

随机多智能体系统的有限时间多目标环绕控制

李智超, 莫立坡[†], 郭少岩

(北京工商大学 理学院, 北京 100048)

摘要: 针对随机多智能体系统, 研究了其多目标有限时间环绕控制问题, 其中每个智能体可以跟踪多个目标, 但是每个目标只能被一个智能体跟踪. 首先, 为每个智能体设计了目标状态的估计器, 证明了在白噪声干扰之下每个智能体都可以在有限时间内对目标的几何中心位置作出估计. 其次, 为每个智能体设计了环绕半径的估计器, 以及分布式环绕控制器. 然后, 利用李雅普诺夫有限时间随机稳定性理论, 证明了所有智能体在有限时间内能够对环绕半径作出估计, 同时可以实现有限时间环绕控制. 最后, 通过仿真验证了结果的有效性和正确性.

关键词: 多智能体系统; 环绕控制; 有限时间; 多目标; 白噪声

引用格式: 李智超, 莫立坡, 郭少岩. 随机多智能体系统的有限时间多目标环绕控制. 控制理论与应用, 2018, 35(4): 523 – 530

中图分类号: TP273 文献标识码: A

Finite-time multiple dynamic targets encirclement control of stochastic multi-agent systems

LI Zhi-chao, MO Li-po[†], GUO Shao-yan

(School of Science, Beijing Technology and Business University, Beijing 100048, China)

Abstract: This paper addresses the finite-time multiple dynamic targets encirclement control problem of stochastic multi-agent systems, where each agent can track multiple targets, while each target can be tracked by one agent. Firstly, we design the target states estimator for each agent, and prove that each agent can estimate the geometric center of the targets in finite-time under the disturbances of white noise. Secondly, we design the encirclement radius estimator and distributed encirclement control law for each agent. By Lyapunov finite-time stochastic stability theory, we prove that each agent can estimate of encirclement radius in finite-time and multi-agent systems can achieve encirclement control in finite-time. Finally, simulations are provided to illustrate the effectiveness and correctness of the theoretical results.

Key words: multi-agent systems; encirclement control; finite-time; multiple targets; white noises

Citation: LI Zhichao, MO Lipo, GUO Shaoyan. Finite-time multiple dynamic targets encirclement control of stochastic multi-agent systems. *Control Theory & Applications*, 2018, 35(4): 523 – 530

1 引言(Introduction)

近年来, 多智能体系统的一致性问题得到了不同领域学者的广泛关注^[1-5]. 在一致性问题的研究中, 收敛速度是评价所设计的一致性协议性能的重要指标, 从时间优化的角度看, 使得多智能体系统在有限时间内实现一致的控制方法才是时间最优的控制方法. 目前, 关于多智能体系统有限时间一致性问题, 已经取得了丰硕的成果, 例如文献[6]研究了一阶多智能体的有限时间一致性问题, 文献[7]研究了带有领航者的二阶多智能体系统的有限时间一致性问题. 这些研究没

有考虑到随机干扰的影响, 然而在实际问题中, 系统经常会受到很多随机因素的影响, 许多系统的工作环境也会带有不确定性, 因此学者们考虑了随机干扰对物理系统的影响. 从应用的方面看, 随机多智能体系统具有广泛的应用环境, 可以应用于很多不适合人类活动的恶劣环境, 发挥出了很关键的作用, 所以研究随机多智能体系统具有重要的理论价值和实际意义. 对于带有噪声的多智能体系统, 文献[8]给出了系统实现均方一致的充要条件, 在此基础上, 文献[9-10]研究了二阶和高阶的带有通讯噪音的线性多智能体系统

收稿日期: 2017-05-27; 录用日期: 2017-11-22.

[†]通信作者. E-mail: beihangmlp@126.com.

本文责任编辑: 方浩.

国家自然科学基金项目(61304155), 北京市委组织部优秀人才项目D类项目(2012D005 003000005)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (61304155) and the Beijing Municipal Organization Department Outstanding Talents Project D Class Project (2012D005 003000005).

均方一致性问题. 其中文献[12]给出了带有白噪声的多智能体系统实现均方有界一致时所满足的条件. 同样, 在实际应用中, 考虑随机因素对有限时间一致性的影响也是一个有意义的课题. 最近几年, 在随机系统有限时间一致性方面, Zheng等人^[13]研究了带有高斯白噪声的多智能体系统, 并证明了该系统在有限时间内实现一致. 带有随机干扰的一阶多智能体系统有限时间一致性问题在文献[14]中也进行了讨论. Zhao等人在文献[15]中进一步研究了二阶非线性随机多智能体系统, 通过随机有限时间稳定性理论解决了有限时间一致性问题.

在自然界中, 群体活动往往能够给群体带来巨大的优势, 例如鱼群的自我保护及觅食, 狮群的合作围剿猎物以提升成功捕食的概率等. 当然在现实生活中, 群体运动在很多方面都有着巨大的用途, 例如对未知环境的探索, 对森林海洋的监测, 以及军事中无人机对多个目标的进行侦查、追踪和打击等. 因此, 研究多目标的环绕控制问题具有很强的工程和军事意义^[16–20]. 在文献[16]里, Marasco等人通过对非线性离散系统的分析, 使得一组无人机对一个目标进行包围控制. Chen等人^[17]对固定通信拓扑下带有领航者的系统进行了研究, 使得所有的跟随者环绕包围固定不动的领航者. 文献[18]中, 在多智能体系统协同控制问题下, 研究了动态多智能体环绕多个目标的问题, 其控制协议不仅仅作用在固定目标, 也作用在动态目标. 在文献[19]里, Zhang等人研究了对多个目标的环绕控制问题. 然而, 这些文献报告的结果与实际应用还有一定的差距, 具体地, 第一, 部分文献[16–17]中目标与智能体的个数相同, 目标状态是固定不动的, 这些文章的普遍性与实用性不是很强; 第二, 部分文献[18–19]中作者考虑的通讯协议中含有导数, 在实际的工程上是不易于实现的; 第三, 部分文献[16–20]中没有考虑随机因素对系统的影响, 其文章的可行性不是很强.

另一方面, 实际系统必然会受到随机因素的影响, 并且随机干扰可能会使系统变得不稳定^[8–15]. 受以上文献启发, 本文主要研究了随机因素对多目标有限时间环绕控制问题的影响, 运用了李雅普诺夫随机有限时间稳定性理论, 证明了所有智能体能够在有限时间内依概率获得目标的位置信息, 同时实现随机有限时间环绕控制. 最后, 通过仿真验证了结果的有效性和正确性. 本文的创新点主要有以下3个方面: 第一, 相比文献[19], 本文考虑的通讯协议中不含有导数, 有利于在工程上实现; 第二, 文献[19]中没有考虑输入噪音的影响, 而相对于实际情况来说, 环境和自身产生的随机因素对系统的影响是很普遍的, 研究随机系统的环绕控制具有很强的工程意义; 第三, 相比渐近环绕控制, 有限时间环绕控制具有更快的收敛速度, 同时还具有更好的鲁棒性能和抗干扰性能等优点.

