第 35 卷第 3 期
2018 年 3 月

控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications

Vol. 35 No. 3
Mar. 2018

DOI: 10.7641/CTA.2017.70475

一类脉冲随机系统的有限时间有界性分析与H_∞控制

姚凤麒†, 朱行行

(安徽工业大学 电气与信息工程学院, 安徽 马鞍山 243032)

摘要: 本文研究一类线性脉冲随机系统的有限时间有界性及H_∞控制问题. 首先, 利用Lyapunov函数和平均脉冲区间条件, 建立了系统有限时间均方有界定理; 其次, 基于H_∞控制理论, 获得了保证系统有限时间有界且满足一定的H_∞性能指标的判据; 再次, 针对有限时间H_∞控制问题, 给出了状态反馈控制器存在的充分条件. 最后, 用一个数值例子表明了理论结果的有效性.

关键词: 有限时间有界; H_∞控制; 脉冲随机系统; 平均脉冲区间

引用格式: 姚凤麒, 朱行行. 一类脉冲随机系统的有限时间有界性分析与H_∞控制. 控制理论与应用, 2018, 35(3): 291 – 298

中图分类号: TP273　　　**文献标识码**: A

Finite-time boundedness analysis and H-infinity control for a class of impulsive stochastic systems

YAO Feng-qi†, ZHU Xing-xing

(School of Electrical and Information Engineering, Anhui University of Technology, Maanshan Anhui 243032, China)

Abstract: This paper is concerned with the problem of the finite-time boundedness and H-infinity control for a class of linear impulsive stochastic systems. First, employing Lyapunov functions and the average impulsive interval technique, a theorem on the finite-time boundedness in the sense of mean square is established. Then, based on the theory of H-infinity control, a criterion guaranteeing both the finite-time boundedness and a certain H-infinity performance index is derived. Also, for the finite-time H-infinity control problem, some sufficient conditions for the existence of a state feedback controller are proposed. Finally, a numerical example is given to verify the effectiveness of the theoretical results.

Key words: finite-time boundedness; H-infinity control; impulsive stochastic systems; average impulsive interval

Citation: YAO Fengqi, ZHU Xingxing. Finite-time boundedness analysis and H-infinity control for a class of impulsive stochastic systems. *Control Theroy & Applications*, 2018, 35(3): 291 – 298

1 引言(Introduction)

众所周知, 随机噪声扰动在实际工程系统中是不可避免的, 当对系统精度要求较高时, 随机噪声扰动不可忽略. 而脉冲跳变刻画了系统状态在某些时刻的突变或重置, 如电力网路中开关电路的频繁改变、生物种群系统中对生物的捕捞或投放、给药导致的药物在血液中的浓度变化等. 脉冲随机系统综合考虑了随机噪声扰动和脉冲跳变这两个因素. 一个脉冲随机系统由连续的随机流、脉冲跳变函数和脉冲序列组成. 作为一类重要的混杂系统, 脉冲随机系统在近20年受到了广泛研究, 参见文献[1–6]及其中的参考文献.

然而, 关于脉冲随机系统的现有研究成果大部分是基于Lyapunov意义下的稳定性与控制. Lyapunov稳定性描述系统在无穷时间上的渐近行为, 它只反映系统的稳态性能, 却并不反映系统的暂态特性. 一个Lyapunov渐近稳定的系统, 可能具有很差的暂态特性, 如超调过大, 而这在实际工程系统中一般是不允许的. 例如导弹系统、通信网络系统、机器人操控系统等, 这些系统工作时间短暂, 人们更关心的常常是系统是否满足一定的暂态性能要求. 针对解决系统的暂态性能问题, 文献[7–8]于20世纪60年代提出了有限时间稳定的概念. 有限时间稳定, 或称短时间稳定, 是指系统

收稿日期: 2017−07−12; 录用日期: 2017−10−16.
†通信作者. E-mail: yaofengqi_ahut@163.com.
本文责任编委: 刘淑君.
国家自然科学基金项目(61403002), 安徽省高校优秀青年人才基金重点项目(2013SQRL024ZD), 安徽省高等学校自然科学研究重点项目(KJ2015A011)资助.
Supported by the National Natural Science Foundation of China (61403002), the Excellent Youthful Talent Foundation of Colleges and Universities of Anhui Province of China (2013SQRL024ZD) and the Natural Science Research of Universities of Anhui Province (KJ2015A011).

初始状态在某一范围内时, 系统的状态在一定的时间区间内不超过某一预先给定的界限. 时隔几十年, 有限时间稳定性问题最近再次引起了广泛关注, 并报道了一系列结果[9–15]. 2001年, Amato等人考虑系统的外部扰动, 将有限时间稳定这一概念推广到了有限时间有界[16].

H_∞控制一直是控制领域的研究热点, 系统的结果可参考文献[17–18]. 近年来, 许多学者综合考虑有限时间有界和有限时间H_∞控制问题. 比如, 文献 [19]针对一类带时变时滞的中立型切换系统, 利用时滞依赖Lyapunov-Krasovskii泛函和平均驻留时间法, 讨论了系统有限时间有界、基于观测器的有限时间镇定以及基于观测器的有限时间H_∞控制等问题. 采用平均驻留时间法, 文献[20]和文献[21]分别讨论了不带时滞的连续和离散线性切换系统的有限时间H_∞控制的问题, 而文献[22]则考虑了时滞和非线性, 获得了离散时滞非线性切换系统有限时间H_∞有界的时滞依赖条件. 文献[23]研究了控制输入约束下的非线性Markov跳变重复标量系统的有限时间H_∞控制问题. 针对线性随机切换系统, 文献[24]利用平均驻留时间法和多个类Lyapunov函数技巧, 以矩阵不等式的形式给出了系统有限时间有界的充分条件, 并为系统的有限时间H_∞控制问题设计了状态反馈控制器. 利用时变实值函数和Kronecker积, 文献[25]讨论了一类离散时变随机复杂网络在有限时间区间内的H_∞同步问题, 以递归线性矩阵不等式的形式给出了网络有限时间H_∞同步判据, 并考虑了该网络的有限时间H_∞状态估计问题. 利用Lyapunov函数、线性矩阵不等式和自由权矩阵, 文献[26]考虑了随机时变Markov切换系统的有限时间H_∞控制问题. 针对一类具有时变和有界干扰的非线性随机不确定系统, 文献[27]研究其有限时间H_∞滤波问题, 获得了系统有限时间H_∞滤波器存在的充分条件.

