DOI: 10.7641/CTA.2017.70513

基于去随机化方法的Markov跳变系统有限频段控制

万海英, 栾小丽†, 刘 飞

(江南大学 自动化研究所 轻工过程先进控制教育部重点实验室, 江苏 无锡 214122)

摘要: 针对Markov跳变系统, 本文利用去随机化方法将随机跳变系统转化为包含转移速率信息的确定系统, 并讨论系统在给定时间内的控制问题, 将特定频段干扰信号的频率信息引入控制器设计, 以确保系统满足有限频段性能指标; 同时从时间的角度设计给定时间控制器, 使系统状态轨迹在工艺要求的时间内受限运动. 所提方案不仅从频率、时间的尺度对系统频域特性及暂态性能进行综合分析, 还充分考虑模态跳变对整体系统性能的影响, 为降低现有设计方法的保守性提供了新的思路. 最后仿真示例验证了所提方法的有效性及优越性.

关键词: 去随机化; Markov跳变系统; 有限频段; 给定时间控制器; 干扰抑制

引用格式: 万海英, 栾小丽, 刘飞. 基于去随机化方法的Markov跳变系统有限频段控制. 控制理论与应用, 2018, 35(7): 1002 – 1008

中图分类号: TP273　　　**文献标识码**: A

Derandomization based finite-frequency control for Markov jump system

WAN Hai-ying, LUAN Xiao-li†, LIU Fei

(Key Laboratory for Advanced Process Control of Light Industry of Ministry of Education, Institute of Automation, Jiangnan University, Wuxi Jiangsu 214122, China)

Abstract: This paper converts the stochastic Markov jump system into a deterministic system by the derandomization method and discusses the control issue within the given time interval. Not only the finite-frequency domain performance is satisfied by introducing the frequency information of external disturbances with specific band into the controller design, but also the state trajectories are guaranteed to stay within the desired bound in the required time via designing a given-time controller. The proposed scheme investigates the frequency domain and transient performances of the system from both frequency and time aspects. What is more, the effect of mode jumping on the performance of the whole system is analyzed, which provides a new way to reduce the conservativeness of the existing design methods. Finally, simulation example verifies the effectiveness and superiority of the proposed technique.

Key words: derandomization; Markov jump system; finite-frequency; given-time controller; disturbance rejection

Citation: WAN Haiying, LUAN Xiaoli, LIU Fei. Derandomization based finite-frequency control for Markov jump system. *Control Theroy & Applications*, 2018, 35(7): 1002 – 1008

1 引言(Introduction)

以广义Kalman-Yakubovich-Popov(GKYP)引理为基础的有限频段控制方法近年来成为控制理论研究的前沿与热点, 使得基于有限频域的正实性[1–3] 控制及滤波[4–6]、故障检测[7–8]等问题得到了广泛关注, 其中大部分研究成果局限于线性定常系统, 鲜有文献涉及实际工程中更具代表性的混杂系统, 如Markov跳变系统等[9]. 最近文献[10]尝试将GKYP引理推广到Markov跳变系统, 设计控制器使得各子系统满足有限频段性能指标. 由于忽略了转移速率对系统性能的影响, 各子系统满足有限频段性能指标并不意味着整个系统也同样满足, 因此上述方法具有一定的局限性.

为充分考虑转移速率对系统性能的影响, 文献[11–12]将去随机化思想引入Markov跳变系统的研究中, 通过将原跳变系统转化为确定系统, 分析了Markov跳变系统的稳定性分析、极点配置等, 为Markov跳变系统的分析与综合提供了新思路. 另外, 实际工程如生物发酵过程、网络通信系统等, 相比于无穷时间

收稿日期: 2017−07−27; 录用日期: 2017−12−04.

†通信作者. E-mail: xlluan@jiangnan.edu.cn; Tel.: +86 510-85326295.

本文责任编委: 方海涛.

国家自然科学基金项目(61473137, 61722306)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (61473137, 61722306).

下系统的渐进稳定性, 人们更关心其能否在有限的短时间内满足暂态要求, 即在工艺要求的短时间内使得系统状态轨迹受限运动[13–15].

综上所述, 为了克服文献[10]中所提方法的局限性, 确保整个系统满足有限频段性能的同时, 状态轨迹在给定时间内不超过一定的界限, 本文引入去随机化方法, 将转移速率对系统影响纳入考虑范围, 为去随机化后的确定系统设计给定时间控制器, 使得系统具有特定频段的干扰抑制水平, 同时状态轨迹在给定时间内受限运行. 最后通过与已有结果的比较, 仿真示例验证了本文所提方法的优越性.

注 1　$\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^q$分别为n, m, q维实数向量的集合; $\varnothing$表示空集; $o(\Delta t)$表示Δt的高阶无穷小; $\mathrm{sym}\,(A)$表示$A+A^{\mathrm{T}}$; $A^{\perp}$表示矩阵A的核空间; $\mathrm{E}\,\{\cdot\}$为数学期望值; $\otimes$为矩阵的直积; *为对称矩阵的对称部分; $\mathrm{diag}\{\cdots\}$表示分块对角矩阵; $\lambda_{\max}(Q)$ 和$\lambda_{\min}(Q)$分别为矩阵Q 的最大和最小特征值.