符号: \mathbb{R} 代表实数集, \mathbb{R}^n 代表 n 维实数空间, $\text{Tr}(\cdot)$ 代表矩阵的迹.

2 预备知识(Preliminaries)

代数图论^[21]在多智能体系统的一致性分析中起着关键的作用. 设 n 个智能体间的信息交互拓扑图 $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, 其中顶点集 $\mathcal{V} = \{1, \dots, n\}$, 表示有 n 个智能体, $\mathcal{E} \subset V \times \mathcal{V}$ 是图的边集. \mathcal{G} 的边 $(i, j) \in \mathcal{E}$ 表示智能体 i 和智能体 j 之间可以发生信息的交互. 图 \mathcal{G} 的邻接矩阵 $\mathcal{A} = [a_{ij}]$, 其中 $a_{ij} \geq 0$ 表示节点 i 和 j 之间的连接权重, 当节点 i 能从节点 j 得到其信息时, $a_{ij} > 0$, 否则, $a_{ij} = 0$. 图 \mathcal{G} 的拉普拉斯矩阵定义为 $\mathcal{L} = \mathcal{D} - \mathcal{A}$, 其中度矩阵 $\mathcal{D} = \text{diag}\{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ 是对角元为 $d_i = \deg_{\text{in}}(i)$, 其他元为零的对角矩阵. 即有 $\mathcal{L} = [l_{ij}], l_{ii} = \sum_{j=1}^n a_{ij}, l_{ij} = -a_{ij}, i \neq j$, 对于无向图 \mathcal{G} , 其中拉普拉斯矩阵 \mathcal{L} 为一个对称矩阵.

定义 1^[22] 考虑随机非线性系统

$$dx = f(x)dt + g(x)dw, \quad (1)$$

其中: $x \in \mathbb{R}^n$ 表示系统的状态, w 表示 r 维的标准维纳过程, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times r}$ 是连续函数并且满足 $f(0)=0, g(0)=0$. 对于系统(1), 定义 $T(x_0, w) = \inf\{T \geq 0 : x(t, x_0) = 0, \forall t \geq T\}$, 称之为随机稳定时间函数. 记 $\varphi^{x_0}(t) = \varphi(t, x_0)$ 表示初始值为 x_0 时系统在 t 时刻的状态, 其平衡点 $x = 0$ 被称为有限时间随机稳定的, 如果

i) 依概率稳定: 对任意包含原点 O 的开球 U_ε , 都存在开子集 U_δ , 使得对任意 $x \in U_\delta \setminus 0$, 有 $P(\varphi^x(t) \in U_\varepsilon, t \geq 0) \geq 1 - \varepsilon$ 成立.

ii) 有限时间收敛: 对任意的 $x_0 \in \mathbb{R}^n$, 存在一个随机变量 $T(x_0, w) \geq 0$, 使得 $\lim_{t \rightarrow T(x_0, w)} \|\varphi(t, x_0)\| = 0$, 且 $E[T(x_0, w)] < +\infty$.

引理 1^[22] 考虑随机非线性系统(1), 设该系统有全局唯一解. 如果存在一个正定有界的二阶连续可微李雅普诺夫函数 $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$, 以及实数 $K > 0, 0 < \alpha < 1$, 使得

$$LV(x) \leq -K(V(x))^\alpha,$$

其中 $LV(x) = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) + \frac{1}{2} \text{Tr}\{g^T(x) \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} g(x)\}$. 则随机非线性系统(1)的解是全局有限时间随机稳定的, 而且随机稳定时间 $T(x_0, w)$ 满足 $E[T(x_0, w)] \leq \frac{(V(x_0))^{1-\alpha}}{K(1-\alpha)}$, 这意味着 $T(x_0, w) < \infty$, a.s.

引理 2^[23] 设 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \geq 0, 0 < p \leq 1$, 则 $(\sum_{i=1}^n \xi_i)^p \leq \sum_{i=1}^n \xi_i^p$.

引理 3^[24] 如果无向图 \mathcal{G} 是连通图, 则其拉普拉斯矩阵满足: \mathcal{L} 有一个零特征值, $\mathbf{1}_n$ 是相应于零特征

值的特征向量, 即 $\mathcal{L}\mathbf{1}_n = 0$, 其余特征值都大于零, 其特征值可以表示为 $0 = \lambda_1 < \lambda_2 \cdots \leq \lambda_n$.

3 模型描述(Model description)

考虑包含 n 个智能体和 m 个目标的多智能体系统. 设第 i 个智能体的动力学方程为

$$\dot{x}_i(t) = u_i(t), i \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad (2)$$

其中: $x_i(t) \in \mathbb{R}^2$ 表示第 i 个智能体的位置, $u_i(t) \in \mathbb{R}^2$ 表示第 i 个智能体在 t 时刻的控制输入.

设目标位置的几何中心为 $P(t) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m r_i(t)$, 其中 $r_i(t)$ 表示第 i 个目标在 t 时刻的位置.

本文的目的是针对每个智能体设计目标状态的估计器, 使得每个智能体分别对目标的几何位置中心和环绕半径在有限时间内作出估计, 同时实现环绕控制. 为此, 类似于文献[19], 本文对系统作如下假设:

假设 1 第 i 个智能体可以跟踪 $n_i \geq 1$ 个目标, 并且每个目标只能被一个智能体跟踪. 设第 i 个智能体可以跟踪的目标构成的集合为 M_i , $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

假设 2 所有目标的速度有界, 即存在 $\beta > 0$ 使得 $\|\dot{r}_k(t)\| \leq \beta$, $k \in \{1, 2, \dots, m\}$.

