

滑动变量受限情况下的二阶滑模控制设计

梅珂琪, 马莉[†], 丁世宏, 刘 陆

(江苏大学 电气信息工程学院, 江苏 镇江 212013)

摘要: 在实际系统中状态受限普遍存在, 因此考虑状态受限下的控制设计问题具有重要的理论意义和工程价值. 本文考虑了滑动变量受限情况下的二阶滑模控制设计问题. 首先, 在不考虑滑动变量受限的情况下, 基于Lyapunov方法, 给出了一种新的二阶滑模控制器构造方法, 并严格证明了在该控制器的作用下滑动变量将在有限时间内稳定到平衡点. 其次, 考虑滑动变量受限情况, 证明了在受限区域内存在一个与控制参数相关的吸引域, 使得当初始状态在该吸引域内时其相轨迹不会逃离它. 最后, 状态受限情况下倒立摆系统的控制设计验证了该算法的有效性.

关键词: 二阶滑模; 有限时间稳定性; 加幂积分; 状态受限

引用格式: 梅珂琪, 马莉, 丁世宏, 等. 滑动变量受限情况下的二阶滑模控制设计. 控制理论与应用, 2018, 35(3): 414–420.

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Second-order sliding mode control design subject to sliding variable constraints

MEI Ke-qi, MA Li[†], DING Shi-hong, LIU Lu

(School of Electrical and Information Engineering, Jiangsu University, Zhenjiang Jiangsu 212013, China)

Abstract: In real system, the state constraints are ubiquitous. Thus it is of great theoretical and engineering significance to consider the control design problem under state constraints. In this paper, the problem of second-order sliding mode (SOSM) controller design under sliding variable constraints is considered. Firstly, by using the Lyapunov method, a kind of new SOSM controller is presented without considering the sliding variable constraints. It is proved that the sliding variable will be stabilized to the equilibrium point in a finite time under the designed SOSM controller. Secondly, considering the case that the sliding variable is restricted to be in a preset region, it is also proved that there is a domain of attraction associated with the control parameters in the restricted region so that its phase trajectory will not escape from the attractive domain when the initial states are within it. Finally, the control of the inverted pendulum under state constraints is given to demonstrate the effectiveness of the proposed algorithm.

Key words: second-order sliding mode; finite-time stability; adding a power integrator; state constraints

Citation: MEI Keqi, MA Li, DING Shihong, et al. Second-order sliding mode control design subject to sliding variable constraints. *Control Theory & Applications*, 2018, 35(3): 414–420

1 引言(Introduction)

滑模控制方法最早由前苏联工程师在二次世界大战期间提出, 后来在20世纪50–60年代由前苏联学者Emelyanov和Utkin等在数学上给出了其严格定义, 并对其进行了推广. 滑模控制方法的主要优点在于对系统不确定和参数变化具有很强的鲁棒性且实现简单, 因此该方法自提出以来吸引了很多学者的关注^[1]. 然而, 在实际应用时, 滑模控制存在两个主要问题. 第一是抖振问题. 由于滑模控制器中存在非连续项用以

压制系统不确定或干扰, 导致控制不连续^[2], 在工程上表现为抖振现象, 严重影响了系统的控制性能. 针对抖振问题, 最常用的解决办法是用饱和函数代替符号函数的“边界层”方法^[3]. 但是, 边界层内的控制实际上为线性控制器, 导致闭环系统的鲁棒性变差. 第二是相对阶问题. 在传统滑模理论中, 所选择滑动面的相对阶必须为一阶, 限制了滑动面的选择.

需要指出的是二阶滑模可以解决上述问题. 二阶滑模的思想是在一阶滑模的基础上继续对滑动面求

收稿日期: 2017–04–06; 录用日期: 2017–10–25.

[†]通信作者. E-mail: mali@mujs.edu.cn; Tel.: +86 511-88791245.

本文责任编辑: 胡跃明.

国家自然科学基金项目(61573170, 31571571), 江苏高校优势学科建设工程项目和江苏省“六大人才高峰”项目(XNYQC–006)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (61573170, 31571571) and the Priority Academic Program Development of Jiangsu Higher Education Institutions and Six talent peaks project in Jiangsu Province (XNYQC–006).

导, 并将控制器 u 的导数(即 $\dot{u}$)看作新的虚拟控制器, 并设计非连续控制律 $\dot{u} = \dot{u}(t, x)$. 由于实际控制器是对该虚拟控制器的积分, 因而是连续的, 故可以降低抖振^[4-5]. 另外, 滑动变量相对于虚拟控制器为二阶, 因而将滑动面相对阶由一阶推广为二阶情形.

近年来, 二阶滑模得到了很多学者的关注. 早期的二阶滑模控制以螺旋算法为代表, 该算法由Emel'yanov提出^[6]. 但螺旋算法的应用需要滑动变量及其导数的信息. 针对该问题, 在螺旋算法的基础之上, 文献[7]提出了超螺旋算法. 该算法的好处是不需要滑模变量的导数信息且控制律是连续的. 此外, 文献[7]还提出了漂移算法和给定变换律算法, 它们都能保证系统状态在有限时间内收敛到二阶滑模 $s = \dot{s} = 0$. 给定变换律算法与Man等所提出的终端滑模(terminal sliding mode^[8])控制方法很相近, 通过设计一个非线性滑动面使得系统状态在有限时间内收敛到平衡点, 从而实现二阶滑模控制. 次优(suboptimal)算法和准连续(quasi-continuous)算法也是应用非常广泛的二阶滑模控制方法. 次优算法首次在文献[9]中提出, 准连续算法由Levant在文献[10]中提出. 准连续算法除了原点外处处连续, 因而能明显削弱抖振问题. 此外, Lyapunov方法也被广泛应用于二阶滑模设计. 例如, 文献[11]基于Lyapunov方法给出了干扰由函数限定条件下的控制设计问题. 基于文献[11], 文献[12]考虑了非匹配干扰情况下的二阶滑模控制设计, 等等.