2　问题描述(Problem statement)

在给定完备概率空间(Ω, F, P)下考虑连续时间Markov跳变系统:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(r(t))x(t) + B(r(t))u(t) + \\ \qquad B_{\mathrm{w}}(r(t))w(t), \\ z(t) = C(r(t))x(t) + D_{\mathrm{w}}(r(t))w(t), \\ x(0) = x_0,\ r(0) = r_0, \end{cases} \tag{1}$$

其中: $x(t) \in \mathbb{R}^n$是系统的状态向量, $u(t) \in \mathbb{R}^m$是系统控制输入向量, $z(t) \in \mathbb{R}^q$是被控输出向量, $w(t)$为有限频段干扰输入, $r(t)$是系统模态, 取值于有限集

$$S = \{1, 2, \cdots, i, \cdots, s\}.$$

在t时刻, $r(t) = i,\ i \in S$; $A(r(t))$, $B(r(t))$, $B_{\mathrm{w}}(r(t))$, $C(r(t))$, $D_{\mathrm{w}}(r(t))$为依赖于模态$r(t)$的适维矩阵. x_0, r_0分别代表系统的初始状态与初始模态. 连续系统的转移概率定义为

$$P_{\mathrm{r}}\{r(t+\Delta t) = j | r(t) = i\} = \\ \begin{cases} \lambda_{ij}\Delta t + \mathrm{o}(\Delta t), & i \neq j, \\ 1 + \lambda_{ij}\Delta t + \mathrm{o}(\Delta t), & i = j, \end{cases} \tag{2}$$

其中:

$$\Delta t > 0,\ \lim_{\Delta t \to 0}(\frac{\mathrm{o}(\Delta t)}{\Delta t}) = 0,$$

λ_{ij}表示系统从t时刻时模态i跳变到$t+\Delta t$时刻时模态j的转移速率, 且对于每一模态i都有

$$\begin{cases} \lambda_{ij} \geqslant 0, \\ \lambda_{ii} = -\sum\limits_{j=1, i \neq j}^{s} \lambda_{ij}, \end{cases} \forall i, j \in S,\ i \neq j. \tag{3}$$

本文考虑跳变转移速率部分未知情形下的控制器设计问题, 即转移速率矩阵有如下形式:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & ? & \cdots & \lambda_{1\mathrm{s}} \\ \lambda_{21} & ? & \cdots & ? \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ? & \lambda_{\mathrm{s}2} & \cdots & \lambda_{\mathrm{ss}} \end{bmatrix}, \tag{4}$$

其中“?”代表未知元素. 对$\forall i \in S$, 设$S = S_{\mathrm{K}}^i + S_{\mathrm{UK}}^i$, 定义

$$\begin{aligned} S_{\mathrm{K}}^i &\triangleq \{j : \lambda_{ij}\text{为已知转移速率}\}, \\ S_{\mathrm{UK}}^i &\triangleq \{j : \lambda_{ij}\text{为未知转移速率}\}. \end{aligned} \tag{5}$$

若集合$S_{\mathrm{K}}^i \neq \varnothing$, 则可表示为$S_{\mathrm{K}}^i = \{k_1^i, k_2^i, \cdots, k_m^i\}$, 式中$m$为正整数, 满足$1 \leqslant m \leqslant s$, $k_j^i \in \mathbb{Z}^+, 1 \leqslant k_j^i \leqslant s$. 此外, 记$\lambda_{\mathrm{K}}^i \triangleq \sum\limits_{j \in S_{\mathrm{K}}^i} \lambda_{ij}$.

为简化模型, 下文的推理过程将省去中间变量$r(t)$, 当$r(t) = i$时分别用A_i, B_i, $B_{\mathrm{w}i}$, C_i, $D_{\mathrm{w}i}$ 表示$A(r(t))$, $B(r(t))$, $B_{\mathrm{w}}(r(t))$, $C(r(t))$, $D_{\mathrm{w}}(r(t))$, 则系统(1)可简写为

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t) + B_{\mathrm{w}i} w(t), \\ z(t) = C_i x(t) + D_{\mathrm{w}i} w(t). \end{cases} \tag{6}$$

为避免跳变过程所具有的随机性而导致各子模态系统的性能与原系统不等价的情况, 本文先对跳变系统进行去随机化处理, 将随机跳变系统转化为包含转移速率信息的确定系统, 具体转化方法如下:

对于集合$A \in \mathbb{R}$, 相对于参数φ定义如下指示函数$\mathbf{1}_A$:

$$\mathbf{1}_A(\varphi) = \begin{cases} 1,\ \varphi \in A, \\ 0,\ \text{其他}, \end{cases} \tag{7}$$

且定义

$$q_i(t) = \mathrm{E}\left\{x(t)\mathbf{1}_{\{r(t)=i\}}\right\}. \tag{8}$$

对于跳变系统(6), 考虑如下状态反馈控制器:

$$u(t) = K_i x(t), \tag{9}$$

则结合式(6)–(9)可得

$$\begin{aligned} \mathrm{d}q_j(t) = {} & \mathrm{E}\left\{\mathrm{d}x(t)\mathbf{1}_{\{r(t)=j\}} + x(t)\mathrm{d}\mathbf{1}_{\{r(t)=j\}}\right\} = \\ & \mathrm{E}\left\{\left[(A_j + B_j K_j)\, x(t)\mathrm{d}t + B_{\mathrm{w}j} w(t)\mathrm{d}t\right] \right. \\ & \left. \mathbf{1}_{\{r(t)=j\}}\right\} + \mathrm{E}\left\{x(t)\right\}\mathrm{E}\left\{\mathrm{d}\mathbf{1}_{\{r(t)=j\}}\right\} = \\ & (A_j + B_j K_j)\,\mathrm{E}\left\{x(t)\mathbf{1}_{\{r(t)=j\}}\mathrm{d}t\right\} + \\ & B_{\mathrm{w}j} w(t)\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^{s} \lambda_{ij} q_i(t)\mathrm{d}t = \\ & \bar{A}_j q_j(t)\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^{s} \lambda_{ij} q_i(t)\mathrm{d}t + B_{\mathrm{w}j} w(t)\mathrm{d}t, \end{aligned} \tag{10}$$

其中$\bar{A}_j = A_j + B_j K_j$.