设 $\tilde{\psi}_{ik}(t) \in \mathbb{R}^2$ 表示第 i 个智能体对第 k 个目标状态的估计, 其中: $k \in \{1, 2, \dots, m\}$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, 受到文献[13] 的启发, 考虑如下带白噪声干扰的估计器:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\psi}}_{ik}(t) = \alpha_1 \left\{ \sum_{j \in N_i} a_{ij} \operatorname{sgn}(\tilde{\psi}_{jk}(t) - \tilde{\psi}_{ik}(t)) + \right. \\ \quad b_{ij}^2 (\tilde{\psi}_{jk}(t) - \tilde{\psi}_{ik}(t)) + \\ \quad \left. b_{ij} (\tilde{\psi}_{jk}(t) - \tilde{\psi}_{ik}(t)) \dot{w}_{ij}(t) \right\}, \\ k \in \{1, \dots, m\} - M_i, \\ \tilde{\psi}_{ik}(t) = r_k(t), k \in M_i, \end{cases} \quad (3)$$

其中: $\mathcal{A} = [a_{ij}]_{n \times n}$ 为 \mathcal{G} 的邻接矩阵, $0 < \alpha_1 < 1$, 噪声强度 $b_{ij} \geq 0$, 且满足 $b_{ij} > 0$ 当且仅当智能体 j 与智能体 i 互为邻居. $\{\dot{w}_{ij}(t), i, j = 1, \dots, n\}$ 为相互独立的标准白噪声. 假定 F_t 是完备概率空间 (Ω, \mathcal{F}, P) 的 σ -代数 F 的子集, $w_{ij}(t)$ 关于 F_t 可测 ($t \geq 0$), $w_{ij}(t)$ 是一个标准维纳过程.

注 1 与文献[19–20]相比较, 本文考虑的目标状态估计器是带有白噪声的. 由于系统经常会受到随机因素的干扰, 所以本文考虑了输入噪音的影响, 增强了结果的可行性.

设

$$\rho_i(t) = \max_k \|\tilde{\psi}_{ik}(t) - \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \tilde{\psi}_{ij}(t)\|, \quad (4)$$

其中 $\rho_i(t)$ 表示第 i 个智能体对所有目标的位置估计值

与目标几何中心位置的距离的最大值.

为了解决系统(2)的分布式环绕控制问题, 对每个智能体设计如下期望环绕半径和期望环绕角度的估计器:

$$\begin{cases} \dot{l}_i(t) = -k_1 \operatorname{sgn}(l_i(t) - k\rho_i(t)) \\ \dot{\theta}_i(t) = \sum_{j=1}^n \{a_{ij} \operatorname{sgn}(\theta_{ji}(t)) + \\ c_{ij}^2(\theta_{ji}(t)) + c_{ij}(\theta_{ji}(t)) \dot{w}_{ij}(t)\}, \end{cases} \quad (5)$$

其中: $l_i(t), \theta_i(t)$ 为第 i 个智能体期望位置在以目标几何中心为原点的极坐标之下的极径和极角, $k_1 > 0$ 为控制增益, $k > 1$, $\operatorname{sgn}(\cdot)$ 表示符号函数, $\theta_{ji}(t) = \theta_j(t) - \theta_i(t) - \frac{2\pi(j-i)}{n}$, 噪声强度 $c_{ij} \geq 0$, 并且满足 $c_{ij} > 0$ 当且仅当智能体 j 与智能体 i 互为邻居.

$$\begin{aligned} \text{令 } \hat{\theta}_i(t) = \theta_i(t) - \frac{2\pi i}{n}, \text{ 则} \\ \dot{\hat{\theta}}_i(t) = \sum_{j=1}^n \{a_{ij} \operatorname{sgn}(\hat{\theta}_j(t) - \hat{\theta}_i(t)) + \\ c_{ij}^2(\hat{\theta}_j(t) - \hat{\theta}_i(t)) + \\ c_{ij}(\hat{\theta}_j(t) - \hat{\theta}_i(t)) \dot{w}_{ij}(t)\}. \end{aligned} \quad (6)$$

$$\text{设 } \hat{x}_i(t) = \begin{bmatrix} l_i(t) \cos(\theta_i(t)) \\ l_i(t) \sin(\theta_i(t)) \end{bmatrix} + p_i(t), \text{ 其中 } p_i(t) =$$

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \tilde{\psi}_{ij}(t).$$

为实现系统(2)的分布式环绕控制, 设计如下的控制协议:

$$u_i(t) = -\gamma \operatorname{sgn}(x_i(t) - \hat{x}_i(t)), \quad (7)$$

其中 $\gamma > 0$.

注 2 与文献[19]相比较, 本文的控制协议中没有导数项, 更利于在工程上的实现.

4 收敛性分析(Convergence analysis)

本节分别分析系统的收敛性, 讨论目标几何位置中心、圆形编队半径和圆形编队角度的估计问题, 下面首先分析估计器(3)的有限时间随机稳定性.

引理 4 考虑系统(3). 在假设1和假设2之下, 若 $\alpha_1 > 2^{\frac{1}{2}} \beta n^{\frac{1}{2}}$, 则每个智能体对目标位置的估计值可以在有限时间内随机收敛到目标位置的真实值.

证 对于任何一个目标 $k \in \{1, 2, \dots, m\}$, 存在智能体 $j(k) \in \{1, 2, \dots, n\}$, 使第 $j(k)$ 个智能体可以直接观测到第 k 个目标. 由于图 \mathcal{G} 是连通图, 故以 $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} - \{v_{j(k)}\}$ 为顶点集, 图 \mathcal{G} 相应于 $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} - \{v_{j(k)}\}$ 的边为边集构成一个新的图 $\bar{\mathcal{G}}$, 则 $\bar{\mathcal{G}}$ 一定包含若干个连通分支, 记为 $\bar{\mathcal{G}}_1, \bar{\mathcal{G}}_2, \dots, \bar{\mathcal{G}}_s$ ($s \leq n-1$),