尽管对于各类系统的有限时间有界性和H_∞控制问题已有不少成果, 但有关脉冲随机系统的相关结果尚未见报道. 鉴于此, 本文拟针对一类线性脉冲随机系统的有限时间有界和有限时间H_∞控制问题展开研究. 首先, 建立系统有限时间稳定和有限时间有界的充分条件; 其次, 分析系统有限时间H_∞性能; 在此基础上, 针对有限时间H_∞控制问题, 给出状态反馈控制器存在的充分条件以及控制器增益的求解公式.

为了方便, 本文采用以下记号: $|\cdot|$为欧几里得范数; $\mathrm{E}[\cdot]$为数学期望算子; A^{T}为向量或矩阵A的转置; $A>0$ $(A<0)$为A是正定(负定)矩阵, $A\geqslant 0$ $(A\leqslant 0)$为A是半正定(或半负定)矩阵; I为适当维数的单位矩阵; $\lambda_{\max}(A)$ $(\lambda_{\min}(A))$为矩阵A的最大(最小)特征值; 在对称矩阵中, 用$*$表示由矩阵的对称性可以得到的矩阵元素.

2 预备知识(Preliminaries)

考虑如下线性脉冲随机系统:

$$\begin{cases} \mathrm{d}x(t)=[Ax(t)+Bu(t)+Dv(t)]\mathrm{d}t+ \\ \qquad Ex(t)\mathrm{d}w(t),\ t\neq t_k,\ t\geqslant 0, \\ x(t_k)=Fx(t_k^-), \qquad k\in\mathbb{N}, \\ z(t)=Cx(t), \qquad t\geqslant 0, \\ x(0)=x_0, \end{cases} \tag{1}$$

其中: $x(t)=(x_1(t)\ x_2(t)\ \cdots\ x_n(t))^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^n$是系统的状态变量; $x_0\in\mathbb{R}^n$为初始状态; $u(t)\in\mathbb{R}^m$, $z(t)\in\mathbb{R}^q$ 分别为系统的控制输入和控制输出; $v(t)$为满足$\int_0^{\mathrm{T}} v^{\mathrm{T}}(t)v(t)\mathrm{d}t\leqslant\delta(\delta\geqslant 0)$的能量有限外部干扰信号; $w(t)$为标准布朗运动或维纳过程; A,B,C,D,E,F为具有适当维数的实矩阵; 脉冲序列$\{t_k\}_{k\in\mathbb{N}}$满足$0\leqslant t_0<t_1<\cdots<t_k<\cdots$, $\lim\limits_{k\to\infty}t_k=\infty$. 对于任意的$t>s\geqslant 0$, $N(t,s)$表示区间$(s,t]$内的脉冲跳变次数.

记系统(1)的解过程为$x(t)=x(t;t_0,x_0)$, 并假设$x(t)$在脉冲时刻t_k处右连续且左极限存在.

定义 1 称系统(1) $(u(t)\equiv 0, v(t)\equiv 0)$是关于$(c_1,c_2,T)$有限时间均方稳定的, 若对于给定的正常数$c_1,c_2,T,\ 0\leqslant c_1<c_2$, 有

$$|x_0|^2\leqslant c_1\Rightarrow \mathrm{E}|x(t)|^2<c_2,\ t\in[0,T].$$

注 1 文献[28]研究了不带脉冲的线性随机系统的有限时间控制问题, 提出了系统关于(c_1,c_2,T,R) 有限时间随机稳定的概念. 本文定义1可视为文献[28]中定义的特例($R=I$).

定义 2 称系统(1) $(u(t)\equiv 0)$是关于(c_1,c_2,T,δ)有限时间均方有界的, 若对于给定的正常数$c_1,c_2,T,\ 0\leqslant c_1<c_2$, 以及任意的$v(t)$ 满足

$$\int_0^T v^{\mathrm{T}}(t)v(t)\mathrm{d}t\leqslant\delta,$$

有$|x_0|^2\leqslant c_1\Rightarrow \mathrm{E}|x(t)|^2<c_2,\ t\in[0,T]$.

注 2 有限时间有界(稳定)是指在一定的外部扰动(不存在外部扰动)的条件下, 当初始状态有界时, 系统的状态轨迹在有限的时间区间内也保持在事先给定的范围内. 可见, 有限时间有界和有限时间稳定的区别主要是在于有无外部扰动, 而有限时间稳定可视为有限时间有界的特例($\delta=0$).

定义 3[29] 对于脉冲序列$\{t_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, 若存在正整数N_0和正数τ_{a}, 使得对于任意的$t>s\geqslant 0$, 有

$$\frac{t-s}{\tau_{\mathrm{a}}}-N_0\leqslant N(t,s)\leqslant\frac{t-s}{\tau_{\mathrm{a}}}+N_0, \tag{2}$$

则该脉冲序列的平均脉冲区间为τ_{a}; 特别地, 若$N_0=1$, 则该脉冲序列为等间隔分布, 且$t_k-t_{k-1}=\tau_{\mathrm{a}}$, $k\in\mathbb{N}$.

对系统(1)设计状态反馈控制器

$$u(t)=Kx(t), \tag{3}$$

则得到如下闭环系统:

$$\begin{cases}\mathrm{d}x(t)=[(A+BK)x(t)+Dv(t)]\mathrm{d}t+\\ \qquad Ex(t)\mathrm{d}w(t),\ t\neq t_k,\ t\geqslant 0,\\ x(t_k)=Fx(t_k^-), \qquad k\in\mathbb{N},\\ z(t)=Cx(t), \qquad t\geqslant 0,\\ x(0)=x_0,\end{cases} \tag{4}$$

式中K为待求的反馈增益矩阵.

定义 4[24]　对于给定常数$\beta>0,\ \gamma>0$, 若

i) 系统(1) ($u(t)\equiv 0$) 是关于(c_1,c_2,T,δ)有限时间均方有界的;

ii) 在零初始条件下, 对于任意的非零外部扰动$v(t)$满足$\int_0^T v^{\mathrm{T}}(t)v(t)\mathrm{d}t\leqslant\delta$ ($\delta\geqslant 0$), 控制输出$z(t)$满足

$$\mathrm{E}\int_0^T \mathrm{e}^{-\beta t}z^{\mathrm{T}}(t)z(t)\mathrm{d}t<\gamma^2\int_0^T v^{\mathrm{T}}(t)v(t)\mathrm{d}t,$$

则称系统(1)有限时间均方有界且满足H_∞性能指标γ.

本文的主要工作为

a) 建立系统(1)有限时间均方有界的充分条件;

b) 设计状态反馈控制器(3), 使得闭环系统(4)有限时间均方有界且满足一定的H_∞性能指标.

