第 35 卷第 7 期
2018 年 7 月

控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications

Vol. 35 No. 7
Jul. 2018

DOI: 10.7641/CTA.2017.70328

线性广义系统的区间观测器设计

王振华[1], 沈　毅[1†], 郭胜辉[2]

(1. 哈尔滨工业大学 航天学院, 黑龙江 哈尔滨 150001; 2. 苏州科技大学 电子与信息工程学院, 苏州 江苏 215009)

摘要: 本文研究了连续时间线性广义系统的区间观测器设计问题. 首先根据正系统的稳定性判据提出了一种基于线性矩阵不等式的广义区间观测器直接设计法, 然后通过引入更多的设计自由度进一步放宽了区间观测器的设计条件, 扩大了设计方法的适用范围. 所提出的设计方法无需坐标变换, 是一种直接设计方法. 最后, 通过两个仿真算例验证了所提出方法的有效性.

关键词: 广义系统; 区间观测器; 直接设计法; 线性系统

引用格式: 王振华, 沈毅, 郭胜辉. 线性广义系统的区间观测器设计. 控制理论与应用, 2018, 35(7): 956 – 962

中图分类号: TP273　　**文献标识码**: A

Interval observer design for linear descriptor systems

WANG Zhen-hua[1], SHEN Yi[1†], GUO Sheng-hui[2]

(1. School of Astronautics, Harbin Institute of Technology, Harbin Heilongjiang 150001, China;
2. College of Electronics and Information Engineering, Suzhou University of Science and Technology, Suzhou Jiangsu 215009)

Abstract: This paper studies observer design for continuous-time linear descriptor systems. Based on the stability of positive system, a linear matrix inequality based direct design method of interval observer is proposed for descriptor systems. The proposed method is further improved by introducing more degrees of design freedom to obtain relaxed design conditions and a broader application scope of the interval observer. The proposed method is independent of coordinate transformation and is a direct design approach. Finally, two numerical examples are simulated to verify the effectiveness of the proposed method.

Key words: descriptor systems; interval observer; direct design method; linear systems

Citation: WANG Zhenhua, SHEN Yi, GUO Shenghui. Interval observer design for linear descriptor systems. *Control Theory & Applications*, 2018, 35(7): 956 – 962

1　引言(Introduction)

区间观测器是指可以给出一个给定系统在任意时刻的状态上下边界估计值的一类观测器. Gouzé等人首先提出了区间观测器, 并且给出了一种基于线性规划的区间观测器设计方法[1]. 区间观测器是一种具有良好实际意义的估计方法, 已在生物技术和故障检测等方面得到了一定的应用[1–4].

近年来, 区间观测器设计问题引起了越来越多的学者的重视, 文献中出现了多种区间观测器设计方法[5–10]. 其中, 构造协同误差是区间观测器设计最常用的方法. 对于连续时间系统, 这种方法的主要任务是设计一个观测器增益使得区间观测器所对应的误差方程的状态矩阵既是Hurwitz的又是Metzler的(其非对角线元素均为非负). 这样就保证了误差系统是一个稳定的正系统. 但是, 求解满足上述条件的观测器增益通常不太容易. 针对这一问题, 一些文献提出了通过引入坐标变换来放松协同条件的限制的设计方法[10]. 虽然这种基于坐标变换的方法能够简化设计条件, 但是在利用坐标反变换重构状态区间估计的过程中可能会造成区间放大而得到过于保守的估计结果. 也有文献提出了采用非平滑优化技术设计区间观测器的方法[11–12], 其基本思想是将矩阵需要满足的约束条件转化为若干系统的同时镇定问题, 然后用非平滑优化算法加以求解, 但是这种设计方法存在很大的保守性——在区间观测器设计中, 需要构造Metzler矩阵, 该矩阵所有非对角线元素都是非负的, 但是文献[11–12]中的方法只能用于构造所有非对角线元素都为正的矩阵. 最近, 文献[13]提出了一种直接构造

收稿日期: 2017–05–16; 录用日期: 2017–12–12.
†通信作者. E-mail: yishen_hit@126.com; Tel.: +86 451-86413411-8602.
本文责任编委: 张焕水.
国家自然科学基金项目(61773145, 61703296), 中央高校基本科研业务费专项资金(HIT.KLOF.2015.076)资助.
Supported by the National Natural Science Foundation of China (61773145, 61703296) and the Fundamental Research Funds for the Central Universities (HIT.KLOF.2015.076).

Hurwitz Metzler 矩阵的区间观测器设计方法. 通过将区间观测器设计转化为线性矩阵不等式, 得到了一种简单有效的区间观测器设计方法.