整理上式可得

$$
\begin{pmatrix} \mathrm{d}q_1(t) \\ \vdots \\ \mathrm{d}q_s(t) \end{pmatrix} =
\begin{pmatrix} \bar{A}_1 q_1(t) \\ \vdots \\ \bar{A}_s q_s(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{21} & \cdots & \lambda_{s1} \\ \vdots & & & \vdots \\ \lambda_{1\mathrm{s}} & \lambda_{2s} & \cdots & \lambda_{\mathrm{ss}} \end{pmatrix} \times
\begin{pmatrix} q_1(t) \\ \vdots \\ q_s(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{\mathrm{w}1} w(t) \\ \vdots \\ B_{\mathrm{w}s} w(t) \end{pmatrix}. \tag{11}
$$

令

$$
\begin{aligned}
q(t) &= (q_1(t) \cdots q_{\mathrm{s}}(t))^{\mathrm{T}}, \\
\tilde{w}(t) &= (w(t) \cdots w(t))^{\mathrm{T}}, \\
\tilde{z}(t) &= (z_1(t) \cdots z_{\mathrm{s}}(t))^{\mathrm{T}},
\end{aligned}
$$

则原随机跳变系统(6)可转化:

$$
\begin{cases} \dot{q}(t) = (\mathcal{A} + \Delta\mathcal{A} + \mathcal{B}\hat{K}) q(t) + \mathcal{B}_{\mathrm{w}} \tilde{w}(t), \\ \tilde{z}(t) = \mathcal{C} q(t) + \mathcal{D}_{\mathrm{w}} \tilde{w}(t), \end{cases} \tag{12}
$$

其中:

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{A} = \mathrm{diag}\{A_1, A_2, \cdots, A_{\mathrm{s}}\} + P^{\mathrm{T}}_{\Theta S^i{}_{\mathrm{K}}} \otimes I_n, \\
&\Delta\mathcal{A} = P^{\mathrm{T}}_{\Theta S^i_{\mathrm{UK}}} \otimes I_n, \\
&\hat{K} = \mathrm{diag}\{K_1, K_2, \cdots, K_{\mathrm{s}}\}, \\
&\mathcal{B} = \mathrm{diag}\{B_1, B_2, \cdots, B_{\mathrm{s}}\}, \\
&\mathcal{B}_{\mathrm{w}} = \mathrm{diag}\{B_{\mathrm{w}1}, B_{\mathrm{w}2}, \cdots, B_{\mathrm{w}s}\}, \\
&\mathcal{C} = \mathrm{diag}\{C_1, C_2, \cdots, C_{\mathrm{s}}\}, \\
&\mathcal{D}_{\mathrm{w}} = \mathrm{diag}\{D_{\mathrm{w}1}, D_{\mathrm{w}2}, \cdots, D_{\mathrm{w}s}\}, \\
&P_{\Theta S^i_{\mathrm{K}}} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & 0 & \cdots & \lambda_{1\mathrm{s}} \\ \lambda_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \lambda_{\mathrm{s}2} & \cdots & \lambda_{\mathrm{ss}} \end{pmatrix}, \\
&P_{\Theta S^i_{\mathrm{UK}}} = \begin{pmatrix} 0 & ? & \cdots & 0 \\ 0 & ? & \cdots & ? \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ? & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

注 2 基于去随机化方法将原跳变系统等价转化为范数相同的确定的系统, 在研究其相关控制问题, 相对于目前已有的研究方法具有以下两点明显优势: a) 可直接利用GKYP引理解决有限频段控制问题, 无需扩展; b) 状态空间方程(12)中不仅显示了大系统$\mathcal{A}$与各子模态系统$A_i(i=1,2,\cdots)$之间的内在联系, 还包含转移速率信息, 即有效地将跳变过程中的随机性考虑到控制器的设计中. 因此本文所提方法保守性更小.

注 3 去随机化后, Markov跳变系统的转移速率矩阵经转置后融合在确定系统系数矩阵中, 此时原来跳变系统中将转移速率矩阵未知元素与未知元素分离的方法不再适用. 考虑到线性系统中若某个参数由已知部分和未知部分构成, 则将未知部分视为整个参数的不确定性, 将上述Markov跳变系统转移速率未知部分视为转化后确定系统的不确定性处理, 描述为$\Delta\mathcal{A} = E\Sigma F$, 其中$E, F$为已知矩阵, 且$\Sigma\Sigma^{\mathrm{T}} = I$.

本文的目标为针对特定频段噪声干扰设计控制器使被控系统满足有限频段性能指标同时在给定时间内系统暂态性能满足一定要求, 故需作如下定义:

定义 1 对于存在干扰输入的系统(12), 若存在常数c_1, c_2, T以及正定矩阵R, 对$t \in [0, T]$有下式成立:

$$
x^{\mathrm{T}}(0) R x(0) \leqslant c_1 \Rightarrow \mathrm{E}\{x^{\mathrm{T}}(t) R x(t)\} \leqslant c_2,
$$

则称系统(12)相对于$(c_1,\ c_2,\ T, R)$是有限时间有界的.

定义 2 对于系统(12), 若其传递函数的无穷范数满足

$$
\|G_{\mathrm{zw}}(\mathrm{j}\omega)\|_{\infty}^{\varpi_1 < \omega < \varpi_2} < \gamma,
$$

则称该系统满足有限频段H_∞性能指标γ.