然而, 上述研究成果并没有考虑状态受限情况下的二阶滑模控制设计. 值得指出的是, 在实际工程中, 系统的状态受限总是存在的. 所谓状态受限, 顾名思义, 就是对系统的某些状态变量进行限制. 例如, 小型无人直升机轨迹跟踪^[13]、平面上的刚体移动机器人^[14]、电机转矩等, 这些系统的某些状态变量往往只能限制在一定的范围内. 这就需要在实际控制设计中考虑状态受限的影响, 使系统中的某些状态变量只能处在预先给定的区域内.

针对上述问题, 本文考虑了滑动变量受限情况下的二阶滑模控制设计问题. 第1步, 利用Lyapunov方法, 构造了一类二阶滑模控制器. 该二阶滑模控制器可使得滑动变量在有限时间内稳定到零. 第2步, 在第1步所提出的控制器的基础上, 考虑滑动变量受限情况, 分析得到了一个与控制参数相关的吸引域, 并证明了只要系统初始状态在该吸引域内则系统状态就不会逃离该吸引域. 最后, 通过倒立摆控制问题验证了该算法的有效性.

2 问题描述(Problem description)

考虑如下形式的单输入单输出非线性系统:

$$\dot{x} = f(t, x) + g(t, x)u, \quad s = s(t, x), \quad (1)$$

其中: $x \in \mathbb{R}^n$ 和 $u \in \mathbb{R}$ 分别为系统的状态和控制输入;

$f(t, x)$ 和 $g(t, x)$ 是光滑函数; $s \in \mathbb{R}$ 为系统输出, 可以看作是按要求设计的滑动变量.

本文中, 假设设计的滑动变量相对阶为2, 则滑动变量 s 满足

$$\ddot{s} = a(t, x) + b(t, x)u, \quad (2)$$

式中: u 是待设计的控制器, $a(t, x) = \ddot{s}|_{u=0}$, $b(t, x) = \frac{\partial \ddot{s}}{\partial u}$ 为不确定项, 且满足下面一般性假设:

假设 1 存在正常数 C, K_m 使得

$$|a(t, x)| \leq C, \quad b(t, x) \geq K_m > 0.$$

注 1 通过对 $s(t, x)$ 求二次导数可得

$$\begin{aligned} \ddot{s} = & \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial^2 s}{\partial t \partial x} f + \frac{\partial s}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial t} + \\ & \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} f^2 + \frac{\partial s}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} f + \\ & \left(\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} g f + \frac{\partial s}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} g \right) u. \end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned} a(t, x) = & \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial^2 s}{\partial t \partial x} f + \frac{\partial s}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} f^2 + \\ & \frac{\partial s}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} f, \quad b(t, x) = \\ & \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} g f + \frac{\partial s}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} g. \end{aligned}$$

本文有 $\ddot{s} = a(t, x) + b(t, x)u$. 当 $u = 0$ 时, $\ddot{s} = a(t, x)$. 另外, $\ddot{s}$ 对 u 求偏微分可得到 $\frac{\partial \ddot{s}}{\partial u} = b(t, x)$. 因此, 可知 $a(t, x) = \ddot{s}|_{u=0}$, $b(t, x) = \frac{\partial \ddot{s}}{\partial u}$.

注 2 一般来说, 传统的二阶滑模中需要假设滑模动力学中不确定满足^[6-7,10]

$$|a(t, x)| \leq C, \quad K_m \leq b(t, x) \leq K_M,$$

其中: C, K_m, K_M 为已知正常数. 由假设1可知, 文中不确定项 $b(t, x)$ 不需要上界信息. 因此, 该假设比已有文献中的一般性假设条件更弱.

本文的控制目标为: 在滑动变量满足受限条件 $|s| \leq \delta_1, |\dot{s}| \leq \delta_2, \forall \delta_1, \delta_2 > 0$ 时, 构造一类二阶滑模控制器 u , 并寻求该控制器下与控制参数相关的吸引域.

为方便描述, 定义 $|x|^\alpha = |x|^\alpha \operatorname{sgn} x, \forall \alpha > 0$.

下面将给出本文主定理证明过程中所需的引理.

引理 1^[15] 设 $p_1 > 0$ 和 $0 < p_2 \leq 1$, 则对任意的 $x, y \in \mathbb{R}$ 有

$$|[x]^{p_1 p_2} - [y]^{p_1 p_2}| \leq 2^{1-p_2} |[x]^{p_1} - [y]^{p_1}|^{p_2}.$$

引理 2^[16] 设 c 和 d 都是正常数, 则对任意的实数 $\gamma > 0$ 及 $\forall x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$, 有下列不等式成立:

$$|x|^c |y|^d \leq \frac{c}{c+d} \gamma |x|^{c+d} + \frac{d}{c+d} \gamma^{-\frac{c}{d}} |y|^{c+d}.$$

引理 3^[17] 对于任意的 $x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n$ 和

任意的正实数 $0 < p \leq 1$, 则有

$$(|x_1| + \cdots + |x_n|)^p \leq |x_1|^p + \cdots + |x_n|^p.$$

引理 4^[18] 针对系统

$$\dot{x} = f(x), f(0) = 0, x \in \mathbb{R}^n, \quad (3)$$

若存在一个正定可导函数 $V(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 满足以下不等式:

$$\dot{V}(x) + cV^\alpha(x) \leq 0, x \in U_0,$$

其中: $c > 0$, $\alpha \in (0, 1)$, U_0 是原点附近的一个开邻域. 则系统(3)是局部有限时间稳定的. 如果 $U_0 = \mathbb{R}^n$ 并且 V 是径向无界的, 则系统(3)是全局有限时间内稳定的.

注 3 一般来说, 二阶滑模控制设计有两个作用. 其一, 用以降低传统一阶滑模产生的抖振. 其二, 用以直接对非线性系统进行控制设计, 但所选择滑动变量的相对阶需要为 2. 事实上, 与传统的一阶滑模类似, 利用二阶滑模方法直接设计控制器时, 控制器一般也是非连续的, 因此也会产生抖振现象. 若要削弱该抖振, 则需要设计三阶滑模控制器.