引理 1 (Schur补引理)　对实数矩阵$N, M=M^{\mathrm{T}}, R=R^{\mathrm{T}}$, 以下条件等价:

i) $\begin{pmatrix}M & N\\ N^{\mathrm{T}} & R\end{pmatrix}<0$;

ii) $R<0$ 且 $M-NR^{-1}N^{\mathrm{T}}<0$;

iii) $M<0$ 且 $R-N^{\mathrm{T}}M^{-1}N<0$.

3　有限时间有界性分析(Analysis of finite-time boundedness)

本节讨论系统(1)($u(t)\equiv 0$)的有限时间均方有界性. 利用Lyapunov函数以及平均脉冲区间法可建立以下定理.

定理 1　假设脉冲序列满足平均脉冲区间条件(2). 对于给定正数c_1, c_2和T, $0\leqslant c_1<c_2$, 若存在适当维数的对称矩阵$P>0, Q>0$以及标量$\alpha, \mu>0$, 使得

$$\begin{bmatrix}A^{\mathrm{T}}P+PA-\alpha P & PD & E^{\mathrm{T}}P\\ * & -Q & 0\\ * & * & -P\end{bmatrix}\leqslant 0, \tag{5}$$

$$F^{\mathrm{T}}PF-\mu P\leqslant 0, \tag{6}$$

$$\alpha+\frac{\ln\mu}{\tau_{\mathrm{a}}}>0, \tag{7}$$

$$(\alpha+\frac{\ln\mu}{\tau_{\mathrm{a}}})T+N_0|\ln\mu|<\\ \ln\lambda_1c_2-\ln(\lambda_2c_1+\lambda_3\delta), \tag{8}$$

式中: $\lambda_1=\lambda_{\min}(P),\ \lambda_2=\lambda_{\max}(P),\ \lambda_3=\lambda_{\max}(Q)$, 则系统(1)($u(t)\equiv 0$)是关于$(c_1,c_2,T,\delta)$有限时间均方有界的.

证　选取Lyapunov函数

$$V(t)=x^{\mathrm{T}}(t)Px(t). \tag{9}$$

首先, 当$t\in[t_l,t_{l+1})(l=0,1,2,\cdots)$时, 根据Itô微分公式可得

$$\mathrm{d}V(t)=\mathcal{L}V(t)\mathrm{d}t+2x^{\mathrm{T}}(t)PEx(t)\mathrm{d}w(t),$$

式中$\mathcal{L}V$为随机微分算子, 计算如下:

$$\mathcal{L}V(t)=\\ 2x^{\mathrm{T}}(t)P[Ax(t)+Dv(t)]+x^{\mathrm{T}}(t)E^{\mathrm{T}}PEx(t)=\\ \begin{bmatrix}x(t)\\ v(t)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}A^{\mathrm{T}}P+PA+E^{\mathrm{T}}PE & PD\\ * & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(t)\\ v(t)\end{bmatrix}.$$

由式(5)和Schur补引理, 有

$$\mathcal{L}V(t)\leqslant\alpha V(t)+v^{\mathrm{T}}(t)Qv(t). \tag{10}$$

由Itô 微分公式, 又有

$$\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-\alpha t}V(t))=\\ -\alpha\mathrm{e}^{-\alpha t}V(t)\mathrm{d}t+\mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{d}V(t)=\\ \mathrm{e}^{-\alpha t}(\mathcal{L}V(t)-\alpha V(t))\mathrm{d}t+\\ 2\mathrm{e}^{-\alpha t}x^{\mathrm{T}}(t)PEx(t)\mathrm{d}w(t)\leqslant\\ \mathrm{e}^{-\alpha t}v^{\mathrm{T}}(t)Qv(t)\mathrm{d}t+2\mathrm{e}^{-\alpha t}x^{\mathrm{T}}(t)PEx(t)\mathrm{d}w(t),\\ \forall t\in[t_l,t_{l+1}),\ l=0,1,2,\cdots.$$

对上式在两端从t_l到t取积分, 然后取数学期望可得, $\forall t\in[t_l,t_{l+1}),\ l=0,1,2,\cdots$,

$$\mathrm{E}V(t)\leqslant\\ \mathrm{e}^{\alpha(t-t_l)}\mathrm{E}V(t_l)+\int_{t_l}^t \mathrm{e}^{\alpha(t-s)}v^{\mathrm{T}}(s)Qv(s)\mathrm{d}s. \tag{11}$$

其次, 对于$l\in\mathbb{N}$, 由式(6)可得

$$V(t_l)=x^{\mathrm{T}}(t_l)Px(t_l)=\\ x^{\mathrm{T}}(t_l^-)F^{\mathrm{T}}PFx(t_l^-)\leqslant\\ \mu x^{\mathrm{T}}(t_l^-)Px(t_l^-)=\mu V(t_l^-),$$

因而

$$\mathrm{E}V(t_l)\leqslant\mu\mathrm{E}V(t_l^-). \tag{12}$$

下面根据式(11)和式(12)对$\mathrm{E}V(t)$进行估计. 当$t\in[t_k,t_{k+1}),\ k\geqslant 1$时, 由式(11)和式(12)可得

$$\mathrm{E}V(t)\leqslant$$

$$\mathrm{e}^{\alpha(t-t_k)}\mathrm{E}V(t_k)+\int_{t_k}^{t}\mathrm{e}^{\alpha(t-s)}v^{\mathrm{T}}(s)Qv(s)\mathrm{d}s\leqslant$$
$$\mu\mathrm{e}^{\alpha(t-t_k)}\mathrm{E}V(t_k^-)+\int_{t_k}^{t}\mathrm{e}^{\alpha(t-s)}v^{\mathrm{T}}(s)Qv(s)\mathrm{d}s\leqslant$$
$$\mu\mathrm{e}^{\alpha(t-t_k)}[\mathrm{e}^{\alpha(t_k-t_{k-1})}\mathrm{E}V(t_{k-1})+$$
$$\int_{t_{k-1}}^{t_k}\mathrm{e}^{\alpha(t_k-s)}v^{\mathrm{T}}(s)Qv(s)\mathrm{d}s]+$$
$$\int_{t_k}^{t}\mathrm{e}^{\alpha(t-s)}v^{\mathrm{T}}(s)Qv(s)\mathrm{d}s=$$
$$\mu\mathrm{e}^{\alpha(t-t_{k-1})}\mathrm{E}V(t_{k-1})+\int_{t_k}^{t}\mathrm{e}^{\alpha(t-s)}v^{\mathrm{T}}(s)Qv(s)\mathrm{d}s+$$
$$\mu\int_{t_{k-1}}^{t_k}\mathrm{e}^{\alpha(t-s)}v^{\mathrm{T}}(s)Qv(s)\mathrm{d}s\leqslant$$
$$\mu^2\mathrm{e}^{\alpha(t-t_{k-1})}\mathrm{E}V(t_{k-1}^-)+\int_{t_k}^{t}\mathrm{e}^{\alpha(t-s)}v^{\mathrm{T}}(s)Qv(s)\mathrm{d}s+$$
$$\mu\int_{t_{k-1}}^{t_k}\mathrm{e}^{\alpha(t-s)}v^{\mathrm{T}}(s)Qv(s)\mathrm{d}s.$$