引理 1 (见参考文献[16]) 给定对称矩阵Ψ及一般矩阵E和F, 若$\Psi + E\Sigma F + F^{\mathrm{T}}\Sigma^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}} < 0, \forall \Sigma\Sigma^{\mathrm{T}} \leqslant I$ 当且仅当存在常数$\varepsilon > 0$, 使得

$$
\Psi + \varepsilon^{-1} E E^{\mathrm{T}} + \varepsilon F^{\mathrm{T}} F < 0\ .
$$

引理 2 (Finsler's lemma[17]) 对于$H \in \mathbb{R}^n, \varGamma \in \mathbb{R}^{n\times n}, \varLambda \in \mathbb{R}^{n\times m}, \varLambda^{\perp}$为任何满足$\varLambda^{\perp}\varLambda = 0$的矩阵, 以下各式是等价的:

1) $H^{\mathrm{T}}\varGamma H < 0, \forall \varLambda^{\mathrm{T}} H = 0,\ H \neq 0$;
2) $\varLambda^{\perp}\varGamma\varLambda^{\perp\mathrm{T}} < 0$;
3) $\exists \mu \in \mathbb{R}^n$, 使得$\varGamma - \mu\varLambda\varLambda^{\mathrm{T}} < 0$;
4) $\exists \varPhi \in \mathbb{R}^{m\times n}$, 使得$\varGamma + \varLambda\varPhi + \varPhi^{\mathrm{T}}\varLambda^{\mathrm{T}} < 0$.

引理 3 (Gronwall不等式[17]) 已知$v(t)$为一个非负函数, 且满足

$$
v(t) \leqslant a + b\int_0^t v(s)\mathrm{d}s,\ 0 \leqslant t < T,
$$

那么对于常数$a, b \geqslant 0$, 可以得到如下不等式:

$$
v(t) \leqslant a\mathrm{e}^{bt},\ 0 \leqslant t < T.
$$

引理 4 (Schur补引理) 对给定对称矩阵

$$
S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix},
$$

其中S_{11}是$r \times r$的, 则以下3个条件是等价的:

1) $S < 0$;
2) $S_{11} < 0, S_{22} - S_{12}^{\mathrm{T}} S_{11}^{-1} S_{12} < 0$;
3) $S_{22} < 0, S_{11} - S_{12} S_{22}^{-1} S_{12}^{\mathrm{T}} < 0$.

引理 5 (GKYP引理[18]) 考虑传递函数为

$$
G(\mathrm{j}\omega) = C(\mathrm{j}\omega I - A)^{-1}B + D
$$

的线性系统, 给定对称矩阵$\varPi$和$\varXi$, 以下两个描述是等价的:

1) 有限频段不等式:

$$\begin{pmatrix} G(\mathrm{j}\omega) \\ I \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \varPi \begin{pmatrix} G(\mathrm{j}\omega) \\ I \end{pmatrix} < 0.$$

2) 存在对称矩阵P, Q, 且满足$Q > 0$, 且

$$\begin{pmatrix} A & B \\ I & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \varXi \begin{pmatrix} A & B \\ I & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C & D \\ 0 & I \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \varPi \begin{pmatrix} C & D \\ 0 & I \end{pmatrix} < 0.$$

注 4 本文主要是针对中频段干扰信号设计控制器使被控系统在频域方面满足有限频段H_∞性能指标, 故取

$$\varXi = \begin{pmatrix} -Q_i & P_i + \mathrm{j}\varpi_{\mathrm{c}} Q_i \\ * & -\varpi_1\varpi_2 Q_i \end{pmatrix},$$

$$\varPi = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{pmatrix},$$

$$\varpi_{\mathrm{c}} = \frac{\varpi_1 + \varpi_2}{2},$$

其中ϖ_1, ϖ_2分别为中频干扰的上界和下界.

3 主要结果(Main results)

以下将对转移速率部分未知的连续Markov跳变系统展开讨论, 经过去随机化处理后, 本文的目标转化为针对转化后系统的增广状态设计H_∞控制器使系统状态轨迹在给定时间内受限运动同时满足有限频域性能指标.

定理 1 已知给定参数$\alpha, \gamma, \varepsilon, T$均大于0, 且$c_2 > c_1 > 0$, 若存在对称矩阵$\bar{M} > 0, Q > 0, \bar{P} > 0$, 与矩阵$\bar{K}$, 满足以不等式:

$$\begin{bmatrix} -\bar{P} & \bar{M} + \mathrm{j}\varpi_{\mathrm{c}}\bar{P} - Q & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & \varPsi_1 & Q^{\mathrm{T}}E & Q^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}} & \mathcal{B}_{\mathrm{w}} & Q^{\mathrm{T}}\mathcal{C}^{\mathrm{T}} \\ * & * & -\varepsilon I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\varepsilon^{-1}I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\gamma^2 I & \mathcal{D}_\omega^{\mathrm{T}} \\ * & * & *I & * & * & I \end{bmatrix} < 0, \tag{13}$$

$$\begin{bmatrix} \mathrm{sym}\left(\mathcal{A}Q + \mathcal{B}\bar{K}\right) & 0 & QE & F^{\mathrm{T}} \\ * & -\alpha\hat{Q} & 0 & 0 \\ * & * & -\varepsilon I & 0 \\ * & * & * & -\varepsilon^{-1}I \end{bmatrix} < 0, \tag{14}$$

$$c_1\lambda_2\mathrm{e}^{\alpha t} - c_2\lambda_1 < 0, \tag{15}$$

$$R^{-1}\lambda_1 < Q < R^{-1}\lambda_2, \tag{16}$$

其中:

$$\hat{Q} = Q^{-1} = R^{-\frac{1}{2}}\tilde{Q}R^{-\frac{1}{2}},$$

$$\varPsi_1 = \mathrm{sym}[\mathcal{A}Q + \mathcal{B}\bar{K}] - \varpi_1\varpi_2\bar{P},$$

$$\mathrm{sym}[\mathcal{A}Q+\mathcal{B}\bar{K}] = [\mathcal{A}Q+\mathcal{B}\bar{K}] + [\mathcal{A}Q+\mathcal{B}\bar{K}]^{\mathrm{T}},$$

则系统(12)关于(c_1, c_2, T, R)是有限时间有界的, 且满足有限频段H_∞性能指标$\|G_{\mathrm{zw}}(\mathrm{j}\omega)\|_\infty^{\varpi_1<\omega<\varpi_2} < \gamma$, 其控制器增益为$\hat{K} = \bar{K}Q^{-1}$.