3 主要结果(Main results)

令 $s_1 = s$, $s_2 = \dot{s}$, 则系统(2)可重写为

$$\dot{s}_1 = s_2, \dot{s}_2 = a(t, x) + b(t, x)u, \quad (4)$$

因此对系统(2)的控制设计等价于对系统(4)的控制设计. 针对系统(4), 控制器设计为

$$u = -\beta_2 \cdot \text{sgn}(|s_2|^2 + \beta_1^2 s_1), \quad (5)$$

其中 β_1, β_2 为足够大的常数且满足 $\beta_2 > \beta_1$.

为了方便系统的稳定性分析, 结合控制器(5), 重新构造具有如下形式的控制器:

$$u = -\beta_2 \cdot \text{sgn}(|s_2|^2 + \beta_1^2 \sigma(s_1)), \quad (6)$$

其中

$$\sigma(x) = \begin{cases} \varepsilon_1 \cdot \text{sgn } x, & |x| > \varepsilon_1, \\ x, & |x| \leq \varepsilon_1, \end{cases} \quad \forall \varepsilon_1 > 0.$$

显然, 当 $|x_1| \leq \varepsilon_1$ 时控制器(6)等价于控制器(5).

在给出主要结果之前, 本文先引入一个引理.

引理 5 针对系统(4), 在控制器(6)下, 若满足 $|s_2|^2 + \beta_1^2 \sigma(s_1) \leq \varepsilon_2$, $\varepsilon_2 > 0$, 则下列不等式成立:

$$\sup_{s_1 \in \mathbb{R}} \{|\dot{\sigma}(s_1)|\} \leq a_1(\beta_1, \varepsilon_1, \varepsilon_2), \quad (7)$$

其中 $a_1(\beta_1, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = \varepsilon_2^{\frac{1}{2}} + \beta_1 \varepsilon_1^{\frac{1}{2}}$.

证 为了简化证明, 令 $\phi_2(s_1, s_2) = |s_2|^2 + \beta_1^2 \sigma(s_1)$. 当 $|\phi_2(s_1, s_2)| \leq \varepsilon_2$ 时, 由引理3可得

$$|s_2| \leq (\varepsilon_2 + \beta_1^2 \varepsilon_1)^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon_2^{\frac{1}{2}} + \beta_1 \varepsilon_1^{\frac{1}{2}}. \quad (8)$$

当 $|s_1| > \varepsilon_1$, 有 $\sigma(s_1) = \varepsilon_1 \text{sgn } s_1$. 显然, 对 $\forall |s_1| > \varepsilon_1$,

$$\sup_{s_1 \in \mathbb{R}} \{|\dot{\sigma}(s_1)|\} = 0. \quad (9)$$

当 $|s_1| \leq \varepsilon_1$, 有 $\sigma(s_1) = s_1$, 进而有 $\sup_{s_1 \in \mathbb{R}} \{|\dot{\sigma}(s_1)|\} \leq |s_1| = |s_2|$. 因此, 根据式(8)可知, 对 $\forall |s_1| \leq \varepsilon_1$, 有

$$\begin{aligned} \sup_{s_1 \in \mathbb{R}} \{|\dot{\sigma}(s_1)|\} &\leq |s_2| \leq \\ &\varepsilon_2^{\frac{1}{2}} + \beta_1 \varepsilon_1^{\frac{1}{2}} = a_1(\beta_1, \varepsilon_1, \varepsilon_2), \end{aligned} \quad (10)$$

所以, 由式(9)和式(10)可知, 当 $|\phi_2(s_1, s_2)| \leq \varepsilon_2$ 时,

$$\sup_{s_1 \in \mathbb{R}} \{|\dot{\sigma}(s_1)|\} \leq a_1(\beta_1, \varepsilon_1, \varepsilon_2).$$

由此, 引理5证毕.

接下来, 本文将给出第1个结论.

定理 1 针对系统(1), 在假设1的条件下, 若二阶滑模控制器设计为式(6)的形式, 则滑动变量 $s, \dot{s}$ 在有限时间内稳定.

证 首先, 给出证明概要. 证明分成两个步骤:

第1步 本文将证明, 控制器(6)可以保证系统状态在有限时间内收敛并停留在区域

$$Q = \{(s_1, s_2) : |s_1| < \varepsilon_1, |s_2|^2 + \beta_1^2 \sigma(s_1) < \varepsilon_2\}.$$

第2步 继续证明在区域 Q 内, 系统状态将会在有限时间内稳定到零.

为了简化证明, 令 $S_2 = (s_1, s_2)$.

步骤 1 首先, 将证明存在有限时刻 t_1 , 使得当 $t \geq t_1$ 时, $S_2(t) \in \{S_2 : |s_2(t)|^2 + \beta_1^2 \sigma(s_1(t)) < \varepsilon_2\}$.

先利用反证法证明存在有限时刻 t_1 , 使得

$$|\phi_2(S_2(t_1))| = |s_2(t_1)|^2 + \beta_1^2 \sigma(s_1(t_1)) \leq \frac{\varepsilon_2}{2}.$$

假设上述命题不成立, 则对于 $\forall t \geq 0$, 都有

$$|\phi_2(S_2(t))| = |s_2(t)|^2 + \beta_1^2 \sigma(s_1(t)) > \frac{\varepsilon_2}{2}.$$

首先考虑对于 $\forall t \geq 0$, 都有

$$\phi_2(S_2(t)) = |s_2(t)|^2 + \beta_1^2 \sigma(s_1(t)) > \frac{\varepsilon_2}{2}. \quad (11)$$

由式(6)(11)和假设1可知, 对于 $\forall t \geq 0$,

$$\begin{aligned} \dot{s}_2 &= a(t, x) + b(t, x)[- \beta_2 \cdot \text{sgn}(\phi_2(S_2))] = \\ &a(t, x) - \beta_2 b(t, x) \leq \\ &-(\beta_2 K_m - C). \end{aligned} \quad (12)$$

由于 β_2 足够大, 所以存在 β_2 使得 $\beta_2 K_m - C > 0$.