目前, 对于区间观测器设计的研究主要集中在状态空间系统方面, 但是关于广义系统区间观测器设计的研究结果并不丰富. 广义系统不仅具有微分方程所描述的动态特性, 而且具有代数方程所表征的静态约束, 比常见的状态空间系统更具有普遍性, 已经在多个工程领域的建模与设计中得到了应用[14–16]. 虽然已有一些学者针对广义系统的区间观测器设计开展了一些工作[17–18], 但都是基于状态变换的设计方法. 据作者的了解, 目前文献中还没有出现广义系统区间观测器直接设计的相关研究. 因此, 本文将文献[13]中的设计思想推广到广义系统, 提出了一种新的广义系统区间观测器设计方法.

2　问题描述(Problem formulation)

考虑如下形式的线性广义系统:

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + w(t), \\ y(t) = Cx(t), \end{cases} \tag{1}$$

其中: $x(t) \in \mathbb{R}^n$为状态向量, $u(t) \in \mathbb{R}^p$是输入向量, $y(t) \in \mathbb{R}^m$是输出向量, $w(t) \in \mathbb{R}^n$是未知扰动向量; E, A, B, C是具有适当维数的常值矩阵, 其中E可能为奇异矩阵, 即$\mathrm{rank}E = r \leqslant n$. 不失一般性, 假设系统初始状态满足$x^-(0) \leqslant x(0) \leqslant x^+(0)$, 干扰$w(t)$满足$w^-(t) \leqslant w(t) \leqslant w^+(t)$, 其中$x^+(0)$, $x^-(0)$和$w^+(t)$, $w^-(t)$均为已知. 另外, 假设系统(1)满足如下条件:

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix} = n. \tag{2}$$

区间观测器设计问题是指针对系统(1), 构造两个动态系统, 分别给出状态$x(t)$的上下边界估计$\hat{x}^+(t)$和$\hat{x}^-(t)$, 对于任何$t \geqslant 0$, 都满足

$$x^-(t) \leqslant x(t) \leqslant x^+(t).$$

这两个动态系统分别称为系统(1)的上、下界观测器, 它们共同称为系统(1)的区间观测器.

在区间观测器设计中, 笔者希望构成区间观测器的动态系统具有保号特性, 这就要求它们所对应的误差动态是一个正系统(positive system). 与正系统相关的一个重要概念是Metzler矩阵. 下面先给出Metzler矩阵的定义, 然后介绍判断一个系统是否为正系统的条件.

定义 1　如果矩阵A的非对角元素都是非负的, 则称A是Metzler矩阵.

引理 1[19]　如果矩阵A是Metzler的, 则

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + w(t),\ x(0) = x_0 \tag{3}$$

是一个正系统, 即对于所有的$x_0 \geqslant 0$和$w(t) \geqslant 0$, 都有$x(t) \geqslant 0$成立.

注 1　在本文中, $A \geqslant B$表示A中的每个元素都不小于B中对应的元素, 而用$A \succ 0$ ($A \prec 0$)表示矩阵A是正定(负定)的.

与传统观测器设计一样, 区间观测器所对应的误差系统也应该是渐近稳定的. 下面的引理给出了一个正系统的渐近稳定性条件.

引理 2[19]　设系统(3)是一个正系统, 则(3)渐近稳定的充分必要条件是存在一个对角矩阵P满足

$$P \succ 0, \tag{4}$$

$$A^{\mathrm{T}}P + PA \prec 0. \tag{5}$$

在区间观测器设计中, 还会用到如下引理:

引理 3[20]　对于一个满足

$$x^-(t) \leqslant x(t) \leqslant x^+(t)$$

的向量$x(t)$和一个常值矩阵A, 如下不等式成立:

$$\begin{aligned} &A^+x^-(t) - A^-x^+(t) \leqslant \\ &Ax(t) \leqslant A^+x^+(t) - A^-x^-(t), \end{aligned} \tag{6}$$

其中

$$A^+ = \max\{0, A\},\ A^- = A^+ - A. \tag{7}$$

3　区间观测器设计(Interval observer design)

对于系统(1), 构造如下形式的观测器:

$$\begin{cases} \dot{z}^+(t) = TA\hat{x}^+(t) + TBu(t) + T^+w^+(t) - \\ \qquad T^-w^-(t) + L(y(t) - C\hat{x}^+(t)), \\ \hat{x}^+(t) = z^+(t) + Ny(t), \\ \dot{z}^-(t) = TA\hat{x}^-(t) + TBu(t) + T^+w^-(t) - \\ \qquad T^-w^+(t) + L(y(t) - C\hat{x}^-(t)), \\ \hat{x}^-(t) = z^-(t) + Ny(t), \end{cases} \tag{8}$$

其中: $z^+(t) \in \mathbb{R}^n$和$z^-(t) \in \mathbb{R}^n$是区间观测器中的中间变量, $\hat{x}^+(t) \in \mathbb{R}^n$和$\hat{x}^-(t) \in \mathbb{R}^n$分别是状态上、下边界的估计, $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $N \in \mathbb{R}^{n\times m}$和$L \in \mathbb{R}^{n\times m}$是待设计的参数矩阵. 其中, 矩阵$T$和$N$需满足如下的等式约束:

$$TE + NC = I_n, \tag{9}$$

其中I_n表示$n \times n$维单位矩阵.