证 首先证明上述条件可保证系统有限时间有界, 取Lyapunov函数为$V(q) = q^{\mathrm{T}}(t)\hat{Q}q(t)$, 对其求导可得

$$\dot{V}(q) = q^{\mathrm{T}}(t)\{\mathrm{sym}[(\mathcal{A} + \Delta\mathcal{A} + \mathcal{B}\hat{K})\hat{Q}]\}q(t).$$

对条件(14)左乘右乘$\mathrm{diag}\{\hat{Q}, I, I, I\}$并结合Schur补引理可得

$$\mathrm{sym}[(\mathcal{A} + \mathcal{B}\hat{K})\hat{Q}] + \varepsilon EE^{\mathrm{T}} + \varepsilon^{-1}\hat{Q}^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}}F\hat{Q} - \alpha\hat{Q} < 0. \tag{17}$$

由引理1, 式(17)可化为

$$\mathrm{sym}[(\mathcal{A} + \mathcal{B}\hat{K})\hat{Q}] + \mathrm{sym}(E\varSigma F\hat{Q}) - \alpha\hat{Q} < 0, \tag{18}$$

又$\Delta\mathcal{A} = E\varSigma F$且结合引理2可得

$$\mathrm{sym}[(\mathcal{A} + \Delta\mathcal{A} + \mathcal{B}\hat{K})\hat{Q}] - \alpha\hat{Q} < 0. \tag{19}$$

由上式可得

$$q^{\mathrm{T}}(t)\{\mathrm{sym}[(\mathcal{A}+\Delta\mathcal{A}+\mathcal{B}\hat{K})\hat{Q}] - \alpha\hat{Q}\}q(t) < 0, \tag{20}$$

即

$$\dot{V}(q(t)) < \alpha V(q(t)). \tag{21}$$

对上述不等式两边作0到t的积分并取数学期望可得

$$\mathrm{E}\{V(q(t))\} < V(q(0)) + \alpha\int_0^t \mathrm{E}\{V(q(s))\}\mathrm{d}s. \tag{22}$$

由引理3可知, 式(22)等价于

$$\mathrm{E}\{V(q(t))\} < V(q(0))\mathrm{e}^{\alpha t}. \tag{23}$$

上式左端可转化为

$$\begin{aligned} &\mathrm{E}\{V(q(t))\} = \mathrm{E}\{q^{\mathrm{T}}(t)\hat{Q}q(t)\} = \\ &\mathrm{E}\{q^{\mathrm{T}}(t)R^{\frac{1}{2}}\tilde{Q}R^{\frac{1}{2}}q(t)\} \geqslant \\ &\lambda_{\min}(\tilde{Q})\mathrm{E}\{q^{\mathrm{T}}(t)Rq(t)\}. \end{aligned} \tag{24}$$

右端可转化为

$$\begin{aligned} &V(q(0))\mathrm{e}^{\alpha t} = q^{\mathrm{T}}(0)R^{\frac{1}{2}}\tilde{Q}R^{\frac{1}{2}}q(0)\mathrm{e}^{\alpha t} \leqslant \\ &\lambda_{\max}(\tilde{Q})q^{\mathrm{T}}(0)Rq(0)\mathrm{e}^{\alpha t} \leqslant \lambda_{\max}(\tilde{Q})c_1\mathrm{e}^{\alpha t}, \end{aligned} \tag{25}$$

则式(23)可等价于

$$\mathrm{E}\{x^{\mathrm{T}}(t)Rx(t)\} \leqslant \frac{\lambda_2}{\lambda_1}c_1\mathrm{e}^{\alpha t}. \tag{26}$$

由上式结合条件(15)可得

$$\mathrm{E}\left\{x^{\mathrm{T}}(t)Rx(t)\right\} \leqslant c_2,$$

即系统(12)关于$(c_1,\ c_2,\ T,\ R)$有限时间有界.

为证明闭环控制系统在有限频段内满足H_∞性能指标$\|G_{zw}(j\omega)\|_\infty^{\varpi_1<\omega<\varpi_2}<\gamma$, 首先对式(13)左乘右乘$\mathrm{diag}\{\hat{Q},\ \hat{Q},\ I,\ I,\ I,\ I\}$, 可得

$$\begin{bmatrix} -P & M+j\omega_c P-\hat{Q} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & \Psi_2 & E & F & \hat{Q}^T\mathcal{B}_w & \mathcal{C}^T \\ * & * & -\varepsilon I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\varepsilon^{-1}I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\gamma^2 I & \mathcal{D}_w^T \\ * & * & * & * & * & I \end{bmatrix}<0, \tag{27}$$

其中:

$$M=\hat{Q}\bar{M}\hat{Q},\ P=\hat{Q}\bar{P}\hat{Q},\ \hat{Q}^{-1}=R^{-\frac{1}{2}}QR^{-\frac{1}{2}},$$
$$\Psi_2=\mathrm{sym}[\hat{Q}^T(\mathcal{A}+\mathcal{B}\hat{K})]-\varpi_1\varpi_2 P.$$

多次使用Schur补引理, 式(27)可化为

$$\begin{bmatrix} -P & M+j\varpi_c P-\hat{Q} & 0 \\ * & \Phi & \hat{Q}^T\mathcal{B}_w+\mathcal{C}^T\mathcal{D}_w \\ * & * & {\mathcal{D}_w}^T\mathcal{D}_w-\gamma^2 I \end{bmatrix}<0, \tag{28}$$

其中

$$\Phi=\mathrm{sym}[\hat{Q}^T(\mathcal{A}+\mathcal{B}\hat{K})]-\varpi_1\varpi_2 P+ \mathcal{C}^T\mathcal{C}+\varepsilon EE^T+\varepsilon^{-1}F^TF. \tag{29}$$

