, 2015, 15(3): 1404 – 1413.
- [16] BLONDEL V D, HENDRICKX J M, OLSHEVSKY A, et al. Convergence in multiagent coordination, consensus, and flocking [C] // *Proceedings of 2005 Conference on Decision and Control, and European Control Conference*. Seville, Spain: IEEE, 2005, 12: 2996 – 3000.
- [17] YOU C. On the convergence of uncertain sequences [J]. *Mathematical and Computer Modelling*, 2009, 49(3): 482 – 487.

附录 定理证明(Appendix Proof of theorem)

由于定理1和定理2具有相似的充分性证明思路, 这里仅给出多分组情况下的充分性证明. 此外, 还给划分组为2时的必要性证明.

充分性证明. 令 $\gamma > 1$. 当 $|G_h(k)||G_l(k)| = 0$ 时, $V(\mathbf{x}(k+1)) = V(\mathbf{x}(k))$; 当 $|G_h(k)||G_l(k)| \neq 0$ 时, 由式(10)可知

$$E[V(\mathbf{x}(k+1))] \leq E[V(\mathbf{x}(k))] \leq E[V(\mathbf{x}(0))] < \infty.$$

由于分组概率 $q_i^{(h)}(k) > 0$, 不会永远维持 $|G_h(k)||G_l(k)| = 0$. 于是, $\lim_{k \rightarrow \infty} E[V(\mathbf{x}(k))]$ 存在极限 c , 并且

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E[V(\mathbf{x}(k+1)) - V(\mathbf{x}(k))] = 0. \quad (A1)$$

综合考虑式(10)–(A1), 可得对 $\forall l, h$,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\text{Ave}(G_h(k)) - \text{Ave}(G_l(k))) = 0. \quad (A2)$$

对任意智能体 i ,

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} (E[x_i(k+1)] - E[x_i(k)]) &= \\ \lim_{k \rightarrow \infty} E[u_i(k)] &= 0. \end{aligned}$$

$E[x_i(k)]$ 存在有界极限 $\bar{x}_i$, 或发散到无穷, $i = 1, \dots, n$.

1) 既存在有界极限, 又有无穷极限; 或同时存在正负极限. 不妨令 x_i 和 x_j 具有不同极限类型, 则

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} E[(x_i(k) - x_j(k))^2] &= \infty, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} E[V(\mathbf{x}(k))] &= \end{aligned}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E\left[\frac{1}{2} \sum_{i \neq j} (x_i(k) - x_j(k))^2\right] = \infty.$$

这与上述已知 $\lim_{k \rightarrow \infty} E[V(\mathbf{x}(k))]$ 存在有界极限 c 矛盾.

2) 仅存在正(负)无穷极限. 假设系统未达到期望一致, 那么可以得到 $\lim_{k \rightarrow \infty} E[V(\mathbf{x}(k))] = c > 0$. 这就意味着对于任意足够大的 K , 针对 $k \geq K$, 总存在智能体 i_k 和 j_k ,

$$\|E[x_{i_k}(k) - x_{j_k}(k)]\| > \sqrt{\frac{2c}{n(n-1)}}.$$

由于每个智能体 i 均以一定概率分组, 那么在任意时刻 K 之后, 总会发生 G_l 中所有数据均比 G_h 大的分组(或都比 G_h 小). 此时,

$$\|\text{Ave}(G_h(k)) - \text{Ave}(G_l(k))\| > \sqrt{\frac{2c}{n(n-1)}}/n.$$

这之前得到的结论 $\lim_{k \rightarrow \infty} (\text{Ave}(G_h(k)) - \text{Ave}(G_l(k))) = 0$ 矛盾.

3) 只存在有界极限. 通过反证法, 假设系统未达到期望一致, 那么必存在至少两个智能体, 其期望值的极限并不相等. 不妨设 $\dots \geq \bar{x}_i > \bar{x}_j \geq \dots$, 且 $\bar{x}_i - \bar{x}_j = \delta > 0$. 令集合 $I = \{i_1 : \bar{x}_{i_1} \geq \bar{x}_i\}$, $J = \{i_2 : \bar{x}_{i_2} > \bar{x}_{i_2}\}$, 从而 I 和 J 均非空.

由极限的定义可知, 对于 $\delta/4 > 0$, 存在 $K > 0$, 对于任意 $k \geq K$, $\|E[x(k)] - \bar{x}\| < \delta/4$. 于是, 有

$$\begin{aligned} & \|E[x_i(k)]|_{i \in I} - E[x_j(k)]|_{j \in J}\| \geq \\ & \bar{x}_i|_{i \in I} - \bar{x}_j|_{j \in J} - \frac{\delta}{2} \geq \frac{\delta}{2} > 0. \end{aligned} \quad (\text{A3})$$

另一方面, 由于每个智能体均以一定概率分组, 那么在任意时刻 K 之后, 总会发生 $G_h \in I$, $G_l \in J$ 的分组(分组为2时为 $G_1 = I$, $G_2 = J$). 此时, 由式(A3)可以得到

$$\|\text{Ave}(G_h(k)) - \text{Ave}(G_l(k))\| \geq \frac{\delta}{2}.$$

这之前得到的结论 $\lim_{k \rightarrow \infty} (\text{Ave}(G_h(k)) - \text{Ave}(G_l(k))) = 0$ 矛盾. 于是, 系统达到期望一致.

分组为2时的必要性证明. 假设 $\gamma \leq 1$, 根据式(6), 对任意的 $x_i(0) \neq x_j(0)$ 都有

$$E[V(\mathbf{x}(k))] \geq E[V(\mathbf{x}(0))] > 0.$$

然而当系统期望一致时, 根据 $V(\mathbf{x}(k))$ 的定义, $E[V(\mathbf{x}(k))]$ 收敛到零, 这与假设条件矛盾, 于是假设不成立.

作者简介:

侯健 (1986-), 男, 博士, 讲师, 目前研究方向为分布式一致性问题以及人工智能, E-mail: changeleap@163.com;

郑荣濠 (1984-), 男, 博士, 副教授, 目前研究方向为分布式协同控制及其在多机器人系统中的应用, E-mail: rzheng@zju.edu.cn.