其中: $\bar{\mathcal{G}}_1 = \{\bar{\mathcal{V}}_1, \bar{\mathcal{E}}_1\}$, $\bar{\mathcal{G}}_2 = \{\bar{\mathcal{V}}_2, \bar{\mathcal{E}}_2\}, \dots, \bar{\mathcal{G}}_s = \{\bar{\mathcal{V}}_s, \bar{\mathcal{E}}_s\}$, 顶点集 $\bar{\mathcal{V}}_1 = \{v_{l_1^1}, v_{l_1^2}, \dots, v_{l_{q_1}^1}\}$, $\bar{\mathcal{V}}_2 = \{v_{l_2^1}, v_{l_2^2}, \dots, v_{l_{q_2}^2}\}$, \dots , $\bar{\mathcal{V}}_s = \{v_{l_s^1}, v_{l_s^2}, \dots, v_{l_{q_s}^s}\}$, 其中 $q_1 + q_2 + \dots + q_s = n - 1$, 并且 $\bar{\mathcal{V}}_1 \cup \bar{\mathcal{V}}_2 \cup \dots \cup \bar{\mathcal{V}}_s \cup \{v_{j(k)}\} = \{1, 2, \dots, n\}$. 对 $\forall a \in \{1, 2, \dots, s\}$, 系统(3)可以转化为如下系统:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\psi}}_{l_i^a k}(t) = \\ \alpha_1 \left\{ \sum_{j=1}^{q_a} [a_{l_i^a l_j^a} \operatorname{sgn}(\tilde{\psi}_{l_j^a k}(t) - \tilde{\psi}_{l_i^a k}(t)) + \right. \\ b_{l_i^a l_j^a}^2 (\tilde{\psi}_{l_j^a k}(t) - \tilde{\psi}_{l_i^a k}(t)) + \\ b_{l_i^a l_j^a} (\tilde{\psi}_{l_j^a k}(t) - \tilde{\psi}_{l_i^a k}(t)) \dot{w}_{ij}(t) + \\ [a_{l_i^a j(k)} \operatorname{sgn}(\tilde{\psi}_{j(k)k}(t) - \tilde{\psi}_{l_i^a k}(t)) + \\ b_{l_i^a j(k)}^2 (\tilde{\psi}_{j(k)k}(t) - \tilde{\psi}_{l_i^a k}(t)) + \\ b_{l_i^a j(k)} (\tilde{\psi}_{j(k)k}(t) - \tilde{\psi}_{l_i^a k}(t)) \dot{w}_{ij(k)}(t)] \\ \left. k \in \{1, \dots, m\} - M_{j(k)} \right\} \\ \tilde{\psi}_{j(k)k}(t) = r_k(t), \quad k \in M_{j(k)}. \end{cases}$$

设 $\delta_i(t) = \tilde{\psi}_{l_i^a k}(t) - \tilde{\psi}_{j(k)k}(t)$, $i \in \{1, \dots, q_a\}$, 那么

$$\begin{aligned} d\delta_i(t) = & \\ \alpha_1 \left\{ \sum_{j=1}^{q_a} [a_{l_i^a l_j^a} \operatorname{sgn}(\delta_j(t) - \delta_i(t)) + \right. \\ b_{l_i^a l_j^a}^2 (\delta_j(t) - \delta_i(t)) dt + b_{l_i^a l_j^a} (\delta_j(t) - \delta_i(t)) dw_{ij}(t) - \\ (a_{l_i^a j(k)} \operatorname{sgn}(\delta_i(t)) + b_{l_i^a j(k)}^2 \delta_i(t)) dt - \\ \left. b_{l_i^a j(k)} \delta_i(t) dw_{ij(k)}(t) - \dot{r}_k(t) \right\}. \end{aligned} \quad (8)$$

从而可以把对系统(3)的分析转化到对系统(8)的分析. 考虑如下李雅普诺夫函数:

$$V(t) = \sum_{j=1}^{q_a} \delta_j^T(t) \delta_j(t).$$

利用Ito公式, 可得

$$\begin{aligned} dV(t) = & \\ \sum_{i=1}^{q_a} 2\delta_i^T(t) \alpha_1 \left\{ \sum_{j=1}^{q_a} [a_{l_i^a l_j^a} \operatorname{sgn}(\delta_j(t) - \delta_i(t)) + \right. \\ b_{l_i^a l_j^a}^2 (\delta_j(t) - \delta_i(t)) dt + b_{l_i^a l_j^a} (\delta_j(t) - \delta_i(t)) dw_{ij}(t) - \\ (a_{l_i^a j(k)} \operatorname{sgn}(\delta_i(t)) + b_{l_i^a j(k)}^2 \delta_i(t)) dt - \\ b_{l_i^a j(k)} \delta_i(t) dw_{ij(k)}(t) - \dot{r}_k(t) \left. \right\} + \\ \alpha_1^2 \sum_{i=1}^{q_a} \left\{ \sum_{j=1}^{q_a} b_{l_i^a l_j^a}^2 (\delta_j(t) - \delta_i(t))^T (\delta_j(t) - \delta_i(t)) dt + \right. \\ \left. b_{l_i^a j(k)}^2 \delta_i^T(t) \delta_i(t) dt \right\}, \end{aligned}$$

那么

$$\begin{aligned} LV(t) = & \\ \sum_{i=1}^{q_a} 2\delta_i^T(t) \alpha_1 \left\{ \sum_{j=1}^{q_a} [a_{l_i^a l_j^a} \operatorname{sgn}(\delta_j(t) - \delta_i(t)) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & b_{l_i^a l_j^a}^2 (\delta_j(t) - \delta_i(t))] - \\ & a_{l_i^a j(k)} \operatorname{sgn}(\delta_i(t)) - b_{l_i^a j(k)}^2 (\delta_i(t)) \} + \\ & \alpha_1^2 \sum_{i=1}^{q_a} \left\{ \sum_{j=1}^{q_a} b_{l_i^a l_j^a}^2 (\delta_j(t) - \delta_i(t))^T (\delta_j(t) - \delta_i(t)) + \right. \\ & b_{l_i^a j(k)}^2 \delta_i^T(t) \delta_i(t) \} - \sum_{i=1}^{q_a} 2\delta_i^T(t) \dot{r}_k(t) \leqslant \\ & \alpha_1 \left\{ \sum_{i=1}^{q_a} \sum_{j=1}^{q_a} (a_{l_i^a l_j^a} \delta_i^T(t) \operatorname{sgn}(\delta_j(t) - \delta_i(t)) + \right. \\ & a_{l_i^a l_j^a} \delta_j^T(t) \operatorname{sgn}(\delta_i(t) - \delta_j(t))) + \\ & \sum_{i=1}^{q_a} \sum_{j=1}^{q_a} (b_{l_i^a l_j^a}^2 \delta_i^T(t) (\delta_j(t) - \delta_i(t)) + \\ & b_{l_i^a l_j^a}^2 \delta_j^T(t) (\delta_i(t) - \delta_j(t))) + \\ & \sum_{i=1}^{q_a} \sum_{j=1}^{q_a} b_{l_i^a l_j^a}^2 (\delta_j(t) - \delta_i(t))^T (\delta_j(t) - \delta_i(t)) \} + \\ & \alpha_1 \left\{ \sum_{i=1}^{q_a} [2\delta_i^T(t) (-a_{l_i^a j(k)} \operatorname{sgn}(\delta_i(t)) - b_{l_i^a j(k)}^2 (\delta_i(t))) + \right. \\ & b_{l_i^a j(k)}^2 \delta_i^T(t) \delta_i(t)] \} - \sum_{i=1}^{q_a} 2\alpha_1 \delta_i^T(t) \dot{r}_k(t) \leqslant \\ & -\alpha_1 \sum_{i=1}^{q_a} \sum_{j=1}^{q_a} a_{l_i^a l_j^a} (\delta_{j1}(t) - \delta_{i1}(t), \delta_{j2}(t) - \delta_{i2}(t)) \times \\ & (\operatorname{sgn}(\delta_{j1}(t) - \delta_{i1}(t)), \operatorname{sgn}(\delta_{j2}(t) - \delta_{i2}(t)))^T - \\ & \alpha_1 \sum_{i=1}^{q_a} 2a_{l_i^a j(k)} \delta_{i1}(t), \delta_{i2}(t) \times \\ & (\operatorname{sgn}(\delta_{i1}(t)), \operatorname{sgn}(\delta_{i2}(t)))^T - \sum_{i=1}^{q_a} 2\alpha_1 \delta_i^T(t) \dot{r}_k(t) = \\ & -\alpha_1 \sum_{i=1}^{q_a} \sum_{j=1}^{q_a} a_{l_i^a l_j^a} (|\delta_{j1}(t) - \delta_{i1}(t)| + |\delta_{j2}(t) - \delta_{i2}(t)|) - \\ & \alpha_1 \sum_{i=1}^{q_a} 2a_{l_i^a j(k)} (|\delta_{i1}(t)| + |\delta_{i2}(t)|) - \sum_{i=1}^{q_a} 2\alpha_1 \delta_i^T(t) \dot{r}_k(t). \end{aligned}$$