定义如下误差向量:

$$e_1(t) = \hat{x}^+(t) - x(t), \tag{10}$$

$$e_2(t) = x(t) - \hat{x}^-(t). \tag{11}$$

由式(1)(8)–(9)可以得到如下的误差方程:

$$\begin{cases}\dot{e}_1(t)=(TA-LC)e_1(t)+\varDelta_1(t),\\ \dot{e}_2(t)=(TA-LC)e_2(t)+\varDelta_2(t),\end{cases} \tag{12}$$

其中:

$$\varDelta_1(t)=T^+w^+(t)-T^-w^-(t)-Tw(t), \tag{13}$$

$$\varDelta_2(t)=Tw(t)-(T^+w^-(t)-T^-w^+(t)). \tag{14}$$

注 2 根据文献[21], 秩条件(2)保证了式(9)的可解性. 由文献[22–23]可知, 满足式(9)的矩阵T和N可由下式确定:

$$\begin{cases}T=\varTheta^\dagger\alpha_1+S(I_{n+m}-\varTheta\varTheta^\dagger)\alpha_1,\\ N=\varTheta^\dagger\alpha_2+S(I_{n+m}-\varTheta\varTheta^\dagger)\alpha_2,\end{cases} \tag{15}$$

其中$S\in\mathbb{R}^{n\times(n+m)}$是可以任意选取的矩阵, 矩阵$\varTheta$, α_1, α_2为

$$\varTheta=\begin{bmatrix}E\\ C\end{bmatrix},\ \alpha_1=\begin{bmatrix}I_n & 0\end{bmatrix},\ \alpha_2=\begin{bmatrix}0 & I_m\end{bmatrix}.$$

得到满足式(9)的T和N之后, 即可得到形式为式(12)的误差系统. 根据误差系统(12), 提出如下定理, 用于设计区间观测器(8).

定理 1 如果矩阵T和N满足式(9), 并且存在对角矩阵$P\in\mathbb{R}^{n\times n}$和矩阵$W\in\mathbb{R}^{m\times n}$使得如下线性矩阵不等式成立:

$$Q_{ij}\geqslant 0,\ \forall i\neq j,\ i,j=1,\cdots,n, \tag{16}$$

$$P\succ 0, \tag{17}$$

$$(TA)^{\mathrm T}P+PTA-WC-C^{\mathrm T}W^{\mathrm T}\prec 0, \tag{18}$$

其中$Q=PTA-WC$, Q_{ij}是矩阵Q第i行第j列处的元素, 则式(8)是系统(1)的一个区间观测器, 且其矩阵L可由$L=P^{-1}W$确定.

证 首先, 根据引理3可得

$$T^+w^-(t)-T^-w^+(t)\leqslant \\ Tw(t)\leqslant T^+w^+(t)-T^-w^-(t), \tag{19}$$

由此可得

$$\varDelta_1(t)\geqslant 0,\ \varDelta_2(t)\geqslant 0. \tag{20}$$

如果T和N满足式(9), 则式(8)可以得到式(12)所示的误差系统. 对误差系统(12)应用引理1可知: 如果能够找到一个矩阵L使得$TA-LC$是Metzler的, 则误差系统(12)是正系统, 即

$$e_1(t)\geqslant 0,\ e_2(t)\geqslant 0. \tag{21}$$

由$e_1(t)$和$e_2(t)$的定义可知

$$\hat{x}^+(t)-x(t)\geqslant 0,\ x(t)-\hat{x}^-(t)\geqslant 0, \tag{22}$$

表明$\hat{x}^+(t)$和$\hat{x}^-(t)$分别给出了$x(t)$的一个上、下边界的估计. 但是对于区间观测器来说, 不仅要求$TA-LC$是Metzler的, 还要求它是Hurwitz的. 所以, 接下来证明不等式(16)–(18)给出了存在一个矩阵L使得$TA-LC$既是Metzler又是Hurwitz的一个充分条件.

根据定义1, 不等式(16)成立意味着Q是Metzler矩阵. 另外, $P\succ 0$表明对角矩阵P是可逆的并且其逆矩阵P^{-1}也是对角元素都为正数的矩阵. 易知$P^{-1}Q$与Q的元素具有相同的符号. 因此, $P^{-1}Q$也是Metzler矩阵. 将$L=P^{-1}W$代入Q矩阵的定义可得$TA-LC$是一个Metzler矩阵. 此时, 误差系统(12)包含两个正系统.