继续迭代可得

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}V(t)\leqslant\\&\mu^{N(t,0)}\mathrm{e}^{\alpha t}V(0)+\int_{t_k}^{t}\mathrm{e}^{\alpha(t-s)}v^{\mathrm{T}}(s)Qv(s)\mathrm{d}s+\\&\mu\int_{t_{k-1}}^{t_k}\mathrm{e}^{\alpha(t-s)}v^{\mathrm{T}}(s)Qv(s)\mathrm{d}s+\\&\cdots+\mu^{N(t,0)}\int_0^{t_1}\mathrm{e}^{\alpha(t-s)}v^{\mathrm{T}}(s)Qv(s)\mathrm{d}s=\\&\mathrm{e}^{\alpha t}\mu^{N(t,0)}V(0)+\int_0^t\mu^{N(t,s)}\mathrm{e}^{\alpha(t-s)}v^{\mathrm{T}}(s)Qv(s)\mathrm{d}s.\end{aligned}\tag{13}$$

当$t\in[0,t_1)$时, (13)显然也成立. 故(13)对所有$t\geqslant 0$都成立. 下面分$\mu\geqslant 1$和$0<\mu<1$两种情况进行讨论.

当$\mu\geqslant 1$时, 由不等式$N(t,s)\leqslant\dfrac{t-s}{\tau_{\mathrm{a}}}+N_0$可得

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}V(t)\leqslant\mu^{N_0+\frac{t}{\tau_{\mathrm{a}}}}\mathrm{e}^{\alpha t}V(0)+\\&\int_0^t\mu^{N_0+\frac{t}{\tau_{\mathrm{a}}}}\mathrm{e}^{\alpha(t-s)}v^{\mathrm{T}}(s)Qv(s)\mathrm{d}s\leqslant\\&\mu^{N_0}\mathrm{e}^{(\alpha+\frac{\ln\mu}{\tau_{\mathrm{a}}})t}[\lambda_2|x_0|^2+\int_0^t v^{\mathrm{T}}(s)Qv(s)\mathrm{d}s],\ t\geqslant 0.\end{aligned}$$

当$t\in[0,T]$时, 注意到式(7), 有

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}V(t)\leqslant\\&\mu^{N_0}\mathrm{e}^{(\alpha+\frac{\ln\mu}{\tau_{\mathrm{a}}})T}[\lambda_2|x_0|^2+\int_0^T v^{\mathrm{T}}(s)Qv(s)\mathrm{d}s]\leqslant\\&\mu^{N_0}\mathrm{e}^{(\alpha+\frac{\ln\mu}{\tau_{\mathrm{a}}})T}[\lambda_2|x_0|^2+\lambda_3\delta],\ t\in[0,T].\end{aligned}\tag{14}$$

当$0<\mu<1$, 利用$\dfrac{t-s}{\tau_{\mathrm{a}}}-N_0\leqslant N(t,s)$, 类似可得

$$\begin{aligned}\mathrm{E}V(t)\leqslant\mu^{-N_0}\mathrm{e}^{(\alpha+\frac{\ln\mu}{\tau_{\mathrm{a}}})T}[\lambda_2|x_0|^2+\lambda_3\delta],\\ t\in[0,T].\end{aligned}\tag{15}$$

由式(14)–(15)可得, 无论$\mu\geqslant 1$或$0<\mu<1$, 当$|x_0|^2<c_1$时, 都有

$$\begin{aligned}&\lambda_1\mathrm{E}|x(t)|^2\leqslant\mathrm{E}V(t)\leqslant\\&\mathrm{e}^{N_0|\ln\mu|+(\alpha+\frac{\ln\mu}{\tau_{\mathrm{a}}})T}[\lambda_2c_1+\lambda_3\delta],\ t\in[0,T].\end{aligned}$$

再由条件(8), 立即可得

$$\mathrm{E}|x(t)|^2<c_2,\ t\in[0,T],$$

即系统(1) ($u(t)\equiv 0$)是关于(c_1,c_2,T,δ)有限时间均方有界的. 证毕.

注 3 在定理1中, μ刻画了脉冲跳变幅度. 根据μ的取值, 脉冲可分为3 种类型: 一类为镇定脉冲($0<\mu<1$), 即脉冲有助于系统的稳定性; 一类为反镇定脉冲($\mu>1$), 即脉冲不利于系统的稳定; 第3类为中立脉冲($\mu=1$), 即对系统的稳定性无影响, 此时系统相当于无脉冲作用的连续系统.

注 4 根据的不同取值, 定理1的条件(8)有如下不同的形式:

1) $\mu>1$. 此时条件(8)可写为

$$\tau_{\mathrm{a}}>\frac{T\ln\mu}{\ln\lambda_1c_2-\ln(c_1\lambda_2+\lambda_3\delta)-\alpha T-N_0\ln\mu}>0,\tag{16}$$

易见式(16)要求

$$\alpha T<\ln\lambda_1c_2-\ln(c_1\lambda_2+\lambda_3\delta)-N_0\ln\mu.\tag{17}$$

下面说明条件(16)–(17)是合理的. 一方面, 因为$\mu>1$时, 脉冲为反镇定脉冲, 对系统的稳定性不利, 因此要求脉冲不能发生的过于频繁, 即平均脉冲区间不能过小, 即条件(16). 另一方面, 既然脉冲不利于系统稳定, 自然需要系统的连续部分不能增长过快(连续部分的增长速率由α决定), 即条件(17). 鉴于本文考虑的是系统的有限时间有界性, 不要求系统状态收敛到零, 故不要求$\alpha<0$.