由引理1及$\Delta\mathcal{A}=E\Sigma F$可知, Φ可等价于

$$\Phi=\mathrm{sym}[\hat{Q}^T(\mathcal{A}+\Delta\mathcal{A}+\mathcal{B}\bar{K})]- \varpi_1\varpi_2 P+\mathcal{C}^T\mathcal{C}. \tag{30}$$

将式(30)代入式(28)并进行拆分可得

$$\begin{bmatrix} 0 & -\hat{Q} & 0 \\ 0 & \bar{\mathcal{A}}^T\hat{Q} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{Q}\bar{\mathcal{A}} & \hat{Q}^T\mathcal{B}_w \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}+ \begin{bmatrix} -P & M+j\varpi_c P & 0 \\ * & -\varpi_1\varpi_2 P & 0 \\ * & * & 0 \end{bmatrix}+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{C}^T\mathcal{C} & \mathcal{C}^T\mathcal{D}_w \\ 0 & \mathcal{D}_w^T\mathcal{C} & \mathcal{D}_w^T\mathcal{D}_w-\gamma^2 I \end{bmatrix}<0, \tag{31}$$

其中$\bar{\mathcal{A}}=\mathcal{A}+\Delta\mathcal{A}+\mathcal{B}\bar{K}$.

令

$$\Gamma=[-I\ \ \bar{\mathcal{A}}\mathcal{B}_w]^T,\ \Lambda=[0\ \ I\ \ 0],$$

$$\tilde{\Theta}=\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -P & M+j\varpi_c P \\ * & -\varpi_1\varpi_2 P \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix}+ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathcal{C} & \mathcal{D}_w \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \mathcal{C} & \mathcal{D}_w \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix},$$

则式(31)可整理为

$$\Gamma\hat{Q}\Lambda+(\Gamma\hat{Q}\Lambda)^T+\tilde{\Theta}<0. \tag{32}$$

由引理2–3可知式(32)等价于

$$\Gamma^{\perp}\tilde{\Theta}\Gamma^{\perp^T}<0,\ \Lambda^{T^{\perp}}\tilde{\Theta}\Lambda^{T^{\perp^T}}<0, \tag{33}$$

其中:

$$\Gamma^{\perp}=\begin{bmatrix} \bar{\mathcal{A}}^T & I & 0 \\ \mathcal{B}_w^T & 0 & I \end{bmatrix},\ \Lambda^{\perp}=\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

将式(33)变形可得

$$E^T\Xi E+F^T\Pi F<0, \tag{34}$$

其中:

$$E=\begin{bmatrix} \bar{\mathcal{A}} & \mathcal{B}_w \\ I & 0 \end{bmatrix},\ F=\begin{bmatrix} \mathcal{C} & \mathcal{D}_w \\ 0 & I \end{bmatrix},$$

$$\Xi=\begin{bmatrix} -P & M+j\omega_c P \\ * & -\omega_1\omega_2 P \end{bmatrix}.$$

由GKYP引理可得, 式(34)等价于

$$\begin{pmatrix} G(j\omega) \\ I \end{pmatrix}^T \Pi \begin{pmatrix} G(j\omega) \\ I \end{pmatrix}<0,$$

$$G^T(j\omega)G(j\omega)-\gamma^2 I<0,$$

即$\|G(j\omega)\|_\infty^{\varpi_1<\omega<\varpi_2}<\gamma$, 即系统(12)满足有限频域$H_\infty$性能指标. 证毕.

注 5 定理中条件(13)存在复数矩阵, LMI工具箱无法直接求解, 根据文献[19], 求解不等式$S_1+jS_2<0$等价于求解$\begin{bmatrix} S_1 & S_2 \\ -S_2 & S_1 \end{bmatrix}<0$, 即将条件(13)转化为

$$\begin{pmatrix} \bar{S}_1 & \bar{S}_2 \\ -\bar{S}_2 & \bar{S}_1 \end{pmatrix}<0,$$

其中:

$$\bar{S}_1=\begin{bmatrix} -\bar{P} & \bar{M}-Q & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & \Psi_1 & Q^TE & Q^TF^T & \mathcal{B}_w & Q^T\mathcal{C}^T \\ * & * & -\varepsilon I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\varepsilon^{-1}I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\gamma^2 I & {\mathcal{D}_w}^T \\ * & * & * & * & * & I \end{bmatrix}<0,$$

$$\bar{S}_2=\begin{bmatrix} 0 & \varpi_c\bar{P} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\varpi_c\bar{P} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

4 仿真示例(Simulation example)

为凸显本方法的有效性及优越性, 给出以下数值仿真例子.

考虑具有如下参数的三模态连续Markov跳变系统:

$$A_1=\begin{pmatrix}3 & -0.8\\ -1.5 & 0.81\end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix}1 & -0.6\\ -1.5 & 1.3\end{pmatrix},$$

$$A_3=\begin{pmatrix}0.8 & -1.8\\ -1 & 4\end{pmatrix},\ B_1=\begin{pmatrix}1.1\\ -0.6\end{pmatrix},$$

$$B_2=\begin{pmatrix}-0.9\\ 1.2\end{pmatrix},\ B_3=\begin{pmatrix}-1.2\\ 3.1\end{pmatrix},$$

$$B_{\rm w1}=\begin{pmatrix}-1.4\\ 1.5\end{pmatrix},\ B_{\rm w2}=\begin{pmatrix}2.2\\ -1.26\end{pmatrix},$$

$$B_{\rm w3}=\begin{pmatrix}-1.2\\ 2.3\end{pmatrix},\ C_1=(-0.5\ \ 0.4),$$

$$C_2=(0.1\ \ 0.3),\ C_3=(0.4\ \ -0.3),$$

$$D_{\rm w1}=0,\ D_{\rm w2}=0.1,\ D_{\rm w3}=-0.2,$$

$$E=(0.5\ \ 0.5),\ F=(0.2\ \ 0.2).$$

其转移速率矩阵为

$$\Lambda=\begin{bmatrix}-0.8 & 0.1 & 0.7\\ ? & ? & 0.2\\ 0.8 & ? & ?\end{bmatrix}.$$