将$L=P^{-1}W$代入式(18)可得

$$(TA)^{\mathrm T}P+PTA-PLC-C^{\mathrm T}L^{\mathrm T}P\prec 0, \tag{23}$$

即

$$(TA-LC)^{\mathrm T}P+P(TA-LC)\prec 0. \tag{24}$$

对误差系统(12)应用引理2可知: 如果式(24)成立, 则式(12)是渐近稳定的正系统, 说明式(8)是系统(1)的一个区间观测器. 证毕.

注 3 需要说明的是, 由于不等式(16)中存在大于等于零的约束, 所以式(16)–(18)需要用半定规划(semidefinite programming, SDP)方法进行求解, 在这方面已经有若干可以利用的工具箱, 如YALMIP[24].

定理1中给出了一种先求解矩阵T和N, 然后设计矩阵L的方法. 但是, 事先确定的矩阵T和N会在一定程度上限制(16)–(18)解的存在性. 对于有些系统, 设计者所选取的S矩阵可能会使得不等式(16)–(18)无解, 从而导致定理1中的设计方法失效. 针对这一问题, 下面的定理给出了一种联合求解S和L的设计方法, 通过引入更多的设计参数来放宽区间观测器的设计条件、扩大适用范围.

定理 2 如果存在对角矩阵$P\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 矩阵$W\in\mathbb{R}^{m\times n}$和矩阵$Y\in\mathbb{R}^{m\times(n+m)}$使得如下线性矩阵不等式成立:

$$\tilde{Q}_{ij}\geqslant 0,\ \forall i\neq j,\ i,j=1,\cdots,n, \tag{25}$$

$$P\succ 0, \tag{26}$$

$$\tilde{Q}+\tilde{Q}^{\mathrm T}\prec 0, \tag{27}$$

其中

$$\tilde{Q}=P\varTheta^\dagger\alpha_1A+Y(I_{n+m}-\varTheta\varTheta^\dagger)\alpha_1A-WC, \tag{28}$$

则式(8)是系统(1)的一个区间观测器, 其参数矩阵可以取为

$$T=\varTheta^\dagger\alpha_1+P^{-1}Y(I_{n+m}-\varTheta\varTheta^\dagger)\alpha_1, \tag{29}$$

$$N=\varTheta^\dagger\alpha_2+P^{-1}Y(I_{n+m}-\varTheta\varTheta^\dagger)\alpha_2, \tag{30}$$

$$L=P^{-1}W. \tag{31}$$

证 由定理1的证明过程可知: 如果能够设计T和L使得$TA-LC$既是Metzler的又是Hurwitz的, 则式(8)是系统(1)的一个区间观测器. 定理1中已经证明了

$TA-LC$既是Metzler又是Hurwitz的一个充分条件是存在矩阵T和L使得下列不等式成立:

$$Q_{ij}\geqslant 0,\ \forall i\neq j,\ i,j=1,\cdots,n, \tag{32}$$

$$P\succ 0, \tag{33}$$

$$(TA-LC)^{\mathrm{T}}P+P(TA-LC)\prec 0, \tag{34}$$

其中$Q=TA-LC$.

由式(15)可知满足式(9)的T的通解为

$$T=\Theta^{\dagger}\alpha_1+S(I_{n+m}-\Theta\Theta^{\dagger})\alpha_1. \tag{35}$$

将式(35)代入到式(34)并令$W=PL, Y=PS$即可得到不等式(25)–(27).　　证毕.

注 4　本文所提出的观测器结构源于文献[21], 但是, 与文献[21]中所研究的状态观测器设计相比, 本文研究的区间观测器设计更有难度. 另外, 文献[21]中的方法是先确定T和N再求解L的两步法, 没有充分利用T和N中的设计自由度, 而本文在定理2中提出了一种联合求解T和L的设计方法. 从设计方法上来看, 本文的方法也优于文献[21]中的设计方法.

4　仿真结果(Simulation results)

本节通过两个仿真算例说明所提出方法的有效性.

首先用图1所示的一个多机节点系统的仿真验证定理1中的设计方法. 根据文献[25], 该系统的动态模型可以写成系统(1)的形式, 其中:

$$E=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix},$$

$$A=\begin{bmatrix}0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&0\\-107.143&71.429&0&-4.071&0&0&35.714\\38.462&-84.615&0&0&-5.769&0&46.154\\0&0&-75&0&0&-5.5&40\\0.5&1.2&0.8&0&0&0&-3.5\end{bmatrix},$$

$$B=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\71.4286&0&0\\0&38.4615&0\\0&0&50\\0&0&0\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}.$$

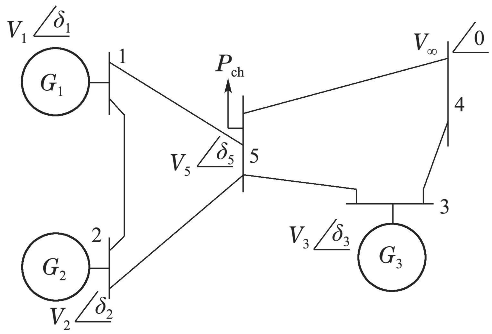


图 1　一个多机节点系统的示意图[25]

