DOI: 10.7641/CTA.2017.70545

UD分解与偏差补偿结合用于变量带误差模型辨识

萧德云[1†], 杨 帆[1], 张益农[2], 耿立辉[3]

(1. 清华信息科学与技术国家实验室; 清华大学 自动化系, 北京 100084;

2. 北京联合大学 城市轨道交通与物流学院, 北京 100101;

3. 天津职业技术师范大学 自动化与电气工程学院, 天津 300222)

摘要: 本文提出一种基于UD (upper-diagonal)分解与偏差补偿结合的辨识方法, 用于变量带误差(errors-in-variables, EIV)模型辨识. 考虑单输入单输出(single input and single output, SISO)线性动态系统, 当输入和输出含有零均值、方差未知的高斯测量白噪声时, 该类系统的模型参数估计是一种典型的EIV模型辨识问题. 为了获得这种EIV模型参数的无偏估计, 本文先推导出最小二乘模型参数估计偏差量与输入输出噪声方差以及最小二乘损失函数与输入输出噪声方差的关系, 然后采用UD分解方法递推获得模型参数估计值, 再利用输入输出噪声方差估计值补偿模型参数估计偏差, 以此获得模型参数的无偏估计. 本文还讨论了算法实现过程中遇到的一些问题及修补方法, 并通过仿真例验证了所提辨识方法的有效性.

关键词: 系统辨识; EIV模型; 最小二乘法; 偏差补偿; 参数估计

引用格式: 萧德云, 杨帆, 张益农, 等. UD分解与偏差补偿结合用于EIV模型辨识. 控制理论与应用, 2018, 35(7): 949 – 955

中图分类号: TP11 **文献标识码**: A

Combination of UD factorization and bias compensation for errors-in-variables model identification

XIAO De-yun[1†], YANG Fan[1], ZHANG Yi-nong[2], GENG Li-hui[3]

(1. Tsinghua National Laboratory for Information Science and Technology (TNList),
Department of Automation, Tsinghua University, Beijing 100084, China
2. College of Urban Rail Transit and Logistics, Beijing Union University, Beijing 100101, China;
3. School of Automation and Electrical Engineering, Tianjin University of Technology and Education, Tianjin 300222, China)

Abstract: In this paper, an identification method based on the combination of upper-diagonal (UD) factorization and deviation compensation is proposed for the identification of errors-in-variables (EIV) model. By considering a single input and single output (SISO) linear dynamic system, whose input and output are corrupted by Gaussian white measurement noises with zero means and unknown variances, the model parameter estimation for such system is a typical problem of EIV model identification. In order to obtain an unbiased parameter estimation of the EIV model, the relationships are firstly derived not only between the bias amounts of the least squares model parameter estimates and the variances of input and output noises but also between the least squares loss function and the variances of input and output noises, and then the UD factorization method is adopted to recursively obtain model parameter estimates and the estimated variances of input and output noises are further utilized to compensate for the deviations of the model parameter estimates, thus resulting in the unbiased parameter estimates of the EIV model. In this paper, some issues and compensation schemes encountered in the implementation of our algorithm are also discussed. Finally, the effectiveness of the proposed identification method is verified by a simulation example.

Key words: system identification; EIV model; least squares method; bias compensation; parameter estimation

Citation: XIAO Deyun, YANG Fan, ZHANG Yinong, et al. Combination of UD factorization and bias compensation for errors-in-variables model identification. *Control Theory & Applications*, 2018, 35(7): 949 – 955

收稿日期: 2017−08−01; 录用日期: 2018−01−23.

[†]通信作者. E-mail: xiaody@tsinghua.edu.cn; Tel.: +86 13661360595.

本文责任编委: 胡德文.

国家自然科学基金项目(61203119), 清华大学自主科研计划, 天津职业技术师范大学人才项目(RC17–01, RC14–48)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (61203119), the Tsinghua University Initiative Scientific Research Program and the Talent Program of Tianjin University of Technology and Education (RC17–01, RC14–48).