2) $0<\mu<1$. 此时条件(8)等价于以下两种情况之一:

情形 1

$$\ln\lambda_1c_2-\ln(c_1\lambda_2+\lambda_3\delta)-\alpha T+N_0\ln\mu\geqslant 0.\tag{18}$$

情形 2

$$\ln\lambda_1c_2-\ln(c_1\lambda_2+\lambda_3\delta)-\alpha T+N_0\ln\mu<0,\tag{19}$$

且

$$\tau_{\mathrm{a}}<\frac{T\ln\mu}{\ln\lambda_1c_2-\ln(c_1\lambda_2+\lambda_3\delta)-\alpha T+N_0\ln\mu}.\tag{20}$$

对于情形1, 从式(18)可见系统连续部分的增长速率α的上界受到控制, 可保证连续部分为有限时间有界; 而脉冲为镇定脉冲, 不影响系统的有界性, 故对脉冲区间无限制. 对于情形2, 式(19)意味着连续部分增长速率α较大, 不能保证连续部分的有限时间有界性, 整个系统的有限时间有界性需由镇定脉冲来保证, 故要求脉冲序列的平均脉冲区间足够小, 即条件(20).

3) $\mu=1$. 此时系统相当于无脉冲作用的连续系统, 条件(8)可写为$\alpha T<\ln\lambda_1c_2-\ln(c_1\lambda_2+\lambda_3\delta)$, 即要求系统的连续部分不可增长过快.

当$v(t)\equiv 0$时, 基于定理1可得以下有关有限时间均方稳定的推论. 证明过程类似于定理1, 在此省略.

推论 1　假设脉冲序列满足平均脉冲区间条件(2). 对于给定正数c_1, c_2和$T, 0 \leqslant c_1 < c_2$, 若存在适当维数的对称矩阵$P > 0$以及标量α, $\mu > 0$使得条件(6)–(7)成立, 且

$$\begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}}P + PA - \alpha P & E^{\mathrm{T}}P \\ * & -P \end{bmatrix} \leqslant 0,$$

$$(\alpha + \frac{\ln\mu}{\tau_{\mathrm{a}}})T + N_0|\ln\mu| < \ln\lambda_1 c_2 - \ln\lambda_2 c_1,$$

则系统(1) ($u(t) \equiv 0, v(t) \equiv 0$)是关于$(c_1, c_2, T)$有限时间均方稳定的.

注 5　定理1中条件(5)–(8)不是线性矩阵不等式, 不能直接利用线性矩阵不等式工具箱求解. 实际上, 条件(8)可写为以下3个不等式:

$$\lambda_1 I \leqslant P \leqslant \lambda_2 I, \tag{21}$$

$$Q \leqslant \lambda_3 I, \tag{22}$$

$$(\lambda_2 c_1 + \lambda_3\delta)\mathrm{e}^{(\alpha + \frac{\ln\mu}{\tau_{\mathrm{a}}})T + N_0|\ln\mu|} < \lambda_1 c_2. \tag{23}$$

因此, 定理1中各条件可按以下步骤求解:

步骤 1　选择标量α和μ满足不等式(7).

步骤 2　以$P > 0, Q > 0, \lambda_i > 0, i = 1, 2, 3$为未知变量, 求解线性矩阵不等式(5)–(6), (21)–(23).

下一节中定理2和定理3的条件可类似求解.

4　有限时间H_∞控制(Finite-time H_∞ control)

本节研究系统(1)的H_∞控制问题. 首先基于上一节的有限时间有界定理, 分析系统(1) ($u(t) \equiv 0$)的H_∞性能, 建立以下定理.

定理 2　假设脉冲序列满足平均脉冲区间条件(2). 对于给定正数c_1, c_2,和T, 且$0 \leqslant c_1 < c_2$, 若存在合适维数的对称矩阵$P > 0$以及标量α, $\mu > 0$, $\gamma > 0$ 使得

$$F^{\mathrm{T}}PF - \mu P \leqslant 0, \tag{24}$$

$$\alpha + \frac{\ln\mu}{\tau_{\mathrm{a}}} > 0, \tag{25}$$

$$(\alpha + \frac{\ln\mu}{\tau_{\mathrm{a}}})T + N_0|\ln\mu| < \ln\lambda_1 c_2 - \ln(\lambda_2 c_1 + \gamma^2\delta), \tag{26}$$

$$\begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}}P + PA - \alpha P & PD & E^{\mathrm{T}}P & C^{\mathrm{T}} \\ * & -\gamma^2 I & 0 & 0 \\ * & * & -P & 0 \\ * & * & * & -I \end{bmatrix} \leqslant 0, \tag{27}$$

则系统(1) ($u(t) \equiv 0$)关于(c_1, c_2, T, δ)有限时间均方有界且满足H_∞性能指标$\overline{\gamma} = \gamma\mathrm{e}^{N_0|\ln\mu|}$.

证　根据Schur补引理可知条件(27)蕴含着

$$\begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}}P + PA - \alpha P & PD & E^{\mathrm{T}}P \\ * & -\gamma^2 I & 0 \\ * & * & -P \end{bmatrix} \leqslant 0. \tag{28}$$

令$Q = \gamma^2 I$, 则式(5)成立, 故根据定理1可知系统(1) ($u(t) \equiv 0$) 关于(c_1, c_2, T, δ)有限时间均方有界, 即满足定义4中的条件(1).

下面证明定义4中的条件(2)也成立. 由式(27)和Schur补引理可得

$$\begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}}P + PA + E^{\mathrm{T}}PE + C^{\mathrm{T}}C - \alpha P & PD \\ * & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \leqslant 0.$$

选取Lyapunov函数

$$V(t) = x^{\mathrm{T}}(t)Px(t), \tag{29}$$

随机微分算子$\mathcal{L}V$计算如下:

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}V(t) = 2x^{\mathrm{T}}(t)P[Ax(t) + Dv(t)] + \\ &x^{\mathrm{T}}(t)E^{\mathrm{T}}PEx(t) = \\ &\begin{bmatrix} x(t) \\ v(t) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}}P + PA + E^{\mathrm{T}}PE & PD \\ * & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \leqslant \\ &\begin{bmatrix} x(t) \\ v(t) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} -C^{\mathrm{T}}C + \alpha P & 0 \\ * & \gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ v(t) \end{bmatrix} = \\ &-x^{\mathrm{T}}(t)C^{\mathrm{T}}Cx(t) + \alpha x^{\mathrm{T}}(t)Px(t) + \gamma^2 v^{\mathrm{T}}(t)v(t) = \\ &\alpha V(t) + \gamma^2 v^{\mathrm{T}}(t)v(t) - z^{\mathrm{T}}(t)z(t). \end{aligned}$$

类似于式(13), 可以证明, 对于任意的$t \geqslant 0$,

$$\begin{aligned} &\mathrm{E}V(t) \leqslant \\ &\mathrm{e}^{\alpha t}\mu^{N(t,0)}V(0) + \\ &\mathrm{E}\int_0^t \mu^{N(t,s)}\mathrm{e}^{\alpha(t-s)}[\gamma^2 v^{\mathrm{T}}(t)v(t) - z^{\mathrm{T}}(t)z(t)]\mathrm{d}s, \end{aligned} \tag{30}$$