Fig. 1　A multi-machine system[25]

在仿真中, 设系统的状态初值为零, 未知扰动$w(t)$的上下边界为

$$w^-(t)=-w^+(t)=[0\ 0\ 0\ 0.2\ 0.2\ 0.2\ 1]^{\mathrm{T}}.$$

在式(15)中, 取$S=0$可得

$$T=\begin{bmatrix}0.5&0&0&0&0&0&0\\0&0.5&0&0&0&0&0\\0&0&0.5&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix},\ N=\begin{bmatrix}0.5&0&0&0\\0&0.5&0&\\0&0&0.5&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}.$$

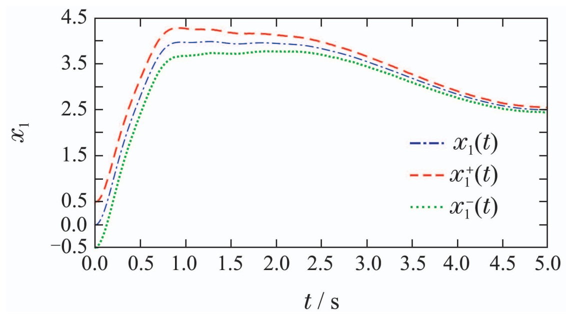
然后通过求解定理1中的设计条件(16)–(18)可以得到

$$L=\begin{bmatrix}2.3123&-0.4011&-0.4011&-0.4054\\-0.3998&2.3080&-0.3998&-0.4041\\-0.3999&-0.3999&2.3079&-0.4042\\-108.2726&70.3328&-1.0958&34.6252\\36.9606&-86.1598&-1.5008&44.6622\\-1.4369&-1.4367&-76.4788&38.5720\\-0.3591&-0.3591&-0.3591&1.8826\end{bmatrix}.$$

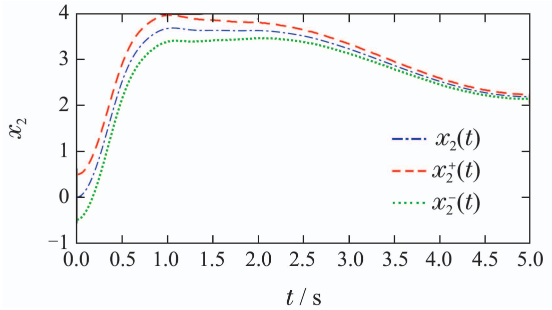
取

$$\hat{x}^+(0)=0.5[1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1]^{\mathrm{T}},\ \hat{x}^-(0)=-\hat{x}^+(0),$$

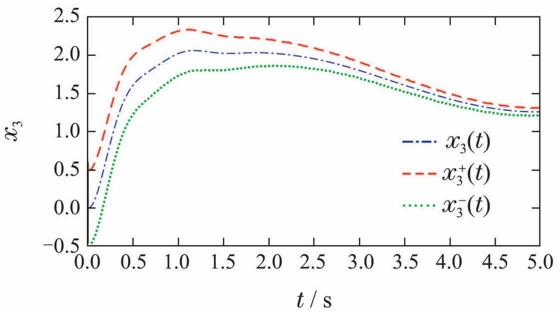
可以得到图2所示的区间估计结果. 仿真结果表明所提出的方法能够在5 s内快速地收敛到一个比较准确的区间估计.



