DOI: 10.7641/CTA.2017.70213

Heston模型中具有保费退回的确定缴费型养老金均衡投资策略

吴奕东†

(云南大学 经济学院, 云南 昆明 650500)

摘要: 本文基于均方差准则研究了Heston模型中确定缴费型养老金(defined contribution, DC)计划的最优投资策略. 假定养老金计划可投资于一种无风险资产和一种风险资产(股票), 风险资产的价格服从收益率和波动率均为随机的Heston模型. 此外, 为了保护在基金积累阶段意外死亡的投保人的利益, 假定保费可退回(给其继承人). 本文在博弈论框架下给出了相应的HJB方程系统, 并通过求解相应的HJB方程系统, 得到了最优"时间一致"均衡投资策略以及均衡有效前沿的解析式. 据我们所知, 这是首次在具有保费退回的情形中研究Heston模型中DC计划的均方差均衡投资问题. 文章最后分析了最优均衡投资策略和有效前沿的相关性质.

关键词: DC养老金计划; Heston模型; 均值–方差; 时间一致策略; 保费退回

引用格式: 吴奕东. Heston模型中具有保费退回的确定缴费型养老金均衡投资策略. 控制理论与应用, 2018, 35(3): 342 – 348

中图分类号: F830.48, O211.67　　　**文献标识码**: A

Equilibrium investment strategy for defined contribution pension plans with the return of premiums clauses under Heston model

WU Yi-dong†

(School of Economics, Yunnan University, Kunming Yunnan 650500, China)

Abstract: In this paper, we study the optimal investment problem for the defined contribution (DC) pension plans under the mean-variance criterion. The financial market consists of a risk-free asset and a risky asset with Heston's stochastic volatility (SV). Furthermore, it is assumed that the pension plans have return of premium clauses to protect the rights of the plan members who die during the accumulation phase. By applying a game theoretic framework and solving the extended Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) systems, we derive the explicit expressions of the time-consistent equilibrium strategies, and also the equilibrium efficient frontier. As far as we known, it is the first time to study the equilibrium strategy for DC plans under the Heston's SV model, in which the return of premiums clauses is considered. In the end, some properties of the efficient strategy and the efficient frontier are presented for our results.

Key words: defined contribution plan; Heston model; mean-variance; time-consistent strategy; return of premiums clauses

Citation: WU Yidong. Equilibrium investment strategy for defined contribution pension plans with the return of premiums clauses under Heston model. *Control Theroy & Applications*, 2018, 35(3): 342 – 348

1 引言(Introduction)

随着人口老龄化的进一步加剧, 基本养老保险基金的支付压力将会越来越大. 因此对于已经实现积累的养老基金进行有效的投资运营以实现保值增值, 以便应对未来的支付危机是很有必要的. 目前, 养老金管理已成为保险精算和金融数学学科的前沿热点课题之一. 养老金计划主要有两种方式, 确定收益型养老金(defined benefit, DB)计划和确定缴费型养老金(defined contribution, DC)计划. DB计划提前确定退休给付金额, 参加者的缴费金额为了能够达到退休时确定给付的金额会随实际情况而变动, 风险由养老金发起者承担. DC计划预先确定缴费水平, 未来的退休给付依赖于积累期间的投资收益, 投资回报率的风险由参与者自己承担. 由于人口老龄化日益严重, DC计划在一定程度上缓解了公共金融系统的压力, 因此近年来DB计划越来越多地被DC计划所代替.

收稿日期: 2017−03−30; 录用日期: 2017−11−08.

†通信作者. E-mail: wuyidong100@163.com; Tel.: +86 15087098855.

本文责任编委: 汤善健.

云南省教育厅科学研究基金项目(2015Y025), 云南省哲学社会科学规划项目(YB2017020)资助.

Supported by the Education Department Science Research Foundation of Yunnan Province (2015Y025) and the Philosophy and Social Science Project of Yunnan Province (YB2017020).

近年来有大量的文献对DC养老金计划的最优投资问题进行了研究[1–10], 然而这些文献大多以收益率和波动率均为常数的几何布朗运动(geometric Brownian motion, GBM)刻画风险资产价格过程. Xiao et al.[11]和Gao[12–13]以最大化终端财富期望效用为目标, 在股价波动率为随机的不变方差弹性(constant elasticity of variance, CEV)模型中研究了DC养老金计划的最优投资问题. 而在实际的股票市场, 由于许多不确定事件会对股票的收益和方差产生很大的影响, 有大量的实证研究也表明股票的收益和方差都是随机的. 因此为了更符合实际, 本文假设风险资产价格过程服从收益率和波动率均为随机的Heston模型. 该模型被广泛应用于金融衍生资产的定价问题(Sepp[14]和Deelstra and Rayée[15]) 与再保险领域(Li et al.[16]和Yi et al.[17]), 而对于DC 养老金计划, 林祥和杨益菲[18]和Guan and Liang[19]基于终端财富期望效用准则研究了Heston 模型中的最优投资问题.