已知参数假设为

$$c_1=1,\ c_2=4,\ R=I_2,\ \gamma=2.4,$$

$$\alpha=0.1,\ T=10,\ r_0=1,$$

系统初始状态为$x_0=(0.5\ \ 0.5)^{\rm T}$, 外部干扰输入为$w(t)=1.5\sin(2\pi t)$, 干扰信号频段范围为$\varpi_1=0.2$, $\varpi_2=10$. 由定理1求解所得控制器增益为

$$K_1=[-2.9968\ \ 1.4929],$$

$$K_2=[1.1145\ \ -1.6098],$$

$$K_3=[0.7046\ \ -1.4188].$$

将所求得的控制器参数代入系统(12), 得到系统的状态响应曲线如图1–3所示. 频域响应曲线如图4所示.

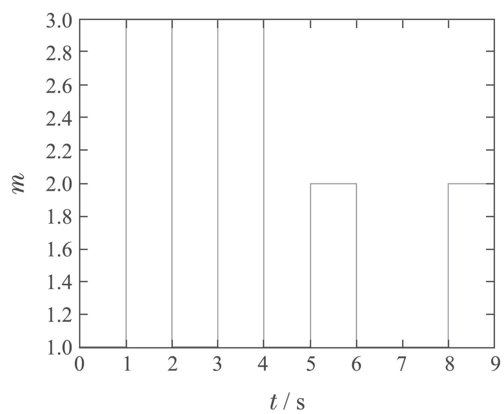

图 1　系统模态跳变图

Fig. 1　The curve of jump modes of system

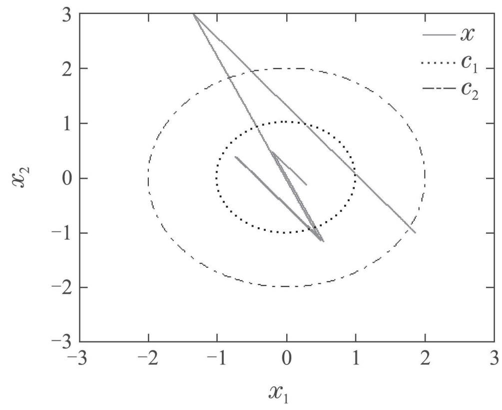

图 2　开环控制系统状态轨迹图

Fig. 2　The state trajectory of open-loop system

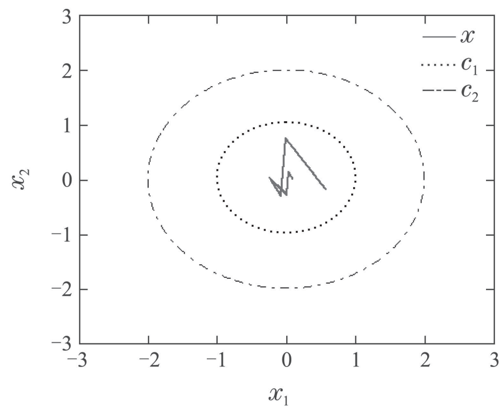

图 3　闭环控制系统状态轨迹图

Fig. 3　The state trajectory of closed-loop system

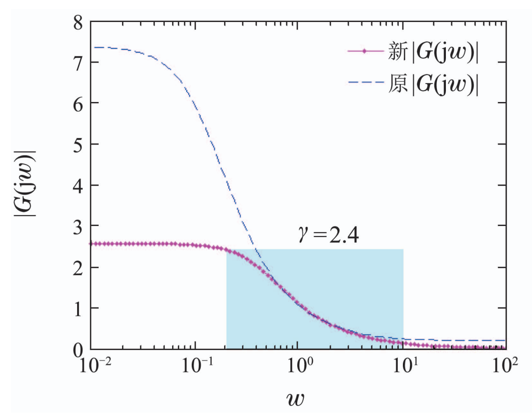

图 4　闭环控制系统频域响应图

Fig. 4　The frequency domain response curve of closed-loop system

图1为系统模态跳变图, 对比图2与图3可知, 开环系统的状态轨迹超出了给定上界, 故不满足有限时间有界的条件, 而施加控制器后, 系统状态轨迹在给定时间内受限运动, 即闭环控制系统有限时间有界, 以验证被控系统满足所要求的时域指标.

施加控制器后原跳变系统的频域响应如图4带点实线所示, 图中蓝色方框的左右边界为给定的有限频

段, 上界为要求满足的性能指标, 可以看出, 闭环控制系统对给定频段内的干扰噪声具有抑制作用, 即在给定频段内满足抗干扰性能指标要求; 为凸显对比效果, 保持参数不变, 采用文献[10]中各子模态均满足频域性能指标的方法求解的控制器增益代入系统中, 所得闭环控制系统频域响应如图虚线所示, 显然闭环系统在给定频段内不满足性能指标约束; 同时从另一角度证实了跳变系统的有限频域性能与各子模态系统的并不等价; 更进一步地, 就本例而言, 若要使系统在给定频段内均满足条件, 则文献[10]方法中的至少提高为4.0, 相比之下, 去随机化方法的干扰抑制能力提高了41.3%.