由引理2得

$$\begin{aligned} & |\delta_{j1}(t) - \delta_{i1}(t)| + |\delta_{j2}(t) - \delta_{i2}(t)| = \\ & (|\delta_{j1}(t) - \delta_{i1}(t)|^{2 \times \frac{1}{2}} + |\delta_{j2}(t) - \delta_{i2}(t)|^{2 \times \frac{1}{2}}) \geqslant \\ & (|\delta_{j1}(t) - \delta_{i1}(t)|^2 + |\delta_{j2}(t) - \delta_{i2}(t)|^2)^{\frac{1}{2}} = \\ & \|\delta_i(t) - \delta_j(t)\|. \end{aligned}$$

同理

$$|\delta_{i1}(t)| + |\delta_{i2}(t)| \leqslant \|\delta_i(t)\|.$$

又因为

$$\begin{aligned} & -\sum_{i=1}^{q_a} \delta_i^T(t) \dot{r}_k(t) \leqslant \beta \sum_{i=1}^{q_a} \|\delta_i(t)\| \leqslant \beta q_a^{\frac{1}{2}} V(t)^{\frac{1}{2}} = \\ & \beta n^{\frac{1}{2}} V(t)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} & LV(\delta(t)) \leqslant \\ & -\alpha_1 \left\{ \sum_{i=1}^{q_a} \sum_{j=1}^{q_a} a_{l_i^a l_j^a} \|\delta_i(t) - \delta_j(t)\| - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 2\alpha_1 \sum_{i=1}^{q_a} a_{l_i^a l_j^a(k)} \|\delta_i(t)\| \} + 2\alpha_1 \beta n^{\frac{1}{2}} V(t)^{\frac{1}{2}} = \\ & -\alpha_1 [\sum_{i=1}^{q_a} a_{l_i^a l_j^a}^4 (\delta_i(t) - \delta_j(t))^2]^{\frac{1}{2}} - \\ & 2\alpha_1 \sum_{i=1}^{q_a} [a_{l_i^a j(k)}^4 (\delta_i(t))^2]^{\frac{1}{2}} + 2\alpha_1 \beta n^{\frac{1}{2}} V(t)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

令 $\tilde{C} = [a_{l_i^a j(k)}]_{1 \leq i, j \leq q_a}$, 其中 \tilde{C} 为连通分支 \bar{G}_a 的邻接矩阵, 注意到连通分支的通讯拓扑图是无向连通的, 根据文献[6]中的引理可知, $\mathcal{L}(\tilde{C})$ 是半正定矩阵, 记 $\lambda_2(\mathcal{L}(\tilde{C}))$ 表示其最小非零特征值. 那么

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{q_a} \sum_{j=1}^{q_a} [a_{l_i^a l_j^a}^4 (\delta_i(t) - \delta_j(t))^2]^{\frac{1}{2}} + 2 \sum_{i=1}^{q_a} [a_{l_i^a j(k)}^4 \delta_i(t)^2]^{\frac{1}{2}} = \\ & (2\delta^T(t)L(\tilde{C})\delta(t))^{\frac{1}{2}} + (2\delta^T(t)\delta(t))^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

因此

$$LV(t) \leq -[2\alpha_1 \lambda_1(\mathcal{L}(\tilde{C}))^{\frac{1}{2}} + 2^{\frac{1}{2}} \alpha_1 + 2\beta n^{\frac{1}{2}}]V(t)^{\frac{1}{2}}.$$

令 $K_1 = [2\alpha_1(\lambda_1(\mathcal{L}(\tilde{C}))) + 2^{\frac{1}{2}} \alpha_1 - 2\beta n^{\frac{1}{2}}]$, 如果 $2\alpha_1(\lambda_1(\mathcal{L}(\tilde{C}))) + 2^{\frac{1}{2}} \alpha_1 > 2\beta n^{\frac{1}{2}}$, 可得到 $E[T(\delta(0), w)] \leq \frac{2(V(\delta(0)))^{\frac{1-\alpha}{2}}}{K_1(1-\alpha)}$, $\alpha = \frac{1}{2}$. 由引理1可知, 系统(8)的解 $\delta(t)$ 可以在有限时间内收敛到0, 且

$$E[T_a(\tilde{\psi}_{l_i^a k}(0), w)] < +\infty,$$

其中: $i \in \{1, 2, \dots, q_a\}$, $a \in \{1, 2, \dots, s\}$. 则智能体 l_i^a 对目标 k 位置估计能够在有限时间内随机收敛到第 k 个目标的位置. 取 $T_1(\tilde{\psi}_{ik}(0), w) = \max\{T_1(\tilde{\psi}_{l_i^a k}(0), \dots, T_s(\tilde{\psi}_{l_i^s k}(0))\}$, 因为 s 有限, 所以 $E(T_1(\tilde{\psi}_{ik}(0), w)) < +\infty$. 从而所有智能体对目标位置的估计值能够在有限时间内随机收敛到目标位置的真实值.

引理5 考虑系统(5). 若假设1和假设2成立, 且 $k_1 > 2n\beta k$, 则智能体的期望的运动半径能够在有限时间内随机收敛到期望编队半径.