以上大多数文献均是以终端时刻财富的期望效用最大化为目标, 不过以效用最大化为目标求得的最优投资策略通常是短视的, 同时在实际操作过程中, 很难针对不同的投资人挑选合适的效用函数, 更难了解投资人如何通过风险和收益的权衡来做投资决策. 然而, 以同时权衡收益和风险的均方差为目标可以克服以效用最大化为目标存在的缺陷. 与效用最大化问题相比, 均方差问题的研究明显有一段时期的滞后. 这是因为直到近些年来Li and Ng[20]与Zhou and Li[21]做出突破性贡献, 利用嵌入技术将均方差双目标问题转化为随机线性二次(linear quadratic, LQ)控制问题, 并利用Ricatti方法才解决了离散时间多周期和连续时间框架下的均方差投资问题. 近年来也有部分学者在均方差准则下研究了 DC 计划的最优投资问题. 如, Højgaard and Vigna[5]在GBM模型中研究了DC计划的均方差最优投资问题: Vigna[22]将均方差有效性与效用准则进行了比较, 得到CRRA与CARA最优投资策略均不是均方差有效策略: Yao et al.[23]基于均方差准则研究了具有通胀风险时的DC计划投资问题: Guan and Liang[24]在均值回复股价模型中研究了具有随机利率风险的DC计划均方差投资问题.

然而, 以上文献中所得到的均方差最优投资策略均为“时间不一致”策略, 具体地说, 由于均方差目标下Bellman最优性准则不成立, 随着时间的推移, 初始时刻的最优策略不再是之后的最优策略. 对于一个理性的决策者来说, “时间一致”是非常重要的, 因此越来越多的学者开始研究“时间不一致”问题的“时间一致”(或均衡)最优投资策略, 比如Basak and Chabakauri[25], Wang and Forth[26]. 而对于DC养老金计划的均方差“时间一致”策略, He and Liang[8]在GBM模型中研究了具有保费退回情形的最优投资问题, Wu et al.[27]在具有通胀和随机薪金的模型中讨论了DC计划的最优投资.

此外, 为了保护基金积累阶段意外死亡的投保人的利益, DC计划中可以考虑死亡者在其身故后可以收回其缴纳的保费(给其继承人), 差额在生存者之间平均分配. 这意味着投保人需承受死亡所带来的风险. 考虑有保费退回的文献有Blake et al.[28], Milevsky and Robinson[29] 以及 He and Liang[8]. 其中 Blake et al.[28]和Milevsky and Robinson (2000)在离散时间模型中研究了具有保费退回的DC计划投资问题, He and Liang[8]在均方差目标下探讨了GBM模型中具有保费退回的DC计划均衡投资策略.

基于上述分析, 对于DC计划的均方差“时间一致”最优投资问题, 目前还没有文献同时考虑保费退回和股价的随机收益率、随机波动率风险. 因此本文将He and Liang[8]中的GBM模型推广到股价收益率和波动率均为随机的Heston模型, 研究DC计划中具有保费退回情形的均方差“时间一致”最优投资问题, 利用Björk and Murgoci[30] 中的博弈论方法, 并通过求解相应的HJB方程系统, 得到了DC计划的最优均衡投资策略及均衡有效前沿.

本文结构安排如下: 第2节给出了金融市场模型、养老金财富过程并提出了DC计划投资的随机最优控制问题, 第3节利用Björk and Murgoci[30]中的博弈论方法以及随机最优控制理论得到了DC计划最优均衡投资策略及均衡有效前沿的显性解: 最后一节分析了最优投资策略及有效前沿的相关性质.

2 模型(Model)

设$(\Omega, F, \{F_t\}_{t\geqslant 0}, P)$是一带过滤的完备的概率空间, 其中$F_t$表示$t$时刻前市场中包含的信息. 本文假设以下定义的所有随机过程都是$\{F_t\}_{t\geqslant 0}$适应的.

2.1 金融市场(Financial market)

本文假设养老金计划可投资于一种无风险资产(债券)和一种风险资产(股票). 无风险资产价格过程$B(t)$满足

$$\mathrm{d}B(t) = rB(t)\mathrm{d}t, \tag{1}$$

其中$r > 0$, 表示无风险利率. 风险资产价格过程$S(t)$由以下的Heston模型来刻画:

$$\begin{cases} \mathrm{d}S(t) = S(t)\big[(r + \lambda \cdot L(t))\mathrm{d}t + \sqrt{L(t)}\mathrm{d}W_1(t)\big], \\ \mathrm{d}L(t) = k(\theta - L(t))\mathrm{d}t + \sigma\sqrt{L(t)}\mathrm{d}W_2(t), \end{cases} \tag{2}$$

其中: λ, k, θ和σ均为正常数: $W_1(\cdot)$和$W_2(\cdot)$是两个一维布朗运动, 相关系数为$\rho(\in[-1,1])$; 同时为了确保过程$L(t)$是几乎处处非负的, 假设$2k\theta \geqslant \sigma^2$成立.

2.2 最优化问题(The optimization problem)

在资金积累阶段, 投保人按预先确定的水平缴纳

保费, 本文假设工资水平为一个单位, 缴费率为常数P, 养老金缴纳期限$[0,T]$可以理解为从开始缴纳保费的年龄ω_0到退休年龄ω_0+T. 收到的保费投资于上述模型中的无风险资产和风险资产股票, 假设t时刻投资于无风险资产的资金比例记为$\pi(t)$, 剩余部分$1-\pi(t)$则被投资于风险资产股票.