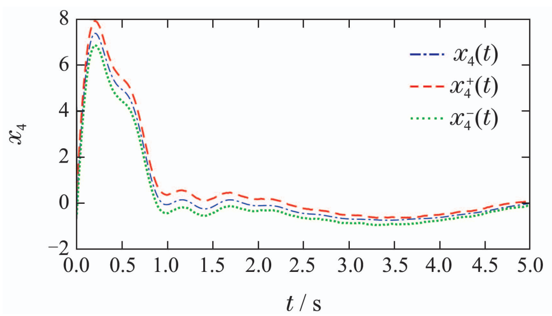
(a)　x_1及其区间估计结果



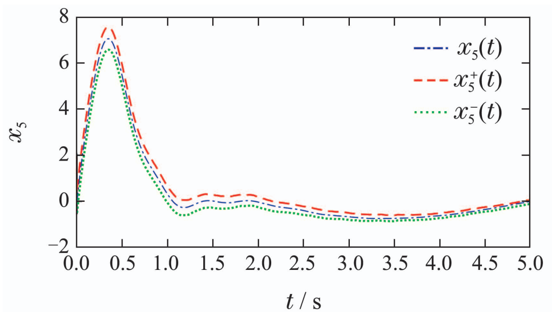
(b) x_2及其区间估计结果



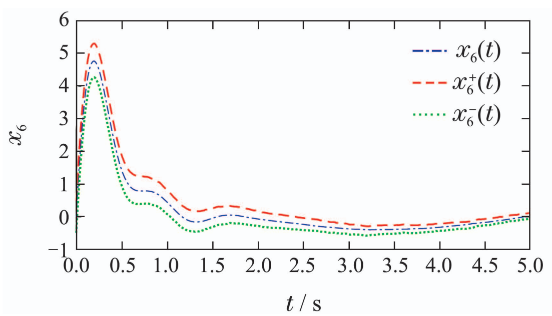
(c) x_3及其区间估计结果



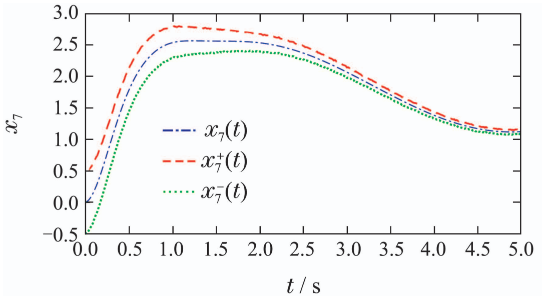
(d) x_4及其区间估计结果



(e) x_5及其区间估计结果



(f) x_6及其区间估计结果



(g) x_7及其区间估计结果

图 2 多机系统的区间估计结果

Fig. 2 Interval estimation results of the multi-machine system

接下来, 以一个数值算例说明定理2中所提出方法的优越性. 考虑具有如下参数矩阵的广义系统:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

先分析定理1的适用性. 在式(15)中, 取$S = 0$可得

$$T = \begin{bmatrix} 0.6667 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0.3333 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ N = \begin{bmatrix} -0.3333 & 0.3333 \\ 0 & 0 \\ 0.6667 & 0.3333 \end{bmatrix}.$$

此时, 不等式(16)–(18)不存在可行解. 对于这一系统, 如果想根据定理1设计出区间观测器, 设计者需要反复调整矩阵S, 直到式(16)–(18)存在可行解为止. 定理2给出了更宽松的设计条件, 可以用于处理这种情况.

通过求解不等式(25)–(27), 可以求出

$$T = \begin{bmatrix} 0.5391 & 0 & 0.1857 \\ -0.0652 & 1 & 0.0965 \\ 0.0421 & 0 & -0.5391 \end{bmatrix},$$

$$N = \begin{bmatrix} -0.4609 & 0.4609 \\ -0.0652 & 0.0652 \\ 1.0421 & -0.0421 \end{bmatrix},$$

$$L = \begin{bmatrix} -1.2838 & 1.4592 \\ 0.8362 & 0.4942 \\ 3.2508 & -0.8324 \end{bmatrix}.$$

为了检验本文所提出方法的性能, 将其与文献[18]中的设计方法进行对比. 文献[18]中提出了如下形式的区间观测器:

$$\begin{cases} \dot{\xi}^-(t) = R\xi^-(t) + (PT)^+w^-(t) - (PT)^-w^+(t)+ \\ \qquad P((TA - LC)N + L)y(t), \\ \dot{\xi}^+(t) = R\xi^+(t) + (PT)^+w^+(t) - (PT)^-w^-(t)+ \\ \qquad P((TA - LC)N + L)y(t), \end{cases}$$

其中的T和N通过求解方程$TE+NC=I$得到, P和L通过求解Sylvester方程:

$$PTA-RP=QC \tag{36}$$

得到. 式(36)中, R是由设计者选取的矩阵. 该方法需要先求解出矩阵T, 然后确定一个R矩阵并求解(36)得到P和Q的值, 最后通过$L=P^{-1}Q$得到矩阵L. 在本例中, 取和上述方法一样的T和N, 然后将R选为

$$R=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 1 & -2\end{bmatrix}.$$

通过求解(36)可得

$$P=\begin{bmatrix}-0.75 & 1 & 0\\ 1.25 & -1 & 1\\ 2.75 & -2.5 & 3.25\end{bmatrix},\ L=\begin{bmatrix}-0.3333 & 3\\ 0.75 & 2.25\\ 1.1667 & -0.5\end{bmatrix}.$$

文献[18]中的方法在得到$\xi^+(t)$和$\xi^-(t)$后, 还需要通过下式得到x的区间估计$\hat{x}^+(t)$和$\hat{x}^-(t)$:

$$\begin{cases}\hat{x}^+(t)=S^+\xi^+(t)-S^-\xi^-(t),\\ \hat{x}^-(t)=S^+\xi^-(t)-S^-\xi^+(t),\end{cases}$$

其中$S=P^{-1}$.