证 令 $\varepsilon_i(t) = l_i(t) - k\rho_i(t)$, 其中 $\varepsilon(t) = [\varepsilon_1(t) \ \varepsilon_2(t) \ \dots \ \varepsilon_n(t)]^T$. 考虑李雅普诺夫函数为

$$V_1(t) = |\varepsilon_i(t)|.$$

对于 $\forall w \in \Omega$, 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(t) &= \text{sgn}(\varepsilon_i(t))\dot{\varepsilon}_i(t) = \\ & \text{sgn}(\varepsilon_i(t))(\dot{l}_i(t) - k\dot{\rho}_i(t)) = \\ & \text{sgn}(\varepsilon_i(t))(-k_1 \text{sgn}(\varepsilon_i(t)) - k\dot{\rho}_i(t)) \leq \\ & -k_1 + k|\rho_i(t)|. \end{aligned}$$

由式(4)可知

$$\begin{aligned} |\dot{\rho}_i(t)| &= \left| \max_k \left\{ \|\dot{\psi}_{ik}(t) - \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \dot{\psi}_{ij}(t)\| \right\} \right| \leq \\ & \max_k \left\{ \|\dot{\psi}_{ik}(t)\| + \left\| \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \dot{\psi}_{ij}(t) \right\| \right\}, \text{ a.s..} \end{aligned}$$

根据引理4可知, 当 $t > T_1(\tilde{\psi}_{ik}(0), w)$ 时, 有

$$\|\tilde{\psi}_{ik}(t)\| = \|\psi_k(t)\|.$$

由假设2可知

$$\begin{aligned} \|\dot{r}_i(t)\| &\leq \beta \Rightarrow \|\dot{\psi}_k(t)\| = \frac{n}{m} n_i \|\dot{r}_k(t)\| \leq \\ & \frac{n}{m} n_i \beta \leq n\beta, \text{ a.s..,} \end{aligned}$$

那么

$$\begin{aligned} |\dot{\rho}_i(t)| &\leq \max_k \left\{ \|\dot{\psi}_{ik}(t)\| + \left\| \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \dot{\psi}_{ij}(t) \right\| \right\} \leq \\ & \max_k \left\{ \|\dot{\psi}_{ik}(t)\| + \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \|\dot{\psi}_{ij}(t)\| \right\} = \\ & \max_k \left\{ \|\dot{\psi}_k(t)\| + \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \|\dot{\psi}_k(t)\| \right\} \leq \\ & 2n\beta, \text{ a.s.,} \end{aligned}$$

因此

$$\dot{V}_1(t) \leq -k_1 + 2n\beta k.$$

当 $k_1 > 2n\beta k$ 时, $V_1(t)$ 在有限时间内随机收敛于0, 即存在随机变量 $T_2(\varepsilon(0), w)$ 使得 $\lim_{t \rightarrow T_2(\varepsilon(0), w)} |\varepsilon(t)| = 0$, 说明对于每个 $w \in \Omega$, $\varepsilon(t)$ 有限时间内随机收敛到0, 并且因此 $V_1(t) - V_1(0) \leq -(k_1 - 2n\beta k)T_2(\varepsilon(0), w)$, a.s., $T_2(\varepsilon(0), w) \leq \frac{V_1(0)}{k_1 - 2n\beta k}$, 从而 $E(T_2(\varepsilon(0), w)) \leq \frac{E(V_1(0))}{k_1 - 2n\beta k}$, 即 $\lim_{t \rightarrow T_2(l_i(0), w)} |l_i(t) - k\rho_i(t)| = 0$, $E(T_2(l_i(0), w)) < +\infty$, 其中 $i \in \{1, \dots, n\}$. 因此智能体的运动半径能够在有限时间内随机收敛到编队半径. 证毕.

最后讨论编队角度的有限时间估计问题, 对系统(5)的第2个方程, 即系统(6), 进行分析.

引理6 考虑系统(6). 若假设1和假设2成立, 则每个智能体的期望环绕角度能够在随机有限时间内均匀分开.

证 系统(6)可以改写为如下形式:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\theta}}_i(t) &= \sum_{j=1}^n (a_{ij} \text{sgn}(\hat{\theta}_j(t) - \hat{\theta}_i(t)) + \\ & c_{ij}^2 (\hat{\theta}_j(t) - \hat{\theta}_i(t))) dt + \\ & \sum_{j=1}^n c_{ij} (\hat{\theta}_j(t) - \hat{\theta}_i(t)) dw_{ij}(t). \end{aligned}$$

令 $\tilde{\theta}_i(t) = \hat{\theta}_i(t) - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \hat{\theta}_j(t)$, 考虑李雅普诺夫函数 $V(t) = \sum_{i=1}^n \tilde{\theta}_i^2(t)$, 其中 $\tilde{\theta}(t) = [\tilde{\theta}_1(t) \ \tilde{\theta}_2(t) \ \dots \ \tilde{\theta}_n(t)]^T$, 类似于引理4的证明可以得到

$$LV(t) \leq -(2\lambda_2(L))^{\frac{1}{2}} V(t)^{\frac{1}{2}}.$$

令 $K_2 = (2\lambda_2(L))^{\frac{1}{2}}$, 可以得到 $E[T_3(\tilde{\theta}_i(0), w)] \leq \frac{2(V(\tilde{\theta}_i(0)))^{\frac{1-\alpha}{2}}}{K_2(1-\alpha)}$. 由引理2可知, 系统(6)的解 $\hat{\theta}(t)$ 可以

有限时间内随机收敛到0,且 $E[T_3(\theta_i(0), w)] < +\infty$.因此智能体环绕角度能够在有限时间内均匀分开.

证毕.

定理1 考虑系统(2). 若多智能体系统的网络拓扑是连通图, 并且假设1和假设2成立, 那么当 $\alpha_1 > 2^{\frac{1}{2}}\beta n^{\frac{1}{2}}$ 且 $k_1 > 2n\beta k$ 时, 控制协议(7)可以使多智能体系统(2)在有限时间内实现对多目标的环绕控制.