当计划参与者退休时, 他可以获得包括投资收益在内的养老金. 为了保护在退休前意外死亡的投保人的利益, 计划中允许保费退回. 也就是说, 死亡者(更准确地说, 是其继承人)可以收回其缴纳的保费及相应的投资收益所得. 记t时刻的死亡率记为$\lambda(t)$, 而${}_{\frac{1}{n}}p_{\omega_0+t}$表示年龄为$\omega_0+t$的投保人能够继续存活时间$\dfrac{1}{n}$的概率, 则${}_{\frac{1}{n}}p_{\omega_0+t}$可以计算如下:

$${}_{\frac{1}{n}}p_{\omega_0+t}=\mathrm{e}^{-\int_{\omega_0+t}^{\omega_0+t+\frac{1}{n}}\lambda(s)\mathrm{d}s}=\mathrm{e}^{-\int_0^{\frac{1}{n}}\lambda(\omega_0+t+s)\mathrm{d}s}.$$

因此当n充分大时, 在$[t,t+\dfrac{1}{n}]$内死亡的概率${}_{\frac{1}{n}}q_{\omega_0+t}$可以表示如下:

$${}_{\frac{1}{n}}q_{\omega_0+t}=1-\mathrm{e}^{-\int_0^{\frac{1}{n}}\lambda(\omega_0+t+s)\mathrm{d}s}\doteq\lambda(\omega_0+t)\frac{1}{n}. \tag{3}$$

为了推导养老金财富过程X^π所满足的随机微分方程, 首先在长度为$\dfrac{1}{n}$的时间段内考察其差分形式. 显然

$$X^\pi(t+\frac{1}{n})=\{X^\pi(t)[\pi(t)\frac{S(t+\frac{1}{n})}{S(t)}+(1-\pi(t))\frac{B(t+\frac{1}{n})}{B(t)}]+P\frac{1}{n}-Pt\,{}_{\frac{1}{n}}q_{\omega_0+t}\}\frac{1}{{}_{\frac{1}{n}}p_{\omega_0+t}}.$$

根据式(3), 不难推出当n足够大时有

$$\begin{aligned}X^\pi(t+\frac{1}{n})=&\{X^\pi(t)[1+\pi(t)\frac{S(t+\frac{1}{n})-S(t)}{S(t)}+(1-\pi(t))\frac{B(t+\frac{1}{n})-B(t)}{B(t)}]+P\frac{1}{n}-\\&Pt\lambda(\omega_0+t)\frac{1}{n}\}\cdot[1+\lambda(\omega_0+t)\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n})]=\\&X^\pi(t)[1+\pi(t)\frac{S(t+\frac{1}{n})-S(t)}{S(t)}+(1-\pi(t))\frac{B(t+\frac{1}{n})-B(t)}{B(t)}+\lambda(\omega_0+t)\frac{1}{n}]+\\&P\frac{1}{n}-Pt\lambda(\omega_0+t)\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n}).\end{aligned}$$

从而基金过程X^π满足如下的随机微分方程:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}X^\pi(t)=&X^\pi(t)[\pi(t)\frac{\mathrm{d}S(t)}{S(t)}+(1-\pi(t))\frac{\mathrm{d}B(t)}{B(t)}]+\\&X^\pi(t)\lambda(\omega_0+t)\mathrm{d}t+P\mathrm{d}t-Pt\lambda(\omega_0+t)\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{4}$$

为了简化此模型, 本文采用Kohler and Kohler[31]中的死亡率模型, 即死亡率为确定性函数的Abraham De Moivre模型: $\lambda(t)=\dfrac{1}{\omega-t}$, 其中$\omega$表示存活的最大年龄. 根据式(1)–(2), 式(4)经整理后可得

$$\begin{aligned}\mathrm{d}X^\pi(t)=&X^\pi(t)[r+\lambda L(t)\pi+\frac{1}{\omega-\omega_0-t}]\mathrm{d}t+\\&P\frac{\omega-\omega_0-2t}{\omega-\omega_0-t}\mathrm{d}t+X^\pi(t)\pi\sqrt{L(t)}\mathrm{d}W_1(t).\end{aligned}$$

记$\Pi(t,x,l)$表示初始条件$(X(t)=x,L(t)=l)$下的可允许策略集. 为了最大化终端时刻的财富期望, 同时最小化财富方差, 本文选择均方差作为优化准则, 从而养老金计划管理者面临了连续时间均方差资产组合问题. 然而均方差目标函数不满足期望迭代性质, 从而Bellman最优原理也不成立, 这使得该问题是“时间不一致”的, 这意味着不同时刻基金发起人面临不同的目标函数, 可以将此问题看成非合作博弈, 每个时刻t, 有一个“选手t”, 可以看作未来自己在t时刻的替身. 在任意起始状态(t,x,l), 管理者面临以下随机最优控制问题:

$$\begin{cases}J^\pi(t,x,l)\hat{=}E_{t,x,l}[X^\pi(T)]-\dfrac{\gamma}{2}\mathrm{Var}_{t,x,l}[X^\pi(T)],\\V(t,x,l)\hat{=}\sup\limits_{\pi\in\Pi(t,x,l)}J^\pi(t,x,l),\end{cases} \tag{5}$$

其中γ表示投保人的风险厌恶水平.