若初始条件为零, 则有

$$\begin{aligned} &0 \leqslant \mathrm{E}V(t) \leqslant \\ &\mathrm{E}\int_0^t \mu^{N(t,s)}\mathrm{e}^{\alpha(t-s)}[\gamma^2 v^{\mathrm{T}}(t)v(t) - z^{\mathrm{T}}(t)z(t)]\mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{31}$$

式(31)意味着

$$\begin{aligned} &\mathrm{E}\int_0^t \mu^{N(t,s)}\mathrm{e}^{\alpha(t-s)}z^{\mathrm{T}}(s)z(s)\mathrm{d}s \leqslant \\ &\int_0^t \mu^{N(t,s)}\mathrm{e}^{\alpha(t-s)}\gamma^2 v^{\mathrm{T}}(s)v(s)\mathrm{d}s,\ t \geqslant 0. \end{aligned}$$

当$\mu \geqslant 1$时, 由$\frac{t-s}{\tau_{\mathrm{a}}} - N_0 \leqslant N(t,s) \leqslant \frac{t-s}{\tau_{\mathrm{a}}} + N_0$可得

$$\begin{aligned} &\mathrm{E}\int_0^t \mu^{\frac{t-s}{\tau_{\mathrm{a}}} - N_0}\mathrm{e}^{\alpha(t-s)}z^{\mathrm{T}}(s)z(s)\mathrm{d}s \leqslant \\ &\int_0^t \mu^{\frac{t-s}{\tau_{\mathrm{a}}} + N_0}\mathrm{e}^{\alpha(t-s)}\gamma^2 v^{\mathrm{T}}(s)v(s)\mathrm{d}s,\ t \geqslant 0, \end{aligned} \tag{32}$$

整理得

$$\mathrm{E}\int_0^t \mathrm{e}^{-(\alpha+\frac{\ln\mu}{\tau_{\mathrm{a}}})s} z^{\mathrm{T}}(s)z(s)\mathrm{d}s < \mu^{2N_0}\gamma^2\int_0^t v^{\mathrm{T}}(s)v(s)\mathrm{d}s = \gamma^2\mathrm{e}^{2N_0\ln\mu}\int_0^t v^{\mathrm{T}}(s)v(s)\mathrm{d}s,\ t\geqslant 0.$$

取$t=T$, 有

$$\mathrm{E}\int_0^T \mathrm{e}^{-(\alpha+\frac{\ln\mu}{\tau_{\mathrm{a}}})s} z^{\mathrm{T}}(s)z(s)\mathrm{d}s < \gamma^2\mathrm{e}^{2N_0\ln\mu}\int_0^T v^{\mathrm{T}}(s)v(s)\mathrm{d}s. \tag{33}$$

当$0<\mu<1$时, 类似可得

$$\mathrm{E}\int_0^T \mathrm{e}^{-(\alpha+\frac{\ln\mu}{\tau_{\mathrm{a}}})s} z^{\mathrm{T}}(s)z(s)\mathrm{d}s < \gamma^2\mathrm{e}^{-2N_0\ln\mu}\int_0^T v^{\mathrm{T}}(s)v(s)\mathrm{d}s. \tag{34}$$

令

$$\bar{\gamma}=\gamma\mathrm{e}^{N_0|\ln\mu|},\ \beta=\alpha+\frac{\ln\mu}{\tau_{\mathrm{a}}},$$

则由式(33)–(34)可知, 无论$\mu\geqslant 1$还是$0<\mu<1$, 都有

$$\mathrm{E}\int_0^T \mathrm{e}^{-\beta s}z^{\mathrm{T}}(s)z(s)\mathrm{d}s\leqslant\bar{\gamma}^2\int_0^T v^{\mathrm{T}}(s)v(s)\mathrm{d}s,$$

即满足定义4中的条件(2).

综上所述, 脉冲随机系统(1)($u(t)\equiv 0$) 有限时间均方有界且满足H_∞性能指标$\bar{\gamma}=\gamma\mathrm{e}^{N_0|\ln\mu|}$.

证毕.

下面将基于定理2, 对系统(1)设计有限时间H_∞状态反馈控制器.

定理 3 假设脉冲序列满足平均脉冲区间条件(2). 对于给定正数c_1, c_2和T, $0\leqslant c_1<c_2$, 若存在适当维数的矩阵$X>0$和Y以及标量$\alpha,\mu>0,\gamma>0$使得

$$\begin{bmatrix}\Sigma_{11} & D & XE^{\mathrm{T}} & XC^{\mathrm{T}}\\ * & -\gamma^2I & 0 & 0\\ * & * & -X & 0\\ * & * & * & -I\end{bmatrix}\leqslant 0, \tag{35}$$

$$\begin{bmatrix}-\mu X & XF^{\mathrm{T}}\\ * & -X\end{bmatrix}\leqslant 0, \tag{36}$$

$$\alpha+\frac{\ln\mu}{\tau_{\mathrm{a}}}>0, \tag{37}$$

$$(\alpha+\frac{\ln\mu}{\tau_{\mathrm{a}}})T+N_0|\ln\mu|<\ln\lambda_1c_2-\ln(\lambda_2c_1+\gamma^2\delta), \tag{38}$$

其中:

$$\Sigma_{11}=AX+XA^{\mathrm{T}}+BY+Y^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}-\alpha X,$$
$$\lambda_1=\lambda_{\min}(X^{-1}),\ \lambda_2=\lambda_{\max}(X^{-1}).$$

则存在状态反馈控制器(3)使得闭环系统(4)关于(c_1, c_2, T, δ)有限时间均方有界且满足H_∞性能指标$\bar{\gamma}=\gamma\mathrm{e}^{N_0|\ln\mu|}$, 并且控制器的增益矩阵为$K=YX^{-1}$.

证 将定理2的条件(27)中A替换为$A+BK$, 可以得到

$$\begin{bmatrix}\bar{\Sigma}_{11} & PD & E^{\mathrm{T}}P & C^{\mathrm{T}}\\ * & -\gamma^2I & 0 & 0\\ * & * & -P & 0\\ * & * & * & -I\end{bmatrix}\leqslant 0, \tag{39}$$

其中

$$\bar{\Sigma}_{11}=(A+BK)^{\mathrm{T}}P+P(A+BK)-\alpha P.$$

令

$$X=P^{-1},\ Y=KX.$$

对不等式(39)分别左乘和右乘$\mathrm{diag}\{X,I,X,I\}$, 即得式(35). 同样地, 对定理2的条件(24)左乘和右乘X可以得到

$$XF^{\mathrm{T}}X^{-1}FX-\mu X\leqslant 0, \tag{40}$$

由Schur补引理知, 式(40)等价于式(36).