证 由引理4可得, 存在随机变量 $T_1(\tilde{\psi}_{ik}(0), w) > 0$, 对于任意的 $\varepsilon > 0$, $i \in \{1, \dots, n\}$, 使得 $P(w \mid \|\tilde{\psi}_{ik}(t) - \psi_k(t)\| < \varepsilon) \geq 1 - \varepsilon$, 并且 $\lim_{t \rightarrow T_1(\tilde{\psi}_{ik}(0), w)} \tilde{\psi}_{ik}(t) = \psi_k(t)$, $E[T_1(\tilde{\psi}_{ik}(0), w)] < +\infty$, 则所有智能体对目标位置估计能够在有限时间内随机收敛到目标位置. 由引理5可得, 存在随机变量 $T_2(l_i(0), w) > T_1(\tilde{\psi}_{ik}(0), w)$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, 使得 $\lim_{t \rightarrow T_2(l_i(0), w)} |l_i(t) - k\rho_i(t)| = 0$, 且 $E(T_2(l_i(0), w)) < +\infty$, 说明系统(2)中智能体的运动半径能够在有限时间内随机收敛到编队半径; 由引理6可得, 存在随机变量 $T_3(\theta_i(0), w) > T_2(l_i(0), w)$, 对于任意的 $\varepsilon > 0$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, 使得 $P\{w \mid |\theta_j(t) - \theta_i(t) - \frac{2\pi(j-i)}{n}| < \varepsilon\} \geq 1 - \varepsilon$, 并且 $\lim_{t \rightarrow T_3(\theta_i(0), w)} |\theta_j(t) - \theta_i(t) - \frac{2\pi(j-i)}{n}| = 0$, $E[T_3(\theta_i(0), w)] < +\infty$, 即智能体角度能够在有限时间内均匀分开. 对于系统(2), 类似于引理5的证明可以得到, 存在 $T_4(x_i(0), w)$, 使得当 $T_4(x_i(0), w) > T_3(\theta_i(0), w)$ 时, 系统(2)的解 $x_i(t)$ 可以在随机有限时间内收敛到 $\hat{x}_i(t)$, 即智能体在有限时间内可以到达设定的期望位置, 从而实现了系统(2)在有限时间内对多个目标的环绕控制. 证毕.

注3 不同于文献[19], 本文中的智能体首先对于目标的位置进行估计, 然后估计出目标的运动半径, 并且能在有限时间内随机收敛到目标的运动半径, 定理1表明多智能体系统可以在有限时间内实现对多个目标的环绕. 相比文献[19], 本文研究的结果更加符合实际的需求. 而且同时考虑随机因素影响和有限时间收敛的多目标环绕控制问题的成果还不多, 本文的研究丰富了这方面的研究结果.

5 数值仿真(Simulations)

考虑由4个智能体组成的多智能体系统, 其拓扑结构如图1所示.

设计存在6个目标, 并且按照如下的方程运动:

$$r_1(t) = \begin{bmatrix} 2 \sin(\omega t) + 2 + t \\ 2 \cos(\omega t) + 3 - t \end{bmatrix},$$

$$r_2(t) = \begin{bmatrix} 2 \sin(\omega t) + 3 + t \\ 2 \cos(\omega t) + 6 - t \end{bmatrix},$$

$$r_3(t) = \begin{bmatrix} 2 \sin(\omega t) + 9 + t \\ 2 \cos(\omega t) + 4 - t \end{bmatrix},$$

$$r_4(t) = \begin{bmatrix} 2 \sin(\omega t) + 10 + t \\ 2 \cos(\omega t) + 1 - t \end{bmatrix},$$

$$r_5(t) = \begin{bmatrix} 2 \sin(\omega t) + 8 + t \\ 2 \cos(\omega t) + 8 - t \end{bmatrix},$$

$$r_6(t) = \begin{bmatrix} 2 \sin(\omega t) + 11 + t \\ 2 \cos(\omega t) + 9 - t \end{bmatrix},$$

其中 ω 为角速度, 取 $\omega = \frac{\pi}{5}$.

另外取 $k = 3$, $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = 4$, $k_1 = 33$, $\gamma = 5$, 当

智能体*i*与智能体*j*之间互为邻居时, 给定 $a_{ij} = b_{ij} = c_{ij} = 1$, 否则 $a_{ij} = b_{ij} = c_{ij} = 0$. 设 $\{\dot{w}_{ij}(t), i, j = 1, 2, \dots, n\}$ 为标准白噪声, 初始状态取值为 $(5, -10), (2, 3), (10, 1), (11, 9)$.

图2-5表明各智能体的运动半径能够在有限时间内随机收敛到编队半径, 各智能体对目标位置的估计值能够在有限时间内随机收敛到目标位置, 各智能体初始角度能够在有限时间内随机收敛到编队角度, 最终各智能体会在有限时间内保持在圆形编队上并且围绕着所有目标, 实现环绕控制. 通过图5可以看出, 各智能体的状态将跟随着目标的变化而变化.

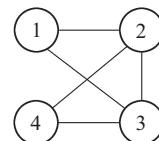


图1 多智能体系统通信拓扑图

Fig. 1 The fixed network topology of multi-agent systems

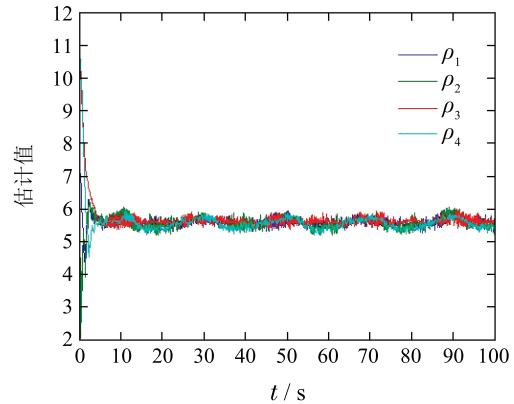


图2 各智能体对目标几何中心的估计

Fig. 2 The estimation of targets' geometric center of each agent

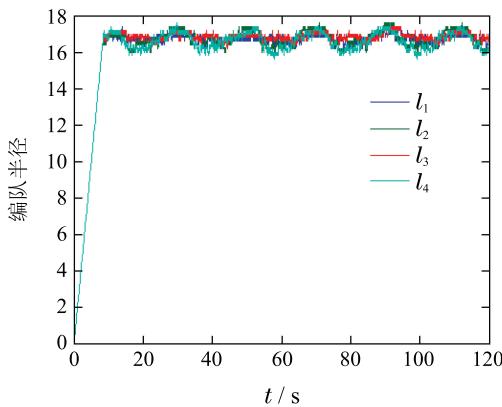


图3 各智能体期望的编队半径

Fig. 3 The desired formation radius of each agent

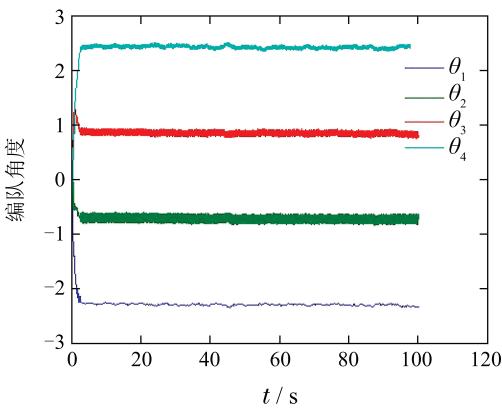


图4 各智能体期望的编队角度

Fig. 4 The desired formation angle of each agent

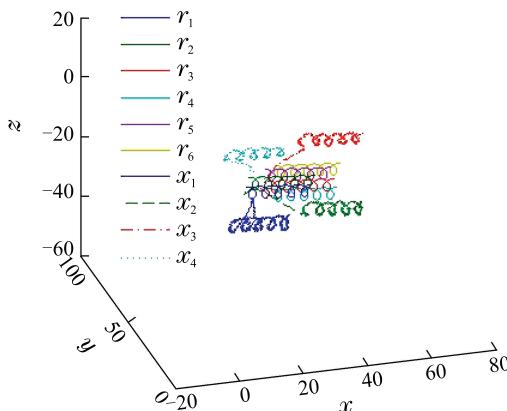


图5 固定拓扑下随机多智能体系统智能体及目标的轨迹立体图

Fig. 5 The 3D stereogram trajectories of the agents and targets of stochastic multi-agent systems with fixed topology