3 均方差最优控制问题求解(The solution to the mean-variance optimal control problem)

3.1 验证定理(Verification theorem)

基于Björk and Murgoci[30]文中关于纳什均衡策略的思想, 我们先给出均衡策略π^*的定义如下:

定义 对于任意给定的初始状态(t,x,l), $t<T$, 选择时间细分$h>0$, 定义时间段$[t,T]$上的策略π_h如下:

$$\pi_h(s,x,l)=\begin{cases}\pi, & t\leqslant s<t+h,\\\pi^*(s,x,l), & t+h\leqslant s\leqslant T.\end{cases}$$

本文称π^*是子博弈精练纳什均衡策略或“时间一致”最优策略, 如果对于任意固定的(t,x,l), 下式对于$\forall\pi\in\mathbb{R}$都成立:

$$\liminf_{h\to 0}\frac{J^{\pi^*}(t,x,l)-J^{\pi_h}(t,x,l)}{h}\geqslant 0.$$

如果均衡策略π^*存在, 则均衡值函数为

$$V(t,x,l)=J^{\pi^*}(t,x,l).$$

记$F(y)=y-\frac{\gamma}{2}y^2$, $G(y)=\frac{\gamma}{2}y^2$, 则值函数可以写成

$$\begin{cases}J^{\pi}(t,x,l)=E_{t,x,l}[F(X^{\pi}(T))]+G(E_{t,x,l}[X^{\pi}(T)]),\\ V(t,x,l)=\sup\limits_{\pi\in\Pi(t,x,l)}J^{\pi}(t,x,l).\end{cases}$$

本文先给出最优控制问题的验证定理.

定理 1(验证定理)　假设$V,g\in C^{1,2,2}$是以下扩展HJB方程系统的解:

$$\begin{cases}\sup\limits_{\pi\in\pi(t,x,l)}\{A^{\pi}V(t,x,l)-\frac{\gamma}{2}[g_x^2x^2\pi^2l+\\ \qquad g_l^2\sigma^2l+2\rho g_xg_lx\pi\sigma l]\}=0,\\ A^{\pi^*}g(t,x,l)=0,\\ V(T,x,l)=x,\\ g(T,x,l)=x.\end{cases}\tag{6}$$

这里π^*是第一个方程中的最大值控制策略, 算子A为

$$A^{\pi}V(t,x,l)\hat{=}$$
$$V_t+V_xx(r+\lambda l\pi+\frac{1}{\omega-\omega_0-t})+$$
$$V_xP\frac{\omega-\omega_0-2t}{\omega-\omega_0-t}+V_lk(\theta-l)+$$
$$\frac{1}{2}V_{xx}x^2\pi^2l+\frac{1}{2}V_{ll}\sigma^2l+V_{xl}\rho x\pi\sigma l,$$

那么π^*为均衡策略, V是相应的均衡值函数, 且g可表示如下:

$$g(t,x,l)=E_{t,x,l}[X^{\pi^*}(T)].\tag{7}$$

证　与文Björk and Murgoci[30]中的定理4.1类似, 如果函数V和g满足以下方程组:

$$\begin{cases}\sup\limits_{\pi\in\pi(t,x,l)}\{A^{\pi}V(t,x,l)-A^{\pi}G(g(t,x,l))+\\ \qquad G'(g(t,x,l))A^{\pi}g(t,x,l)\}=0,\\ A^{\pi^*}g(t,x,l)=0,\\ V(T,x,l)=x,\\ g(T,x,l)=x,\end{cases}\tag{8}$$

那么π^*和V分别是相应的均衡策略和均衡值函数, 而且式(7)也成立.

根据

$$\mathrm{d}g^{\pi}(t,X(t),L(t))=$$
$$A^{\pi}g(t,X^{\pi}(t),L(t))\mathrm{d}t+$$
$$g_xX(t)\pi(t)\sqrt{L(t)}\mathrm{d}W_1(t)+g_l\sigma\sqrt{L(t)}\mathrm{d}W_2(t),$$

可以得到

$$d<g^{\pi}(t,X(t),L(t))>=$$
$$[g_x^2X^2(t)\pi^2(t)L(t)+$$
$$g_l^2\sigma^2L(t)+2\rho\sigma g_xg_lX(t)\pi(t)L(t)]\mathrm{d}t,$$

其中$<\cdot>$表示二次变差.

由于$g\in C^{1,2,2}$, $G\in C^2$, 根据Itô引理可得

$$\mathrm{d}G(g(t,X^{\pi}(t),L(t)))=$$
$$G'(g(t,X^{\pi}(t),L(t)))[A^{\pi}g(t,X^{\pi}(t),L(t))\mathrm{d}t+$$
$$g_xX(t)\pi(t)\sqrt{L(t)}dW_1(t)+g_l\sigma\sqrt{L(t)}dW_2(t)]+$$
$$\frac{1}{2}G''(g(t,X^{\pi}(t),L(t)))[g_x^2X^2(t)\pi^2(t)L(t)+$$
$$g_l^2\sigma^2L(t)+2\rho\sigma g_xg_lX(t)\pi(t)L(t)]\mathrm{d}t,$$

从而有

$$A^{\pi}G(g(t,x,l))-G'(g(t,x,l))A^{\pi}g(t,x,l)=$$
$$\frac{\gamma}{2}[g_x^2x^2\pi^2l+g_l^2\sigma^2l+2\rho g_xg_lx\pi\sigma l].$$

因此式(8)中的第1个方程为

$$\sup_{\pi\in\pi(t,x,l)}\{A^{\pi}V(t,x,l)-\frac{\gamma}{2}[g_x^2x^2\pi^2l+g_l^2\sigma^2l+$$
$$2\rho g_xg_lx\pi\sigma l]\}=0.$$

证毕.