因此, 对 $t \geq 0$ 有

$$s_2(t) < s_2(0) - (\beta_2 K_m - C)t. \quad (13)$$

利用式(11)和式(13)可知, 对于 $\forall t \geq 0$ 有

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon_2}{2} &< |s_2(t)|^2 + \beta_1^2 \sigma(s_1(t)) \leq \\ &|s_2(0) - (\beta_2 K_m - C)t|^2 + \beta_1^2 \varepsilon_1. \end{aligned} \quad (14)$$

观察上式, 注意到当 t 趋于无穷大时, 式(14)将退化为 $\varepsilon_2/2 < -\infty$, 这显然与 $\varepsilon_2/2 > 0$ 矛盾. 类似地, 可以证

明 $\phi_2(S_2(t)) = [s_2(t)]^2 + \beta_1^2 \sigma(s_1(t)) < -\varepsilon_2/2$, $\forall t \geq 0$ 情形也是不成立的. 因此存在有限时刻 t_1 使得

$$|\phi_2(S_2(t_1))| = |[s_2(t_1)]^2 + \beta_1^2 \sigma(s_1(t_1))| \leq \frac{\varepsilon_2}{2}.$$

下面证明当 $t \geq t_1$ 时,

$$|\phi_2(S_2(t))| < \varepsilon_2. \quad (15)$$

假设式(15)不成立, 那就意味着存在有限时刻 $t'_1 \in [t_1, +\infty)$ 和 $t_1^* \in (t'_1, +\infty)$ 使得

$$\phi_2(S_2(t'_1)) = \frac{\varepsilon_2}{2}, \quad (16)$$

$$\phi_2(S_2(t_1^*)) = \varepsilon_2, \quad (17)$$

$$\frac{\varepsilon_2}{2} \leq \phi_2(S_2(t)) \leq \varepsilon_2, \quad t \in [t'_1, t_1^*] \quad (18)$$

或

$$\phi_2(S_2(t'_1)) = -\frac{\varepsilon_2}{2}, \quad (19)$$

$$\phi_2(S_2(t_1^*)) = -\varepsilon_2, \quad (20)$$

$$-\varepsilon_2 \leq \phi_2(S_2(t)) \leq -\frac{\varepsilon_2}{2}, \quad t \in [t'_1, t_1^*] \quad (21)$$

成立.

接下来, 首先证明式(16)–(18)不成立. 由条件(18)可知, 式(12)在时间段 $[t'_1, t_1^*]$ 中也成立, 也即

$$\dot{s}_2(t) \leq -(\beta_2 K_m - C), \quad t \in [t'_1, t_1^*]. \quad (22)$$

由式(22)得

$$(\beta_2 K_m - C)(t_1^* - t'_1) \leq s_2(t'_1) - s_2(t_1^*). \quad (23)$$

利用式(16)和 $\phi_2(S_2(t)) = [s_2(t)]^2 + \beta_1^2 \sigma(s_1(t))$, 得

$$s_2(t'_1) \leq (\frac{\varepsilon_2}{2} + \beta_1^2 \varepsilon_1)^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon_2^{\frac{1}{2}} + \beta_1 \varepsilon_1^{\frac{1}{2}}. \quad (24)$$

类似地, 利用式(17), 得到

$$s_2(t_1^*) \geq -(\varepsilon_2^{\frac{1}{2}} + \beta_1 \varepsilon_1^{\frac{1}{2}}). \quad (25)$$

结合式(24)–(25), 由式(23)可知

$$t_1^* - t'_1 \leq \frac{s_2(t'_1) - s_2(t_1^*)}{\beta_2 K_m - C} \leq \frac{2(\varepsilon_2^{\frac{1}{2}} + \beta_1 \varepsilon_1^{\frac{1}{2}})}{\beta_2 K_m - C}. \quad (26)$$

更进一步地, 利用式(22), 有 $s_2(t_1^*) \leq s_2(t'_1)$. 因此,

$$\begin{aligned} & s_2^2(t_1^*) + \beta_1^2 \sigma(s_1(t_1^*)) \leq \\ & s_2^2(t'_1) + \beta_1^2 \sigma(s_1(t'_1)) - \\ & \beta_1^2 \sigma(s_1(t'_1)) + \beta_1^2 \sigma(s_1(t_1^*)). \end{aligned} \quad (27)$$

将式(16)–(17)代入式(27)中, 易知

$$\frac{\varepsilon_2}{2} \leq |\beta_1^2 \sigma(s_1(t_1^*)) - \beta_1^2 \sigma(s_1(t'_1))|. \quad (28)$$

因此, 利用引理5和式(28)可得

$$\begin{aligned} & \frac{\varepsilon_2}{2} \leq |\beta_1^2 \sigma(s_1(t_1^*)) - \beta_1^2 \sigma(s_1(t'_1))| \leq \\ & \beta_1^2 \sup_{s_1 \in R} \{|\dot{\sigma}(s_1)|\} (t_1^* - t'_1) \leq \\ & \beta_1^2 a_1(\beta_1, \varepsilon_1, \varepsilon_2) (t_1^* - t'_1). \end{aligned} \quad (29)$$

将式(26)代入式(29)中, 有

$$\frac{\varepsilon_2}{2} \leq \frac{2(\varepsilon_2^{\frac{1}{2}} + \beta_1 \varepsilon_1^{\frac{1}{2}})}{\beta_2 K_m - C} \beta_1^2 a_1(\beta_1, \varepsilon_1, \varepsilon_2). \quad (30)$$

很明显, 当 β_2 足够大时, 上式将导致矛盾. 因此式(16)–(18)并不成立. 类似地, 利用同样的方法可以证明式(19)–(21)也不成立. 因此, 对 $\forall t \geq t_1$, 有

$$|\phi_2(S_2(t))| = |[s_2(t)]^2 + \beta_1^2 \sigma(s_1(t))| < \varepsilon_2.$$

另一方面, 利用引理1, 对 $\forall t \geq t_1$ 有

$$\begin{aligned} & |s_2 + \beta_1 [\sigma(s_1)]^{\frac{1}{2}}| \leq \\ & 2^{\frac{1}{2}} |[s_2]^2 + \beta_1^2 \sigma(s_1)|^{\frac{1}{2}} \leq 2^{\frac{1}{2}} \varepsilon_2^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (31)$$