6 结论(Conclusions)

本文研究了随机多智能体系统对多目标的有限时间环绕控制问题。提出了通过编队控制的方式对多目标进行有限时间环绕控制的方法。本文假设每个智能体可以跟踪多个目标，不过每个目标只能被一个智能体跟踪。首先，为每个智能体设计了目标状态的估计

器，同时在白噪声干扰之下，证明了每个智能体能够在有限时间内对目标几何中心位置作出估计。其次，为每个智能体设计了环绕半径的估计器和分布式环绕的控制器。通过李雅普诺夫有限时间随机稳定性定理，证明了所有智能体能够在有限时间内对环绕半径作出估计，同时实现有限时间环绕控制。最后，通过仿真验证了本文的有效性和正确性。下一步工作会探讨如何将本文结果推广到有向网络和随机切换网络中。

参考文献(References):

- [1] VICSEK T, BEN-JACOB E, COHEN I I. Novel type of phase transition in a system of self-driven particles [J]. *Physical Review Letters*, 2006, 75(6): 1226 – 1229.
- [2] JADBABAIE A, LIN J, MORSE A S. Coordination of groups of mobile autonomous agents using nearest neighbor [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, 48(6): 988 – 1001.
- [3] OLFATI-SABERI R, MURRAY R M. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(9): 1520 – 1533.
- [4] REN W, BEARD R W. Consensus seeking in multiagent systems under dynamically changing interaction topologies [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, 50(5): 655 – 661.
- [5] YU W, CHEN G, REN W, et al. Distributed higher order consensus protocols in multi-agent dynamical systems [J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 2011, 58(8): 1924 – 1932.
- [6] XIAO F, WANG L, CHEN J, et al. Brief paper: finite-time formation control for multi-agent systems [J]. *Automatica*, 2009, 45(11): 2605 – 2611.
- [7] GUAN Z H, SUN F L, WANG Y W, et al. Finite-time consensus for leader-following second-order multi-agent networks [J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 2012, 59(11): 2646 – 2654.
- [8] LI T, ZHANG J F. Mean square average-consensus under measurement noises and fixed topologies: necessary and sufficient conditions [J]. *Automatica*, 2009, 45(8): 1929 – 1936.
- [9] CHENG L, HOU Z G, TAN M, et al. Necessary and sufficient conditions for consensus of double-integrator multi-agent systems with measurement noises [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2011, 56(8): 1958 – 1963.
- [10] CHENG L, HOU Z G, TAN M. A mean square consensus protocol for linear multi-agent systems with communication noises and fixed topologies [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2014, 59(59): 261 – 267.
- [11] ZHANG Y, TIAN Y P. Consentability and protocol design of multi-agent systems with stochastic switching topology [J]. *Automatica*, 2009, 45(5): 1195 – 1201.
- [12] MO Lipo, PAN Tingting. Mean-square bounded consensus of discrete-time multi-agent systems with external disturbance [J]. *Control Theory & Applications*, 2016, 33(3): 361 – 367.
(莫立坡, 潘婷婷. 受外界干扰的离散多智能体系统的均方有界一致性 [J]. 控制理论与应用, 2016, 33(3): 361 – 367.)
- [13] ZHENG Y S, CHEN W S, WANG L. Finite-time consensus for stochastic multi-agent systems [J]. *International Journal of Control*, 2011, 84(10): 1644 – 1652.
- [14] SUN Y, LI W, ZHAO D. Convergence time and speed of multi-agent systems in noisy environments [J]. *Chaos*, 2012, 22(4): 043126.
- [15] ZHAO L, JIA Y. Finite-time consensus for second-order stochastic multi-agent systems with nonlinear dynamics [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2015, 270(C): 278 – 290.

- [16] MARASCO A J, GIVIGI S N, RABBATH C A. Model predictive control for the dynamic encirclement of a target [C] //American Control Conference. Montreal, Canada: IEEE , 2012: 2004 – 2009.
- [17] CHEN F, REN W, CAO Y. Surrounding control in cooperative agent networks [J]. *Systems & Control Letters*, 2010, 59(11): 704 – 712.
- [18] WEI T, CHEN X. Collective surrounding control in multi-agent networks [J]. *Chinese Physics B*, 2014, 23(5): 050201.
- [19] ZHANG W, LIU J, ZENG D. Multiple dynamic targets encirclement control of multiagent systems [J]. *Mathematical Problems in Engineering*, 2015, (2015): 467060.
- [20] MO L, YU Y. Finite-time rotating encirclement control of multi-agent systems [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2017, 43(9): 1665–1672.
- [21] GODSIL C, ROYLE G, *Algebraic Graph Theory* [M]. New York: Springer, 2001.
- [22] CHEN W, JIAO L C. Finite-time stability theorem of stochastic nonlinear systems [J]. *Automatica*, 2010, 46(12): 2105 – 2108.
- [23] XIAO F, WANG L, CHEN J, et al. Finite-time formation control for multi-agent systems [J]. *Automatica*, 2009, 45(11): 2605 – 2611.
- [24] PEI W D, CHEN Z Q, YUAN Z S. A dynamic epidemic control model on uncorrelated complex networks [J]. *Chinese Physics B*, 2008, 17(2): 373 – 379.
- [25] DUAN M, SONG Y. Distributed encirclement control of multi-agent systems [J]. *Acta Physica Sinica*, 2014, 63(14): 1253 – 1258.

作者简介:

李智超 (1992-), 男, 硕士, 目前研究方向为多智能体系统的一致性, E-mail: lizhichao@sina.com.cn;

莫立坡 (1980-), 男, 博士, 副教授, 目前研究方向为鲁棒控制、多智能体系统的一致性, E-mail: beihangmlp@126.com;

郭少岩 (1993-), 男, 硕士研究生, 目前研究方向为随机多智能体系统的一致性, E-mail: sanj8023@163.com.