3.2　均衡策略与均衡有效前沿(Equilibrium strategies and the equilibrium efficient frontier)

在本节, 通过运用随机最优控制理论求出HJB方程系统(6)的解, 并得到均衡投资策略和均衡有效前沿的显性解.

将式(6)中的第1个方程关于π求导, 得到一阶条件

$$\pi^*(t,x,l)=\frac{\lambda V_x+\rho\sigma V_{xl}-\rho\gamma\sigma g_xg_l}{(\gamma g_x^2-V_{xx})x}.\tag{9}$$

将上式代入HJB方程系统(6)的前两个方程, 可以得到

$$V_t+V_xx(r+\frac{1}{\omega-\omega_0-t})+V_xP\frac{\omega-\omega_0-2t}{\omega-\omega_0-t}+$$
$$V_lk(\theta-l)+\frac{1}{2}V_{ll}\sigma^2l-\frac{\gamma}{2}g_l^2\sigma^2l+$$
$$\frac{(\lambda V_x+\rho\sigma V_{xl}-\rho\gamma\sigma g_xg_l)^2}{2(\gamma g_x^2-V_{xx})}l=0,\tag{10}$$

$$g_t+g_xx(r+\frac{1}{\omega-\omega_0-t})+g_xP\frac{\omega-\omega_0-2t}{\omega-\omega_0-t}+$$
$$g_lk(\theta-l)+\frac{1}{2}g_{ll}\sigma^2l+$$
$$l(\lambda g_x+\rho\sigma g_{xl})\frac{\lambda V_x+\rho\sigma V_{xl}-\rho\gamma\sigma g_xg_l}{\gamma g_x^2-V_{xx}}+$$
$$\frac{1}{2}g_{xx}l\frac{(\lambda V_x+\rho\sigma V_{xl}-\rho\gamma\sigma g_xg_l)^2}{(\gamma g_x^2-V_{xx})^2}=0.\tag{11}$$

根据终值条件$V(T,x,l)=x$与$g(T,x,l)=x$, 作

者猜测$V(t,x,l)$与$g(t,x,l)$具有以下结构:

$$\begin{cases} V(t,x,l)=A(t)x+Q(t)l+B(t), \\ A(T)=1,\ Q(T)=0,\ B(T)=0, \\ g(t,x,l)=a(t)x+q(t)l+b(t), \\ a(T)=1,\ q(T)=0,\ b(T)=0, \end{cases} \tag{12}$$

其中: $A(t), Q(t), B(t), a(t), q(t), b(t)$待定. 从而式(10)–(11)可分别写成如下形式:

$$\begin{aligned} &[A'(t)+A(t)(r+\frac{1}{\omega-\omega_0-t})]x+ \\ &[Q'(t)-kQ(t)-\frac{\gamma}{2}q^2(t)\sigma^2+ \\ &\frac{(\lambda A(t)-\rho\gamma\sigma a(t)q(t))^2}{2\gamma a^2(t)}]l+ \\ &[B'(t)+A(t)P\frac{\omega-\omega_0-2t}{\omega-\omega_0-t}+Q(t)k\theta]=0, \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} &[a'(t)+a(t)(r+\frac{1}{\omega-\omega_0-t})]x+ \\ &[q'(t)-kq(t)+\lambda a(t)\frac{\lambda A(t)-\rho\gamma\sigma a(t)q(t)}{\gamma a^2(t)}]l+ \\ &[b'(t)+a(t)P\frac{\omega-\omega_0-2t}{\omega-\omega_0-t}+q(t)k\theta]=0. \end{aligned} \tag{14}$$

上述两方程消除对x, l的依赖, 可以拆分成以下6个方程:

$$\begin{cases} A'(t)+A(t)(r+\dfrac{1}{\omega-\omega_0-t})=0, \\ A(T)=1, \end{cases} \tag{15}$$

$$\begin{cases} Q'(t)-kQ(t)-\dfrac{\gamma}{2}q^2(t)\sigma^2+ \\ \dfrac{(\lambda A(t)-\rho\gamma\sigma a(t)q(t))^2}{2\gamma a^2(t)}=0, \\ Q(T)=0, \end{cases} \tag{16}$$

$$\begin{cases} B'(t)+A(t)P\dfrac{\omega-\omega_0-2t}{\omega-\omega_0-t}+Q(t)k\theta=0, \\ B(T)=0, \end{cases} \tag{17}$$

$$\begin{cases} a'(t)+a(t)(r+\dfrac{1}{\omega-\omega_0-t})=0, \\ a(T)=1, \end{cases} \tag{18}$$

$$\begin{cases} q'(t)-kq(t)+\lambda a(t)\dfrac{\lambda A(t)-\rho\gamma\sigma a(t)q(t)}{\gamma a^2(t)}=0, \\ q(T)=0, \end{cases} \tag{19}$$

$$\begin{cases} b'(t)+a(t)P\dfrac{\omega-\omega_0-2t}{\omega-\omega_0-t}+q(t)k\theta=0, \\ b(T)=0. \end{cases} \tag{20}$$