因此, 有

$$\dot{s}_1 = -\beta_1 [\sigma(s_1)]^{\frac{1}{2}} + (s_2 + \beta_1 [\sigma(s_1)]^{\frac{1}{2}}). \quad (32)$$

令 $\mu_1 = \beta_1 \varepsilon_1^{\frac{1}{2}} - 2^{\frac{1}{2}} \varepsilon_2^{\frac{1}{2}} > 0$, 并令 $\beta_1 > (2^{\frac{1}{2}} \varepsilon_2^{\frac{1}{2}}) / \varepsilon_1^{\frac{1}{2}}$, 可得对 $\forall t \geq t_1$,

$$s_1(t) > \varepsilon_1, \quad \dot{s}_1(t) \leq -\mu_1 < 0,$$

$$s_1(t) \leq -\varepsilon_1, \quad \dot{s}_1(t) \geq \mu_1 > 0.$$

因此存在一个时刻 t_1 , 使得当 $t \geq t_1$ 时, 有 $|s_1(t)| < \varepsilon_1$. 也即 $s_1(t) \in \{s_1 : |s_1(t)| < \varepsilon_1\}$, $t \geq t_1$. 所以, 当 $t \geq t_1$, $S_2(t)$ 将在有限时间内收敛并停留在区域

$$Q = \{S_2 : |s_1(t)| < \varepsilon_1, |[s_2(t)]^2 + \beta_1^2 \sigma(s_1(t))| < \varepsilon_2\}.$$

步骤2 当 $S_2 \in Q$ 时, 可知控制器(6)退化为控制器(5), 即 $u = -\beta_2 \cdot \text{sgn}([s_2]^2 + \beta_1^2 \cdot s_1)$.

取Lyapunov函数 $V(S_2) = V_1(s_1) + W_1(S_2)$, 其中

$$V_1(s_1) = \int_0^{s_1} |\mu|^{\frac{3}{2}} d\mu,$$

$$W_1(S_2) = \int_{s_2^*}^{s_2} [| \mu |^2 - [s_2^*]^2]^2 d\mu,$$

s_2^* 是待设计的虚拟控制器. 对 $V(S_2)$ 求导得

$$\dot{V}(S_2) = \dot{V}_1(s_1) + \frac{\partial W_1(S_2)}{\partial s_1} \dot{s}_1 + ([s_2]^2 - [s_2^*]^2)^2 \dot{s}_2. \quad (33)$$

易知

$$\dot{V}_1(s_1) = [s_1]^{\frac{3}{2}} \dot{s}_1 = [s_1]^{\frac{3}{2}} \dot{s}_2^* + [s_1]^{\frac{3}{2}} (s_2 - s_2^*). \quad (34)$$

设计虚拟控制器为

$$s_2^* = -\beta_1 [s_1]^{\frac{1}{2}}. \quad (35)$$

将式(35)代入式(34), 有

$$\dot{V}_1(s_1) \leq -\beta_1 s_1^2 + [s_1]^{\frac{3}{2}} (s_2 - s_2^*). \quad (36)$$

根据引理1和引理2可得

$$\begin{aligned} & [s_1]^{\frac{3}{2}} (s_2 - s_2^*) \leq \\ & [s_1]^{\frac{3}{2}} |[s_2]^{2 \times \frac{1}{2}} - [s_2^*]^{2 \times \frac{1}{2}}| \leq \end{aligned}$$

$$2^{\frac{1}{2}}|s_1|^{\frac{3}{2}}|\xi|^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\beta_1}{4}|s_1|^2 + c_1(\beta_1)|\xi|^2, \quad (37)$$

式中: $\xi = [s_2]^2 - [s_2^*]^2$, $c_1(\beta_1) = \frac{27}{\beta_1^3}$.

然后, 将式(37)代入式(36)得

$$\dot{V}_1(s_1) \leq -\frac{3}{4}\beta_1 s_1^2 + c_1(\beta_1)\xi^2. \quad (38)$$

然后, 又由引理1可得

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial W_1(S_2)}{\partial s_1} \dot{s}_1 \right| &\leq 2|\xi| \frac{\partial [s_2^*]^2}{\partial s_1} (s_2 - s_2^*) \dot{s}_1 \leq \\ &2^{\frac{3}{2}}|\xi|^{\frac{3}{2}} \left| \frac{\partial [s_2^*]^2}{\partial s_1} \right| |s_2|, \end{aligned} \quad (39)$$

又 $s_2^* = -\beta_1 [s_1]^{\frac{1}{2}}$, 所以

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial W_1(S_2)}{\partial s_1} \dot{s}_1 \right| &\leq 2^{\frac{3}{2}}|\xi|^{\frac{3}{2}}\beta_1^2|s_2| \leq \\ &2^{\frac{3}{2}}|\xi|^{\frac{3}{2}}\beta_1^2(|\xi|^{\frac{1}{2}} + \beta_1|s_1|^{\frac{1}{2}}) \leq \\ &2^{\frac{3}{2}}\beta_1^2\xi^2 + 2^{\frac{3}{2}}\beta_1^3|s_1|^{\frac{1}{2}}|\xi|^{\frac{3}{2}}. \end{aligned} \quad (40)$$

然后对式(40)运用引理2可得

$$\left| \frac{\partial W_1(S_2)}{\partial s_1} \dot{s}_1 \right| \leq \frac{2}{3}\beta_1 s_1^2 + c_2(\beta_1)\xi^2, \quad (41)$$

其中 $c_2(\beta_1) = 2\sqrt{2}\beta_1^2 + (3^{4/3}/2)\beta_1^{\frac{11}{3}}$. 将式(38)和式(41)代入式(33)可得

$$\begin{aligned} \dot{V}(S_2) &\leq -\frac{3}{4}\beta_1 s_1^2 + c_1(\beta_1)\xi^2 + \frac{2}{3}\beta_1 s_1^2 + \\ &c_2(\beta_1)\xi^2 + |\xi|^2 \dot{s}_2 \leq \\ &-\frac{\beta_1}{12} s_1^2 + (c_1(\beta_1) + c_2(\beta_1))\xi^2 + \\ &|\xi|^2(a(t, x) + b(t, x)u). \end{aligned} \quad (42)$$