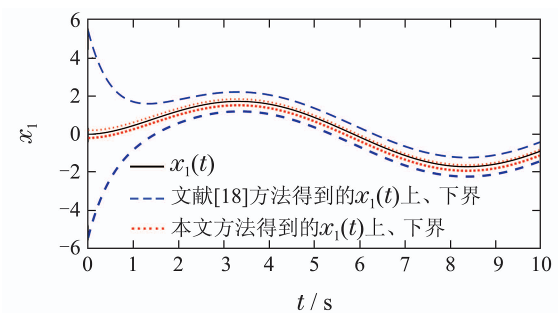
仿真中的状态初值设置为$x(0)=[0\ \ 1\ \ -1]^{\mathrm{T}}$, 控制输入为$u(t)=2\sin(0.2\pi t)$, 未知扰动$w(t)$的上下边界为

$$w^-(t)=-w^+(t)=[0.05\ \ 0.1\ \ 0]^{\mathrm{T}}.$$

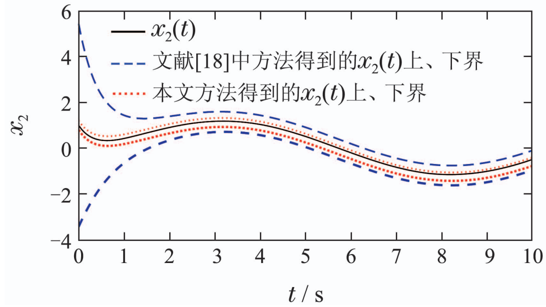
设区间观测器的初值取为

$$\hat{x}^+(0)=x(0)+0.2[1\ \ 1\ \ 1]^{\mathrm{T}},\ \hat{x}^-(0)=-\hat{x}^+(0).$$

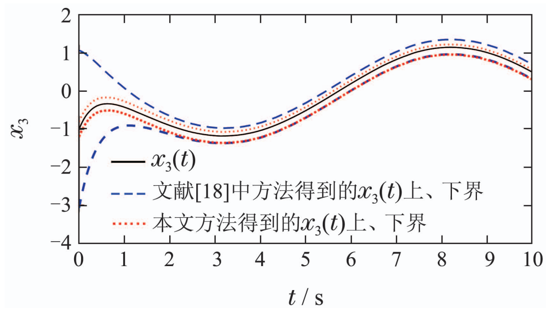
利用本文定理2所提出的方法和文献[18]中所提出的方法, 可以得到图3所示的区间估计结果. 其中: 点线所示的是本文所提出方法得到的上、下界, 虚线所示的是利用文献[18]中的方法得到的上、下界.可以看出, 定理2中所提出的方法可以得到更为准确的区间估计, 表明本文所提出方法的性能更好. 这是因为文献[18]中的方法是基于坐标变换的方法, 虽然在一定程度上放宽了设计条件, 但同时也带来了一定的保守性.



(a) x_1及其区间估计结果



(b) x_2及其区间估计结果



(c) x_3及其区间估计结果

图 3 本文方法和文献[18]中方法的区间估计结果

Fig. 3 Interval estimation results of the proposed method and that in [18]

5 结论(Conclusions)

本文针对具有未知扰动的连续线性广义系统提出了一种新的区间观测器设计方法, 基于正系统的稳定性条件, 将区间观测器设计转化为一个可以用半定规划方法求解的线性矩阵不等式问题. 本文所提出的方法是一种直接设计方法, 不需要进行状态变换即可设计出区间观测器. 与基于状态变换方法所设计的区间观测器相比, 本文所提出方法的设计与实现过程相对简单、方便. 实际上, 基于状态变换的区间观测器设计方法的性能受R的取值影响很大. 若R选得不好, 则可能会得到较差的区间估计结果. 因此, 如何选取矩阵R是基于坐标变换的区间观测器设计中的重要问题, 但迄今为止, 文献中对此问题还没有一个系统有效的解决方案. 本文所提出的方法是一种直接设计法, 不存在参数选取困难的问题. 需要指出的是: 本文只考虑了最基本的观测器收敛问题, 实际上我们还可以利用极点配置或H_∞设计等方法进一步优化区间观测器的性能, 这可作为将来的研究工作之一.

参考文献(References):

[1] GOUZÉ J L, RAPAPORT A, HADJ-SADOK M Z. Interval observers for uncertain biological systems [J]. *Ecological Modelling*, 2000, 133(1): 45 – 56.

[2] BERNARD O, GOUZÉ J L. Closed loop observers bundle for uncertain biotechnological models [J]. *Journal of Process Control*, 2004, 14(7): 765 – 774.

[3] MOISAN M, BERNARD O, GOUZÉ J L. Near optimal interval observers bundle for uncertain bioreactors [J]. *Automatica*, 2009, 45(1): 291 – 295.

[4] EFIMOV D, FRIDMAN L, RAÏSSI T, et al. Application of interval observers and HOSM differentiators for fault detection [C] //*The 8th IFAC International Symposium on Fault Detection, Supervision and Safety of Technical Processes*. Mexico City: IEEE, 2012: 516 – 521.