很显然常微分方程(15)与(18)的解如下:

$$A(t)=a(t)=\mathrm{e}^{-r(t-T)}\frac{\omega-\omega_0-t}{\omega-\omega_0-T}, \tag{21}$$

从而可求得方程(19)的解为

$$q(t)= \begin{cases} \dfrac{\lambda^2}{\gamma(k+\lambda\rho\sigma)}[1-\mathrm{e}^{(k+\lambda\rho\sigma)(t-T)}],\ k+\lambda\rho\sigma\neq0, \\ \dfrac{\lambda^2}{\gamma}(T-t), \qquad k+\lambda\rho\sigma=0. \end{cases} \tag{22}$$

将式(21)–(22)代入方程(20), 可以得到

$$b(t)= \begin{cases} \dfrac{\lambda^2k\theta}{\gamma(k+\lambda\rho\theta)}\displaystyle\int_t^T[1-\mathrm{e}^{(k+\lambda\rho\sigma)(s-T)}]\mathrm{d}s+ \\ P\displaystyle\int_t^T\mathrm{e}^{-r(s-T)}\frac{\omega-\omega_0-2s}{\omega-\omega_0-T}\mathrm{d}s,\ k+\lambda\rho\sigma\neq0, \\ P\displaystyle\int_t^T\mathrm{e}^{-r(s-T)}\frac{\omega-\omega_0-2s}{\omega-\omega_0-T}\mathrm{d}s+ \\ \dfrac{k\theta\lambda^2(T-t)^2}{2\gamma}, \qquad k+\lambda\rho\sigma=0. \end{cases} \tag{23}$$

根据表达式(21), 不难求出方程(16)–(17)的解如下:

$$\begin{cases} Q(t)=-\dfrac{\gamma}{2}\sigma^2\displaystyle\int_t^T\mathrm{e}^{-k(s-t)}q^2(s)\mathrm{d}s+ \\ \qquad \dfrac{1}{2\gamma}\displaystyle\int_t^T\mathrm{e}^{-k(s-t)}(\lambda-\rho\gamma\sigma q(s))\mathrm{d}s, \\ B(t)=\dfrac{P}{\omega-\omega_0-T}\displaystyle\int_t^T\mathrm{e}^{-r(s-T)}(\omega-\omega_0- \\ \qquad 2s)\mathrm{d}s+k\theta\displaystyle\int_t^T Q(s)\mathrm{d}s, \end{cases} \tag{24}$$

其中$q(\cdot)$由式(22)给出.

将$V(t,x,l)$和$g(t,x,l)$的表达式代入一阶条件(9)式, 可以得到

$$\begin{aligned} \pi^*(t)=&\frac{\lambda-\rho\gamma\sigma q(t)}{\gamma a(t)x}= \\ &\frac{\lambda(k+\lambda\rho\sigma)-\rho\sigma\lambda^2[1-\mathrm{e}^{(k+\lambda\rho\sigma)(t-T)}]}{\mathrm{e}^{-r(t-T)}\gamma x(k+\lambda\rho\sigma)\dfrac{\omega-\omega_0-t}{\omega-\omega_0-T}}= \\ &\frac{\mathrm{e}^{r(t-T)}\lambda(\omega-\omega_0-T)}{\gamma x(\omega-\omega_0-t)}\frac{k+\lambda\rho\sigma\mathrm{e}^{(k+\lambda\rho\sigma)(t-T)}}{k+\lambda\rho\sigma}. \end{aligned}$$

由表达式(5)(12)与(21), 可得

$$\mathrm{Var}_{t,x,l}[X^{\pi^*}(T)]=\frac{2}{\gamma}[(q(t)-Q(t))l+b(t)-B(t)],$$

从而有

$$\begin{aligned} &E_{t,x,l}[X^{\pi^*}(T)]=a(t)x+q(t)l+b(t)= \\ &N(t,l)\sqrt{\mathrm{Var}_{t,x,l}[X^{\pi^*}(T)]}+\mathrm{e}^{-r(t-T)}\frac{\omega-\omega_0-t}{\omega-\omega_0-T}x, \end{aligned}$$

其中

$$N(t,l)=\frac{\sqrt{\gamma}[q(t)l+b(t)]}{\sqrt{2[(q(t)-Q(t))l+b(t)-B(t)]}}.\quad(25)$$

本文总结结果为以下定理.

定理 2　HJB方程系统(6)的解为

$$\begin{cases}V(t,x,l)=A(t)x+Q(t)l+B(t),\\ g(t,x,l)=a(t)x+q(t)l+b(t),\end{cases}$$

其中: $A(t),a(t),q(t),b(t),Q(t),B(t)$的表达式由式(21)–(24)给定. 最优控制问题的"时间一致"均衡投资策略与均衡有效前沿分别为

$$\pi^*(t)=\frac{\mathrm{e}^{r(t-T)}\lambda(\omega-\omega_0-T)}{\gamma x(\omega-\omega_0-t)}K(t),\quad(26)$$

$$E_{t,x,l}[X^*(T)]=\mathrm{e}^{-r(t-T)}\frac{\omega-\omega_0-t}{\omega-\omega_0-T}x+N(t,l)\sqrt{\mathrm{Var}_{t,x,l}[X^{\pi^*}(T)]},\quad(27)$$

其中$N(t,l)$由式(25)给定, $K(t)$表达式如下:

$$K(t)=\frac{k+\lambda\rho\sigma\mathrm{e}^{(k+\lambda\rho\sigma)(t-T)}}{k+\lambda\rho\sigma}.$$

4　均衡策略与有效前沿的分析(Analysis of the equilibrium strategies and the efficient frontier)

本节中, 对均衡策略与有效前沿进行相关的分析, 可以得到一些有意义的结论.