进一步, 将式(5)代入上式, 再令 $\beta_2 \geq (c_1(\beta_1) + c_2(\beta_1) + \beta_1/12 + C)/K_m$ 可得

$$\dot{V}(S_2) \leq -\frac{\beta_1}{12}(s_1^2 + \xi^2). \quad (43)$$

接下来, 根据 $V(S_2)$ 的定义和引理1, 有

$$\begin{aligned} V(S_2) &\leq \int_0^{s_1} [\mu]^{\frac{3}{2}} d\mu + \int_{s_2^*}^{s_2} \left[[\mu]^2 - [s_2^*]^2 \right] d\mu \leq \\ &|s_1|^{\frac{5}{2}} + \xi^2 |s_2 - s_2^*| \leq \\ &|s_1|^{\frac{5}{2}} + |\xi|^{\frac{5}{2}} 2^{\frac{1}{2}} \leq \\ &2(|s_1|^{\frac{5}{2}} + |\xi|^{\frac{5}{2}}). \end{aligned} \quad (44)$$

令 $c = \beta_1/(12 \times 2^{\frac{4}{5}})$, $\alpha = 4/5$, 可以得到 $\dot{V}(S_2) + cV^\alpha(S_2) \leq 0$, 注意到 $0 < \alpha < 1$, 根据引理4可知, 二阶滑模控制系统(4)和(6)是有限时间内稳定的.

证毕.

最后, 结合定理1, 有如下结果:

定理2 针对系统(4), 当滑动变量满足受限条件 $|s_i| \leq \delta_i (i = 1, 2)$ 时, 在控制器(5)的作用下存在如下吸引域:

$$\begin{aligned} \Omega = \{ &(s_1, s_2) : |[s_2]^2 + \beta_1^2 \cdot s_1| < \varepsilon_2 \} \cap \\ &\{(s_1, s_2) : |s_1| < \varepsilon_1\}, \end{aligned}$$

其中: $\varepsilon_1 = \delta_1$, $\varepsilon_2 = \beta_1^2 \delta_1$.

证 注意到在区域 Ω 内, 有 $|s_1| \leq \varepsilon_1$. 因此, 对于 $\forall S_2 \in \Omega$, 控制器(6)等价于控制器(5). 因此, 在状态受限 $|s_i| \leq \delta_i (i = 1, 2)$ 条件下, 要证明区域 Ω 为控制器(5)作用下的吸引域, 等价于证明区域 Ω 为控制器(6)作用下的吸引域. 也即证明, 当初始状态在区域 Ω 时, 控制器(6)作用下的系统状态仍然停留在区域 Ω , 且会进一步收敛到平衡点.

由定理1可知, 若滑动变量一直停留在区域 Ω , 则最终会收敛到平衡点. 因此, 只需要证明滑动变量不会逃离区域 Ω 即可, 也即证明滑动变量 (s_1, s_2) 不会穿过边界曲线 $AB, BC, CD, DE, EF, FG, GH$ 和 HA (如图1所示).

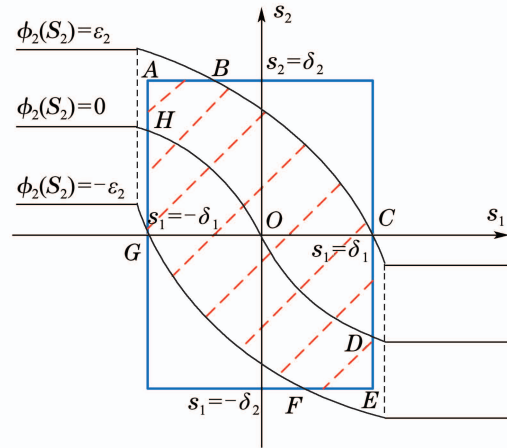


图1 $s_1 - s_2$ 相平面图

Fig. 1 The phase plot of $s_1 - s_2$

首先, 由定理1证明中的步骤1可知, 在控制器(6)的作用下, 滑动变量不会从边界曲线 $BC \cup FG$ 逃离.

其次, 当 $(s_1, s_2) \in HA \cup AB$ 时, 易知

$$\begin{aligned} \dot{s}_1 &= s_2 > 0, \\ \dot{s}_2 &= a(t, x) - \beta_2 \cdot \text{sgn}(\phi_2(S_2)) \cdot b(t, x) \leq \\ &-(\beta_2 K_m - C) < 0. \end{aligned}$$

因此, 滑动变量的轨迹将向右下方移动, 故不会从边界 $HA \cup AB$ 逃离区域 Ω . 另一方面, 当 $(s_1, s_2) \in DE \cup EF$ 时, 可知

$$\begin{aligned} \dot{s}_1 &= s_2 < 0, \\ \dot{s}_2 &= a(t, x) - \beta_2 \cdot \text{sgn}(\phi_2(S_2)) \cdot b(t, x) \geq \\ &\beta_2 K_m - C > 0. \end{aligned}$$

因此, 滑动变量的轨迹将向左上方移动, 所以也不会从边界 $DE \cup EF$ 逃离区域 Ω . 也即滑动变量不会从边界曲线 $HA \cup AB \cup DE \cup EF$ 逃离.

然后, 当 $(s_1, s_2) \in CD$ 时, 易知

$$\begin{aligned}\dot{s}_1 &= s_2 < 0, \\ \dot{s}_2 &= a(t, x) - \beta_2 \cdot \text{sgn}(\phi_2(S_2)) \cdot b(t, x) \leq \\ &\quad -(\beta_2 K_m - C) < 0.\end{aligned}$$

因此, 滑动变量的轨迹将向左下方移动, 故不会从边界 CD 逃离区域 Ω . 另一方面, 当 $(s_1, s_2) \in GH$ 时, 可知

$$\begin{aligned}\dot{s}_1 &= s_2 > 0, \\ \dot{s}_2 &= a(t, x) - \beta_2 \cdot \text{sgn}(\phi_2(S_2)) \cdot b(t, x) \geq \\ &\quad \beta_2 K_m - C > 0.\end{aligned}$$

因此, 滑动变量的轨迹将向右上方移动, 所以也不会从边界 GH 逃离区域 Ω . 也即滑动变量不会从边界曲线 $CD \cup GH$ 逃离.