5 总结(Conclusions)

本文主要考虑噪声干扰的频率特性, 采用去随机化方法研究了转移速率部分未知的连续Markov跳变系统在给定时间内的有限频段H_∞控制问题. 针对特定频段的干扰信号并结合系统的短时间暂态性能, 从时间和频率两个角度综合设计了使得系统状态轨迹给定时间内受限运动同时具有一定干扰抑制水平的有限频段H_∞控制器. 最后通过仿真结果表明, 本方法不仅满足系统所要求的时域、频域性能指标, 更在相同条件下相比现有方法具有更好的干扰抑制水平, 凸显了所提方法的正确性及优越性. 另外, 若转移速率矩阵中的未知元素越多, 所得控制性能越下降, 极端情况下若所有元素都未知, 则可利用随机过程来描述转移速率的分布, 因此后续研究可从概率分布角度对跳变系统进行进一步研究.

参考文献(References):

[1] IWASAKI T, HARA S. Generalized KYP lemma: unified frequency domain inequalities with design applications [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, 50(1): 41 – 59.

[2] ZHANG X N, YANG G H. Dynamic output feedback control synthesis with mixed frequency small gain specifications [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2008, 34(5): 551 – 557.

[3] MEI Ping, ZOU Yun. Finite frequency positiv realness analysis of singularly perturbed systems based on generalized KYP lemma approach [J]. *Control and Decision*, 2010, 25(5): 711 – 714.
(梅平, 邹云. 基于广义KYP引理方法的奇异摄动系统有限频段正实性能分析 [J]. 控制与决策, 2010, 25(5): 711 – 714.)

[4] SUN W, GAO H, KAYNAK O. Finite frequency control for vehicle active suspension systems [J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2011, 19(2): 416 – 422.

[5] CHEN Changzheng, WANG Gang, YU Shenbo. Finite frequency domain vibration control for suspension systems of electric vehicles with actuator input delay [J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2016, 35(11): 130 – 137.
(陈长征, 王刚, 于慎波. 含输入时滞的电动汽车悬架系统有限频域振动控制的研究 [J]. 振动与冲击, 2016, 35(11): 130 – 137.)

[6] WANG H, YANG G H. A finite frequency approach to filter design for uncertain discrete-time systems [J]. *Internatinal Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 2008, 22(6): 533 – 550.

[7] LIU Jianchen. Fault detection in the finite frequency domain with an event-triggered communication scheme [J]. *Information and Control*, 2017, 46(1): 13 – 18.
(刘健辰. 事件触发通信机制下的有限频故障检测 [J]. 信息与控制, 2017, 46(1): 13 – 18.)

[8] CHEN Y, ZHANG W, GAO H. Finite frequency H_∞ control for building under earthquake excitation [J]. *Mechatronics*, 2010, 20(1): 128 – 142.

[9] SWORDER D. Feedback control of a class of linear systems with jump parameters [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1969, 14(1): 9 – 14.

[10] ZHOU Chaojie, LUAN Xiaoli, LIU Fei. Finite frequency H_∞ control for jump systems over given time interval [J]. *Control Theory & Applications*, 2016, 33(2): 251 – 256.
(周超洁, 栾小丽, 刘飞. 跳变系统在给定时间内的有限频段H_∞控制 [J]. 控制理论与应用, 2016, 33(2): 251 – 256.)

[11] BENJELLOUN K, BOUKAS E K, SHI P. Robust stochastic stability of discrete-time linear systems with Markovian jumping parameters [C] //*Proceedings of the 36th IEEE Conference on Decision & Control*. California USA: IEEE, 1997, 12: 559 – 564.

[12] LIN Z, LIU J, NIU Y. Regional pole placement of a Markovian jump model for wind turbine generator system [C] //*Proceedings of the 54th Annual Conference on Decision & Control (CDC)*. Osaka, Japan: IEEE, 2015, 12: 5055 – 5060.

[13] ZHAO Changzhong, LUAN Xiaoli, LIU Fei. Finite-time H-infinity filtering for Markov jump systems in finite frequency domain [J]. *Control Theory & Applications*, 2015, 32(3): 406 – 412.
(赵长钟, 栾小丽, 刘飞. 基于有限频段的Markov跳变系统有限时间H_∞滤波 [J]. 控制理论与应用, 2015, 32(3): 406 – 412.)

[14] MIN Yuan, LUAN Xiaoli, LIU Fei. Given time consensus protocol for Markov jump networks with communication delays and disturbances [J]. *Control Theory & Applications*, 2016, 33(1): 106 – 112.
(闵鸯, 栾小丽, 刘飞. 具有噪声约束的时滞Markov跳变网络给定时间一致性协议设计 [J]. 控制理论与应用, 2016, 33(1): 106 – 112.)

[15] HE Shuping, LIU Fei. Finite-time stabilization for Markov jump systems via state feedback [J]. *Control and Decision*, 2009, 24(1): 91 – 95.
(何舒平, 刘飞. Markov跳变系统的有限时间状态反馈镇定 [J]. 控制与决策, 2009, 24(1): 91 – 95.)

[16] WU M, HE Y, SHE J H, et al. Delay-dependent criteria for robust stability of time-varying delay systems [J]. *Automatica*, 2004, 40(8): 1435 – 1439.

[17] SKELTON R E, IWASAKI T, GRIGORIADIS K M. *A Unified Algebraic Approach to Control Design* [M]. London, UK: Taylor and Francis, 1997.

[18] IWASAKI T, HARA S. Generalized KYP lemma: unified frequency domain inequalities with design applications [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, 50(1): 41 – 59.

[19] LONG Y, YANG G. Fault detection and isolation for networked control systems with finite frequency specifications [J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2014, 24(3): 495 – 514.

作者简介:

万海英 (1996–), 女, 硕士研究生, 研究方向为多模态系统有限频段控制与滤波问题, E-mail: haiyingwan96@gmail.com;

栾小丽 (1979–), 女, 博士, 副教授, 研究方向为复杂系统先进控制及应用, E-mail: xlluan@jiangnan.edu.cn;

刘 飞 (1965–), 男, 博士, 教授, 研究方向为先进过程控制理论及应用, E-mail: fliu@jiangnan.edu.cn.