结论 1　根据表达式(26), 得到随着风险厌恶系数γ以及财富x的增加, 投资于股票的比例下降, 这是具有一定经济意义的. 一方面, 具有较高风险厌恶系数的个人通常会选择较少的比例投资于风险资产, 从而为自己规避风险. 另一方面, 资金规模越小, 投保人为了满足自身的养老需要通常愿意冒更大的风险投资于更多的风险资产.

结论 2　在股价满足GBM模型的类似问题中, He and liang[8]得到以下最优投资策略:

$$\pi^*(t)=\frac{\mathrm{e}^{r(t-T)}(\mu-r)(\omega-\omega_0-T)}{\gamma x\sigma^2(\omega-\omega_0-t)}.$$

与He and liang[8]的结果进行比较, Heston股价模型中的最优投资策略可以分解为两部分. 第1部分

$$\frac{\mathrm{e}^{r(t-T)}\lambda(\omega-\omega_0-T)}{\gamma x(\omega-\omega_0-t)}$$

实际上与其有相似的表达形式, 因为Heston模型中的Merton比率为

$$\frac{\mu-r}{\sigma^2}=\frac{(r+\lambda L(t))-r}{L(t)}=\lambda.$$

另一部分$K(t)$可以理解为修正因子, 反映了投保人对Heston模型中的随机收益率、随机波动率进行套期保值的风险需求.

为了更好地理解修正因子对最优投资策略的影响, 本文研究了修正因子的性质如下.

推论 1　当$\rho>0$时, 修正因子$K(t)$是关于t的增函数. 当$\rho<0$时, $K(t)$关于t递减. 此外, $K(t)$具有以下性质:

$$K(t)=\begin{cases}\leqslant 1,\ \rho>0,\\ \equiv 1,\ \rho=0,\\ \geqslant 1,\ \rho<0.\end{cases}$$

证　因为$K(T)=1$且$K'(t)=\lambda\rho\sigma\mathrm{e}^{(k+\lambda\rho\sigma)(t-T)}$, 结论显然成立.　　证毕.

结论 3　推论1说明修正系数主要依赖于时间t以及Heston模型中W_1与W_2的相关系数ρ. 而且当$\rho>0$时, 投保人投资于风险资产的比例随着时间推移逐渐增加, 并且最优投资比例较GBM模型更少; 而$\rho>0$时, 结论恰好相反, 最优投资比例较GBM模型更多, 初期投资较大的资金于风险资产, 随着退休时间的临近, 投资于风险资产的比例逐渐降低.

结论 4　定理2可以说明有效前沿$(EX^*(T),\sqrt{\mathrm{var}X^{\pi^*}(T)})$是一条斜率为$N(t,l)$的直线, 均值标准差直线与均值轴的交点为

$$\mathrm{e}^{-r(t-T)}\frac{\omega-\omega_0-t}{\omega-\omega_0-T}x.$$

由于漂移项

$$\mathrm{e}^{-r(t-T)}\frac{\omega-\omega_0-t}{\omega-\omega_0-T}x$$

是关于x的增函数, $N(t,l)$关于l递增, 因此本文有如下结论:

结论 5　在均值标准差有效前沿直线中, 对于相同的风险(终端财富方差), 收益(终端财富期望)关于x, l递增. 此结果具有一定的经济意义. 一方面, 当初始财富增加时, 在相同的风险条件下当然能获得更多的收益: 其二, 股价模型中的l表示承担一定程度风险的股票风险溢价, 因此l越大, 在相同的风险条件下当然能获得更多的收益.

参考文献(References):

[1] BOULIER J F, HUANG S J, TAILLARD G. Optimal management under stochastic interest rates: the case of a protected defined contribution pension fund [J]. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2001, 28(2): 173 – 189.

[2] DEELSTRA G, GRASSELLI M, KOEHL P F. Optimal investment strategies in the presence of a minimum guarantee [J]. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2003, 33(1): 189 – 207.

[3] DEVOLDER P, BOSCH P M, DOMINGUEZ, F I. Stochastic optimal control of annuity contracts [J]. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2003, 33(2): 227 – 238.

[4] CAIRNS A J G, BLAKE D, DOWD K. Stochastic life styling: Optimal dynamic asset allocation for defined-contribution pension plans [J]. *Journal of Economic Dynamic and Control,* 2006, 30(5): 843 – 877.

[5] HøJGGARD B, VIGNA E. Mean-variance portfolio selection and efficient frontier for defined contribution pension schemes [J]. *Work-*

ing Paper, 2007, Available at: http: //vbn.aau.dk/files/11498557/R – 2007 – 13.pdf.