因此, 由定理2可知, 闭环系统(4)关于(c_1,c_2,T,δ)有限时间均方有界且满足H_∞性能指标$\bar{\gamma}=\gamma\mathrm{e}^{N_0|\ln\mu|}$.

证毕.

5 数值算例(Numerical example)

考虑脉冲随机系统(1), 其系数矩阵如下:

$$A=\begin{bmatrix}-1.3 & 1.1\\ 0.5 & 0.2\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1.1 & 0.3\\ 0.9 & 0.7\end{bmatrix},$$
$$C=[0.2\ \ 0.2],\ D=\begin{bmatrix}0.5 & 0.4\\ 0.1 & 0.2\end{bmatrix},$$
$$E=\begin{bmatrix}0.1 & 0.2\\ 0.2 & 0.3\end{bmatrix},\ F=\begin{bmatrix}1.05 & 0\\ 0 & 1.05\end{bmatrix}.$$

取$N_0=3$, $\tau_{\mathrm{a}}=0.2$, 假设脉冲序列满足平均脉冲区间条件(2), 如图1所示.

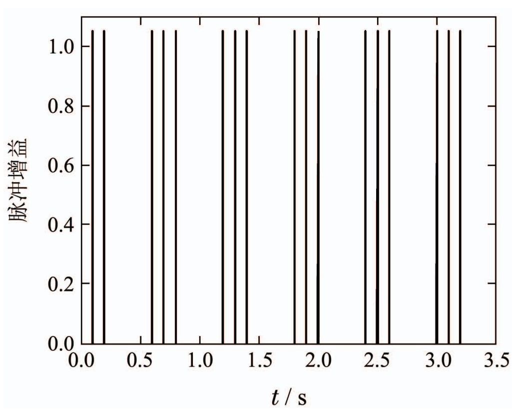

图 1 脉冲序列$\tau_{\mathrm{a}}=0.2, N_0=3$

Fig. 1 Impulse sequence with $\tau_{\mathrm{a}}=0.2, N_0=3$

取

$$c_1 = 0.5,\ c_2 = 5,\ T = 2,\ \mu = 1.05^2 = 1.1025,$$
$$\alpha = -0.4,\ \gamma = 2.2,\ \delta = 0.1,$$

取外部扰动输入为

$$v(t) = [0.1\mathrm{e}^{-0.2t}\ \ 0.1\mathrm{e}^{-0.2t}]^{\mathrm{T}},$$

计算可得该扰动满足条件

$$\int_0^2 v^{\mathrm{T}}(t)v(t)\mathrm{d}t = 0.0275 < \delta = 0.1.$$

利用LMI工具箱求解定理1中的不等式(5)–(8), 无可行解. 取初始状态为$x(0) = [0.5\ \ 0.5]^{\mathrm{T}}$, 开环系统的均方状态轨迹如图2所示, 可见开环系统(1)($u(t) \equiv 0$)不是关于(c_1, c_2, T, δ)有限时间均方有界的.

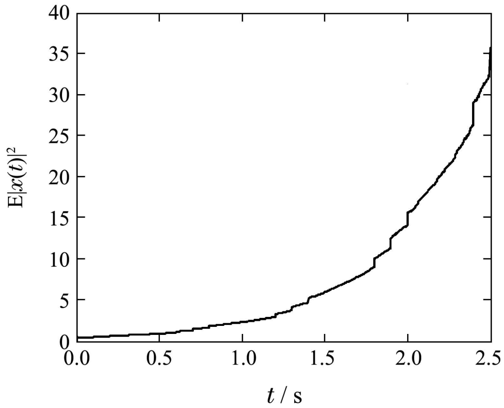

图 2　开环系统均方轨迹

Fig. 2　The mean square state trajectory of the open system

下面根据定理3设计有限时间H_∞状态反馈控制器. 求解定理3的条件(35)–(38), 得到一组可行解为

$$X = \begin{bmatrix} 3.3956 & -0.8427 \\ -0.8427 & 3.3461 \end{bmatrix},$$
$$Y = \begin{bmatrix} 3.8508 & -5.7415 \\ -5.7415 & 3.0021 \end{bmatrix},$$

状态反馈控制器的增益矩阵为

$$K = YX^{-1} = \begin{bmatrix} 0.7554 & -1.5256 \\ -1.5661 & 0.5028 \end{bmatrix}.$$

仍取$x(0) = [0.5\ \ 0.5]^{\mathrm{T}}$, 闭环系统的均方状态轨迹如图3. 由图3可见, 基于所设计的H_∞状态反馈控制器, 闭环系统是关于(c_1, c_2, T, δ)有限时间均方有界的.

另一方面, 令

$$\beta = \alpha + \frac{\ln\mu}{\tau_{\mathrm{a}}} = 0.0879,\ \bar{\gamma} = \gamma\mathrm{e}^{N_0|\ln\mu|} = 2.9482.$$

根据仿真计算得

$$\int_0^2 \mathrm{e}^{-\beta t}z^{\mathrm{T}}(t)z(t)\mathrm{d}t = 0.0281,$$

满足

$$\int_0^2 \mathrm{e}^{-\beta t}z^{\mathrm{T}}(t)z(t)\mathrm{d}t \leqslant \bar{\gamma}^2\int_0^2 v^{\mathrm{T}}(t)v(t)\mathrm{d}t = 0.0811.$$

因此, 闭环系统满足H_∞性能指标$\bar{\gamma}$.

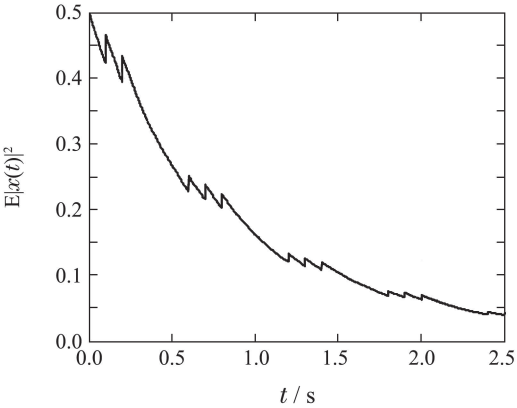

图 3　闭环系统均方轨迹

Fig. 3　The mean square state trajectory of the closed system

6　结论(Conclusions)

本文研究了一类无时滞线性脉冲随机系统的有限时间有界性和有限时间H_∞控制问题. 基于H_∞控制理论、Lyapunov函数以及随机分析技巧, 建立了系统有限时间均方有界和有限时间均方稳定的充分条件. 基于所得的充分条件, 对系统进行了有限时间H_∞性能分析, 并设计了H_∞状态反馈控制器. 文中定理可同时适用于镇定脉冲、反镇定脉冲和中立脉冲, 并且采用的平均脉冲区间条件对脉冲区间的上界或下界没有限制, 而仅对平均脉冲间隔提出要求, 降低了保守性. 最后通过数值仿真验证了所提方法的有效性. 带时滞脉冲随机系统的有限时间H_∞控制问题有待进一步研究.