故可以证明滑动变量的轨迹将不会从边界

$HA \cup AB \cup BC \cup CD \cup DE \cup EF \cup FG \cup GH$ 逃离区域 Ω . 因而, 滑动变量的轨迹将不会从区域 Ω 的边界逃离. 证毕.

注 4 由于二阶滑模控制器构造以反步设计为主要思想, 因此控制器参数 β_1 和 β_2 的选择较为保守. 事实上, 控制器(5)的参数 β_1 和 β_2 可以选取一些较小的参数. 此处, 参数 β_1 和 β_2 的选取主要以试错法获取.

4 状态受限情况下的倒立摆控制设计 (Inverted pendulum control design under state constraints)

为了验证本文提出的二阶滑模控制算法的有效性, 针对状态受限情况下的倒立摆系统进行了控制设计. 倒立摆的控制问题就是使摆杆尽快达到平衡位置, 且能够克服外部扰动而保持一定的鲁棒性.

二阶倒立摆系统一般可由如下形式的数学模型描述^[19]:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{J}u - \frac{MgL}{2J} \sin x_1 - \frac{V_s}{J}x_2 + \rho, \end{cases} \quad (45)$$

其中: x_1 和 x_2 分别为摆角和摆速, g 是重力加速度, M 是摆杆质量, L 为摆长, $J = ML^2$ 为单摆的转动惯量, V_s 是粘滞摩擦系数, ρ 为外部扰动, u 是使摆角到达期望位置所需的力矩, 由安装在倒立摆上的直流电机产生.

控制目标: 在摆角、摆速满足限制条件 $|x_1| \leq \pi/4$ rad, $|x_2| \leq 1.3$ rad/s 下, 设计有效的控制器 u 使得倒立摆快速到达平衡状态.

令 $s_1 = x_1$, $s_2 = \dot{x}_1$, 则有

$$\begin{aligned}\dot{s}_1 &= s_2, \\ \dot{s}_2 &= \frac{1}{J}u - \frac{MgL}{2J} \sin s_1 - \frac{V_s}{J}s_2 + \rho.\end{aligned}$$

根据定理2, 选取 $\varepsilon_1 = \pi/4$, $\varepsilon_2 = 0.95$. 另外, 取 $\beta_1 = 1.1$, $\beta_2 = 3.7$. 再根据定理1, 控制器可以设计为

$$u = -3.7 \cdot \text{sgn}(|s_2|^2 + 1.21s_1). \quad (46)$$

系统参数为

$$g = 9.8 \text{ m/s}^2, V_s = 0.18, M = 1.1 \text{ kg}, L = 1 \text{ m}.$$

初始状态设为 $(x_1(0), x_2(0)) = (-\pi/6, 1.1)$, 外部干扰取为 $\rho = 0.5 \sin(2t) + 0.5 \cos(5t)$.

在控制器(46)的作用下, 初始条件 $(x_1(0), x_2(0)) = (-\pi/6, 1.1)$ 下的仿真结果如图2-3所示. 图2是系统状态 x_1 的响应曲线, 图3是系统状态 x_2 的响应曲线. 由图2和图3可知, 该控制器可以使得倒立摆快速到达平衡状态.

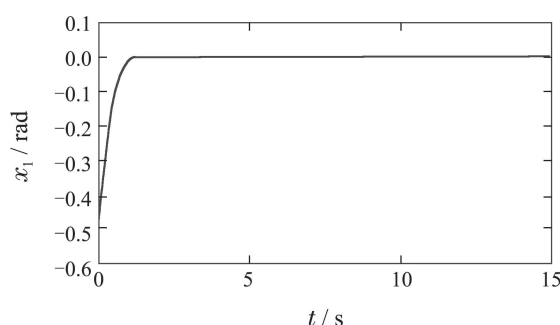


图2 控制器(46)作用下系统状态 x_1 的响应曲线
Fig. 2 Response curves of the system states x_1 under controller (46)

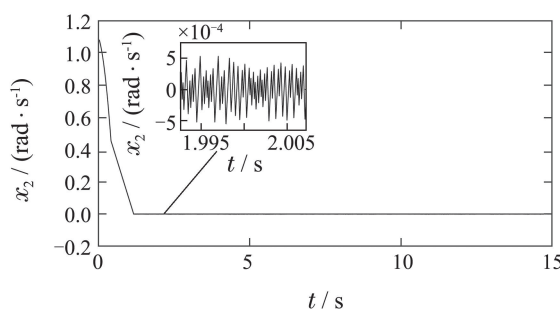


图3 控制器(46)作用下系统状态 x_2 的响应曲线
Fig. 3 Response curves of the system state x_2 under controller (46)

为了进一步说明定理2的有效性, 取另14组初始状态. 它们分别为

$$\begin{aligned}&(0.75, -0.1), (0.4, -1.1), (-0.5, -0.3), \\ &(-0.2, -0.6), (0.5, 0.3), (-0.7, 0.07), \\ &(-0.7, 1), (0.75, -1.2), (-0.2, 1), \\ &(0.2, -1), (-0.75, 1.2), (0.2, 0.63), \\ &(0.77, 1), (-0.77, -1).\end{aligned}$$

图4为该14组初始状态下滑动变量 s 和 $\dot{s}$ 的相平面图. 图4中虚线矩形框所围成的区域为滑动变量 $|s_1| \leq \pi/4$, $|s_2| \leq 1.3$ 所形成的状态受限区域, 区域 Ω

为吸引域. 很明显, $(0.77, 1)$, $(-0.77, -1)$ 是吸引域 Ω 之外的状态初始点. 从图4可以看出, 当状态初始点处于吸引域 Ω 之外时, 系统状态就有可能突破状态受限区域; 而当系统初始状态在吸引域 Ω 内时, 系统状态一定不会逃离区域 Ω .