[6] GIACINTO M D, FEDERICO S, GOZZI F. Pension funds with a minimum guarantee: a stochastic control approach [J]. *Finance and Stochastics*, 2011, 15(2): 297 – 342.

[7] HAN N W, HUNG M W. Optimal asset allocation for DC pension plans under inflation [J]. *Insurance Mathematics and Economics*, 2012, 51(1): 172 – 181.

[8] HE L, LIANG Z. Optimal investment strategy for the DC plan with the return of premiums clauses in a mean — variance framework [J]. *Insurance Mathematics and Economics*, 2013, 53(3): 643 – 649.

[9] HE L, LIANG Z. Optimal dynamic asset allocation strategy for ELA scheme of DC pension plan during the distribution phase [J]. *Insurance Mathematics and Economics*, 2013, 52(2): 404 – 410.

[10] HE L, LIANG Z. Optimal assets allocation and benefit outgo policies of DC pension plan with compulsory conversion claims [J]. *Insurance Mathematics and Economics*, 2015, 61(3): 227 – 234.

[11] XIAO J W, HONG Z, QIN C L. The constant elasticity of variance (CEV) model and the Legendre transtorm dual solution for annuity contracts [J]. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2007, 40(2): 302 – 310.

[12] GAO J W. Optimal portfolios for DC pension plans under a CEV model [J]. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2009, 44(3): 479 – 490.

[13] GAO J W. Optimal investment strategy for annuity contracts under the constant elasticity of variance (CEV) model [J]. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2009, 45(1): 9 – 18.

[14] SEPP A. Pricing options on realized variance in the heston model with jumps in returns and volatility [J]. *Journal of Computational Finance*, 2008, 11(4): 33 – 70.

[15] DEELSTRA G, RAY*É*E G. Pricing variable annuity guarantees in a local volatility framework [J]. *Insurance Mathematics and Economics*, 2013, 53(3): 650 – 663.

[16] LI Z F, ZENG Y, LAI Y Z. Optimal time-consistent investment and reinsurance strategies for insurers under Heston's SV model [J]. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2012, 51(1): 191 – 203.

[17] YI B, LI Z, VIENS F G, et al. Robust optimal control for an insurer with reinsurance and investment under Heston's stochastic volatility model [J]. *Insurance Mathematics and Economics*, 2013, 53(3): 601 – 614.

[18] LIN Xiang, YANG Yifei. Optimal investment for defined contribution pension plans under Heston model [J]. *Mathematica Applicata*, 2010, 23(2): 413 – 418.
(林祥, 杨益非. Heston随机方差模型下确定缴费型养老金的最优投资 [J]. 应用数学, 2010, 23(2): 413 – 418.)

[19] GUAN G, LIANG Z. Optimal management of DC pension plan in a stochastic interest rate and stochastic volatility framework [J]. *Insurance Mathematics and Economics*, 2014, 57(1): 58 – 66.

[20] LI D, NG W L. Optimal dynamic portfolio selection: multi-period mean-variance formulation [J]. *Mathematical Finance*, 2000, 10(3): 387 – 406.

[21] ZHOU X Y, LI D. Continuous-time mean-variance portfolio selection: a stochastic LQ framework [J]. *Applied Mathematics and Optimization*, 2000, 42(1): 19 – 33.

[22] VIGNA E. On efficiency of mean-variance based portfolio selection in defined contribution pension schemes [J]. *Quantitative Finance*, 2014, 14(2): 237 – 258.

[23] YAO H X, YANG Z, CHEN P. Markowitz's mean-variance defined contribution pension fund management under inflation: a continuous-time model [J]. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2013, 53(3): 851 – 863.

[24] GUAN G, LIANG Z. Mean-variance efficiency of DC pension plan under stochastic interest rate and mean-reverting returns [J]. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2015, 61(2): 99 – 109.

[25] BASAK S, CHABAKAURI, G. Dynamic mean-variance asset allocation [J]. *Review of Financial Studies* 2010, 23(8): 2970 – 3016.

[26] WANG J, FORSYTH, P A. Continuous time mean variance asset allocation: a time-consistent strategy [J]. *European Journal of Operational Research*, 2011, 209(2): 184 – 201.

[27] WU H, ZHANG L, CHEN H. Nash equilibrium strategies for a defined contribution pension management [J]. *Insurance Mathematics and Economics*, 2015, 62(3): 202 – 214.

[28] BLAKE E, CAIRNS A J G, DOWD K. Pensionmetrics II: stochastic pension plan design during the distribution phase [J]. *Insurance Mathematics and Economics*, 2003, 33(1): 29 – 47.

[29] MILEVSKY M A, ROBINSON C. Self-annuitization and ruin in retirement [J]. *North American Actuarial Journal*, 2000, 4(4): 112 – 124.

[30] BJöRK T, MURGOCI A. A general theory of markovian time inconsistent stochastic control problems [J]. *Ssrn Electronic Journal*, 2010, 18(3): 545 – 592.

[31] KOHLER P H, KOHLER I, KOHLER I. Frailty modeling for adult and old age mortality: the application of a modified De Moivre Hazard function to sex differentials in mortality [J]. *Demographic Research*, 2000, 3(8): 32.

作者简介:

吴奕东 (1982–), 女, 博士, 讲师, 目前研究方向为随机过程在金融和保险中的应用, E-mail: wuyidong100@163.com.