参考文献(References):

[1] YAO F, CAO J, CHENG P, et al. Generalized average dwell time approach to stability and input-to-state stability of hybrid impulsive stochastic differential systems [J]. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 2016, 22(11): 147 – 160.

[2] YAO F, CAO J, QIU L, et al. Exponential stability analysis for stochastic delayed differential systems with impulsive effects: average impulsive interval approach [J]. *Asian Journal of Control*, 2017, 19(1): 74 – 86.

[3] YAO F, DENG F. Stability of impulsive stochastic functional differential systems in terms of two measures via comparison approach [J]. *Science China Information Sciences*, 2012, 55(6): 1313 – 1322.

[4] LIU B. Stability of solutions for stochastic impulsive systems via comparison approach [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2008, 53(9): 2128 – 2133.

[5] PENG S, ZHANG Y. Razumikhin-type theorems on *p*th moment exponential stability of impulsive stochastic delay differential equations [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, 55(8): 1917 – 1922.

[6] ZHU Q. The *p*th moment exponential stability of impulsive stochastic functional differential equations with Markovian switching [J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2014, 351(7): 3965 – 3986.

[7] DORATO P. Short-time stability in linear time-varying systems [R] //*Proceeding of the IRE International Convention Record*. Athens: IEEE, 1961, 4: 83 – 87.

[8] WEISS L, INFANTE E. Finite time stability under perturbing forces and on product spaces [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1967, 12(1): 54 – 59.

[9] AMATO F, ARIOLA M, COSENTINO C. Finite-time stability of linear time-varying systems: analysis and controller design [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, 55(4), 1003 – 1008.

[10] LIN X, LI S, ZOU Y. Finite-time stabilization of switched linear time-delay systems with saturating actuators [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2017, 299(4): 66 – 79.

[11] WU Y, CAO J, ALOFI A, et al. Finite-time boundedness and stabilization of uncertain switched neural networks with time-varying delay [J]. *Neural Networks*, 2015, 69(9): 135 – 143.

[12] XU J, SUN J. Finite-time stability of nonlinear switched impulsive systems [J]. *International Journal of Systems Science*, 2013, 44(5): 889 – 895.

[13] CHEN Y, LIU Q, LU R, et al. Finite-time control of switched stochastic delayed systems [J]. *Neurocomputing*, 2016, 191(5): 374 – 379.

[14] ZHANG Weihai, Liu Heming. Finite-time control of stochastic Markovian jump systems [J]. *Control Theory & Applications*, 2015, 32(3): 334 – 340.
(张维海, 刘鹤鸣. 随机马尔科夫跳跃系统有限时间控制 [J]. 控制理论与应用, 2015, 32(3): 334 – 340.)

[15] TIAN Xiaomin, FEI Shumin, CHA Lin. Finite-time synchronization of fractional-order chaotic systems by considering dead-zone phenomenon [J]. *Control Theory & Applications*, 2015, 32(9): 1240 – 1245.
(田小敏, 费树岷, 柴琳. 具有死区输入的分数阶混沌系统的有限时间同步(英文) [J]. 控制理论与应用, 2015, 32(9): 1240 – 1245.)

[16] AMATO F, ARIOLA M, DORATO P. Finite-time control of linear systems subject to parametric uncertainties and disturbances [J]. *Automatica*, 2001, 37(9): 1459 – 1463.

[17] CHEN B. *Robust and* H_∞ *Control* [M]. New York: Springer, 2000.

[18] ZHANG W, XIE L, CHEN B. *Stochastic* $\mathrm{H}_2/\mathrm{H}_\infty$ *Control: A Nash Game Approach* [M]. Boca Raton: CRC Press, 2017.

[19] DONG Y, LIU W, LI T, et al. Finite-time boundedness analysis and H_∞ control for switched neutral systems with mixed time-varying delays [J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2017, 354(2): 787 – 811.

[20] LIU H, ZHAO X. Finite-time H_∞ control of switched systems with mode-dependent average dwell time [J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2014, 351(3): 1301 – 1315.

[21] SHI S, FEI Z, LI J. Finite-time H_∞ control of switched systems with mode-dependent average dwell time [J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2016, 353(1): 221 – 234.

[22] ZONG G, WANG R, ZHENG W X, et al. Finite-time H_∞ control for discrete-time switched nonlinear systems with time delay [J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2015, 25(6): 914 – 936.

[23] CHEN M, YANG X, SHEN H, et al. Finite-time asynchronous H_∞ control for Markov jump repeated scalar non-linear systems with input constraints [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2016, 275 (2): 172 – 180.

[24] XIANG Z, QIAO C, MAHMOUD M. Finite-time analysis and H_∞ control for switched stochastic systems [J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2012, 349(3): 915 – 927.

[25] SHEN B, WANG Z, LIU X. Bounded synchronization and state estimation for discrete time-varying stochastic complex networks over a finite horizon [J]. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2011, 22(1): 145 – 157.

[26] QI W, GAO X. Finite-time H_∞ control for stochastic time-delayed Markovian switching systems with partly known transition rates and nonlinearity [J]. *International Journal of Systems Science*, 2016, 47(2): 500 – 508.

[27] YAN Zhiguo, ZHANG Guoshan. Finite-time H_∞ filtering for a class of nonlinear stochastic uncertain systems [J]. *Control and Decision*, 2012, 27(3): 419 – 424.
(严志国, 张国山. 一类非线性随机不确定系统有限时间H_∞滤波 [J]. 控制与决策, 2012, 27(3): 419 – 424.)

[28] ZHANG W, AN X. Finite-time control of linear stochastic systems [J]. *International Journal of Innovative Computing Information and Control*, 2008, 4(3): 687 – 694.

[29] LU J, HO D, CAO J. A unified synchronization criterion for impulsive dynamical networks [J]. *Automatica*, 2010, 46(7): 1215 – 1221.

作者简介:

姚凤麒 (1984–), 女, 博士, 硕士生导师, 研究方向为随机混杂系统的稳定性与控制, E-mail: yaofengqi_ahut@163.com;

朱行行 (1991–), 男, 硕士研究生, 研究方向为随机系统的有限时间稳定性, E-mail: zxxatayy@163.com.