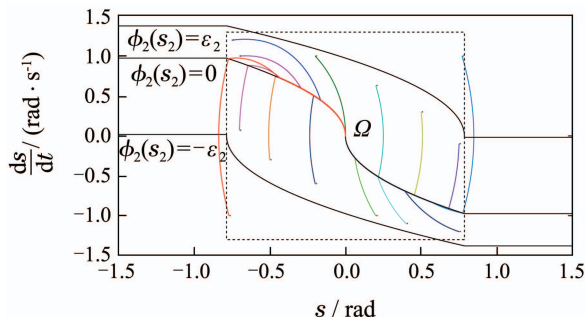


图4 滑动变量 s 和 $\dot{s}$ 的相平面图

Fig. 4 The phase plot of the sliding variables s and $\dot{s}$

5 结论(Conclusions)

本文提出了一种滑动变量受限情况下的二阶滑模控制设计问题. 首先, 在不考虑滑动变量受约束的情况下, 基于Lyapunov方法, 给出了一类二阶滑模控制器设计方法, 并严格证明了在该控制器的作用下滑动变量将在有限时间内稳定到平衡点. 其次, 考虑滑动变量受限情况, 在已提出的一类二阶滑模控制器的基础上证明了在受限区域内存在一个与控制参数相关的吸引域, 使得当初始状态在该吸引域内时其状态不会逃离该吸引域. 最后, 通过状态受限情况下的倒立摆控制验证了该算法的有效性. 关于下一步的工作, 拟考虑将本文中的二阶情况推广到高阶情形.

参考文献(References):

- [1] LIU Jinkun. *Sliding Mode Control Design and MATLAB Simulation* [M]. 2nd Edition. Beijing: Tsinghua University Press, 2012. (刘金琨. 滑模变结构控制MATLAB仿真 [M]. 第2版. 北京: 清华大学出版社, 2012.)
- [2] LIU Jinkun, SUN Fuchun. Research and development on theory and algorithm of sliding mode control [J]. *Control Theory & Applications*, 2007, 24(3): 407 – 418. (刘金琨, 孙福春. 滑模变结构控制理论及其算法研究与进展 [J]. 控制理论与应用, 2007, 24(3): 407 – 418.)
- [3] SLOTINE J J, SASTRY S S. Tracking control of nonlinear systems using sliding surfaces with application to robot manipulator [J]. *International Journal of Control*, 1983, 38(2): 465 – 492.
- [4] JOE H, KIM M, YU S C. Second-order sliding-mode controller for autonomous underwater vehicle in the presence of unknown disturbances [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2014, 78(1): 183 – 196.
- [5] LI X J, YU X H, HAN Q L. Stability analysis of second order sliding mode control systems with input-delay using Poincare map [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, 58(9): 2410 – 2415.
- [6] EMELYANOV S V, KOROVIN S K, LEVANTOVSKY L V. Higher order sliding modes in the binary control systems [J]. *Soviet Physics Doklady*, 1986, 31(4): 291 – 293.
- [7] LEVANT A. Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control [J]. *International Journal of Control*, 1993, 58(6): 1247 – 1263.
- [8] MAN Z, PAPLINSKI A P, WU H. A robust MIMO terminal sliding mode control for rigid robotic manipulators [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1994, 39(12): 2464 – 2468.
- [9] BARTOLINI G, FERRARA A, USAI E. Output tracking control of uncertain nonlinear second-order systems [J]. *Automatica*, 1997, 33(12): 2203 – 2212.
- [10] LEVANT A. Quasi-continuous high-order sliding-mode controllers [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, 50(11): 1812 – 1816.
- [11] DING S H, LEVANT A, LI S H. Simple homogeneous sliding-mode controller [J]. *Automatica*, 2016, 67(5): 22 – 32.
- [12] DING S H, LI S H. Second-order sliding mode controller design subject to mismatched term [J]. *Automatica*, 2017, 77(3): 388 – 392.
- [13] ZHOU Hongbo, PEI Hailong, HE Yuebang, et al. Trajectory-tracking control for small unmanned helicopter with state constraints [J]. *Control Theory & Applications*, 2012, 29(6): 778 – 784. (周洪波, 裴海龙, 贺跃帮, 等. 状态受限的小型无人直升机轨迹跟踪控制 [J]. 控制理论与应用, 2012, 29(6): 778 – 784.)
- [14] WANG Chaoli, TAN Dalong, WANG Yuechao. Practical stabilization of nonholonomic chained form systems with state constraints [J]. *Control Theory & Applications*, 2002, 19(2): 271 – 274. (王朝立, 谈大龙, 王越超. 状态受限的非完整链式系统的实际镇定 [J]. 控制理论与应用, 2002, 19(2): 271 – 274.)
- [15] DING S H, LI S H, ZHENG W X. Nonsmooth stabilization of a class of nonlinear cascaded systems [J]. *Automatica*, 2012, 48(10): 2597 – 2606.
- [16] QIAN C J, LIN W. A continuous feedback approach to global strong stabilization of nonlinear systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2001, 46(7): 1061 – 1079.
- [17] HARDY G H, LITTLEWOOD J E, POLYA G. *Inequalities* [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1952.
- [18] BHAT S P, BERNSTEIN D S. Finite-time stability of continuous autonomous systems [J]. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2000, 38(3): 751 – 766.
- [19] MORENO J A, OSORIO M. A Lyapunov approach to second-order sliding mode controllers and observers [C] // *Proceedings of the 47th IEEE Conference on Decision and Control*. Cancun: IEEE, 2008: 2856 – 2861.

作者简介:

梅珂琪 (1993–), 男, 硕士研究生, 主要研究方向为滑模变结构控制理论, E-mail: mkqujs@163.com;

马莉 (1982–), 女, 博士, 副教授, 主要研究方向为随机系统、滑模控制, E-mail: mali@ujs.edu.cn;

丁世宏 (1983–), 男, 博士, 教授, 主要研究方向为非线性系统、高阶滑模控制、电动汽车动力学与控制, E-mail: dsh@ujs.edu.cn;

刘陆 (1991–), 男, 博士研究生, 主要研究方向为滑模控制理论, E-mail: liulu.2016@hotmail.com.