[5] RAMI M A, CHENG C H, DE PRADA C. Tight robust interval observers: an LP approach [C] //*Proceedings of the 47th IEEE Conference on Decision and Control*. New York: IEEE, 2008: 2967 – 2972.

[6] MAZENC F, BERNARD O. Interval observers for linear time-invariant systems with disturbances [J]. *Automatica*, 2011, 47(1): 140 – 147.

[7] CACACE F, GERMANI A, MANES C. A new approach to design interval observers for linear systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2015, 60(6): 1665 – 1670.

[8] RAÏSSI T, EFIMOV D, ZOLGHADRI A. Interval state estimation for a class of nonlinear systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, 57(1): 260 – 265.

[9] EFIMOV D, FRIDMAN E, POLYAKOV A, et al. Linear interval observers under delayed measurements and delay-dependent positivity [J]. *Automatica*, 2016, 72: 123 – 130.

[10] GUO Shenghui, ZHU Fanglai. Actuator fault detection based on interval observers [J]. *Control and Decision*, 2016, 31(6): 1118 – 1122. (郭胜辉, 朱芳来. 基于区间观测器的执行器故障检测 [J]. 控制与决策, 2016, 31(6): 1118 – 1122.)

[11] CHAMBON E, APKARIAN P, BURLION L. Metzler matrix transform determination using a non-smooth optimization technique with an application to interval observers [C] //*SIAM Conference on Control and its Applications*. Paris: IEEE, 2015: 205 – 211.

[12] CHAMBON E, BURLION L, APKARIAN P. Overview of linear time-invariant interval observer design: towards a non-smooth optimisation-based approach [J]. *IET Control Theory & Applications*, 2016, 10(11): 1258 – 1268.

[13] WANG Y, BEVLY D M, RAJAMANI R. Interval observer design for LPV systems with parametric uncertainty [J]. *Automatica*, 2015, 60: 79 – 85.

[14] HEMAMI H, WYMAN B F. Modeling and control of constrained dynamic systems with application to biped locomotion in the frontal plane [J]. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 1979, 24(4): 526 – 535.

[15] KUMAR A, DAOUTIDIS P. Feedback control of nonlinear differential-algebraic equation systems [J]. *AIChE Journal*, 1995, 41(3): 619 – 636.

[16] FUJIMORI A. Descriptor polytopic model of aircraft and gain scheduling state feedback control [J]. *Transactions of the Japan Society for Aeronautical and Space Sciences*, 2004, 47(156): 138 – 145.

[17] EFIMOV D, POLYAKOV A, RICHAR J P. Interval observer design for estimation and control of time-delay descriptor systems [J]. *European Journal of Control*, 2015, 23: 26 – 35.

[18] GUO Shenghui, ZHU Fanglai. Interval observers design for descriptor systems [J]. *Control and Decision*, 2016, 31(2): 361 – 366. (郭胜辉, 朱芳来. 广义系统区间观测器设计 [J]. 控制与决策, 2016, 31(2): 361 – 366.)

[19] FARINA L, RINALDI S. *Positive Linear Systems: Theory and Applications* [M]. New York: John Wiley & Sons, 2000.

[20] EFIMOV D, FRIDMAN L, RAÏSSI T, et al. Interval estimation for LPV systems applying high order sliding mode techniques [J]. *Automatica*, 2012, 48(9): 2365 – 2371.

[21] WANG Z H, SHEN Y, ZHANG X L, et al. Observer design for discrete-time descriptor systems: an LMI approach [J]. *Systems & Control Letters*, 2012, 61(6): 683 – 687.

[22] WANG Z H, RODRIGUES M, THEILLIOL D, et al. Sensor fault estimation filter design for discrete-time linear time-varying systems [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2014, 40(10): 2364 – 2369.

[23] WANG Z H, RODRIGUES M, THEILLIOL D, et al. Actuator fault estimation observer design for discrete-time linear parameter-varying descriptor systems [J]. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 2015, 29(2): 242 – 258.

[24] LOFBERG J. YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB [C] //*2004 IEEE International Symposium on Computer Aided Control Systems Design*. New York: IEEE, 2004: 284 – 289.

[25] KOENIG D. Unknown input proportional multiple-integral observer design for linear descriptor systems: Application to state and fault estimation [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, 50(2): 212 – 217.

作者简介:

王振华 (1987–), 男, 博士, 讲师, 目前研究方向为故障诊断与容错控制, E-mail: zhenhua.wang@hit.edu.cn;

沈 毅 (1965–), 男, 博士, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为故障诊断、飞行器控制、超声信号处理等, E-mail: yishen_hit@126.com;

郭胜辉 (1983–), 男, 博士, 讲师, 目前研究方向为区间观测器设计、故障诊断与重构等, E-mail: liwdedy@163.com.