1 引言(Introduction)

变量带误差(errors in variables, EIV)模型指的是系统输入和输出均含有测量噪声, 这是一种更接近工程实际应用的模型结构. 这类模型在工业技术系统、经济计量学、化学工业工程和生物医学系统, 甚至管理科学工程等领域有广泛的应用. 近些年来, EIV模型辨识成为辨识建模方面的一个研究方向, 得到普遍关注和深入的研究.

单输入单输出(SISO)线性动态系统是EIV模型辨识研究的主要对象, 现有的许多针对输出测量噪声的辨识方法不能适用于EIV模型辨识. 文献[1]对已有的EIV模型辨识方法做了全面的综述, 主要有极大似然法、偏差补偿最小二乘法等, 各种方法均需有模型结构和噪声特性的先验假设. 文献[2]介绍了辅助变量法在EIV模型辨识中的应用, 计算量不大; 文献[3]研究任意非白色输入信号激励下的EIV模型辨识问题; 文献[4]给出一种称作广义辅助变量算法的EIV模型辨识方法, 将各种方法用一种统一的方式来表达. 文献[5]利用随机逼近法研究了EIV维纳系统模型的递推辨识; 文献[6]讨论了不同闭环框架下EIV模型的辨识问题; 文献[7]给出一种频域内解决EIV模型辨识的方法. 基于最小二乘原理的EIV模型辨识方法主要有偏差消除最小二乘法和偏差校正/补偿法等, 这些方法实施的补偿方案各有不同, 辨识效果也各异[8–10]. 文献[11–13]提出一种基于v-gap优化的鲁棒辨识方法, 获得的是一类EIV模型集合, 可为EIV模型鲁棒控制设计提供模型依据.

本文针对单输入单输出(SISO)线性动态系统, 就输入和输出含有零均值、方差未知高斯测量白噪声的情况, 提出一种基于UD分解和偏差补偿相结合的EIV模型辨识方法. 所提的方法参考了文献[8–9]“偏差补偿最小二乘法”的推导, 先分别导出最小二乘模型参数估计偏差量及最小二乘损失函数与输入输出噪声方差的函数关系, 再利用文献[9]论述的UD分解方法递推获得模型参数估计值, 然后以一种特定的技巧对模型参数估计偏差进行补偿, 以此获得无偏估计.

本文的主要贡献: 1) 引入奇数和偶数单位对角矩阵$\boldsymbol{I}_n^{(0)}$和$\boldsymbol{I}_n^{(\mathrm{E})}$, 使最小二乘模型参数估计偏差量及损失函数与输入输出噪声方差估计之间可表达成对应的显式函数关系, 非常便于实施计算. 2) 首次将UD分解辨识算法与偏差补偿原理结合起来用于EIV模型辨识, 利用UD分解辨识算法可一次性同时获得各阶最小二乘模型参数估计值及其对应的损失函数, 进而对最小二乘模型参数估计进行偏差补偿, 构成UD分解与偏差补偿紧密耦合的迭代辨识算法, 具有较高的计算效率和辨识精度.

本文余下章节安排如下: 第2节给出问题描述, 第3节推导辨识算法, 第4节给出仿真验证例, 第5节讨论算法实现的一些具体考虑, 第6节是本文的结论.

2 问题描述(Problem formulation)

考虑图1所示的开环EIV模型, $u(k)$, $y(k)$是不受噪声污染的系统输入和输出变量, $G(z^{-1})$是系统模型, 用于描述系统的输入和输出关系, $w(k)$和$v(k)$是系统输入和输出测量噪声, $x(k)$和$z(k)$是系统输入与输出测量变量.

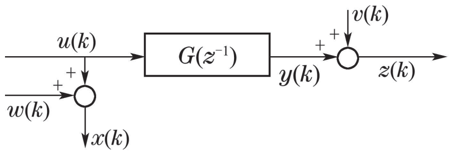

图 1 EIV模型结构

Fig. 1 EIV model structure

假设模型$G(z^{-1})$可用迟延因子z^{-1}多项式表示:

$$G(z^{-1})=\frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}=\frac{b_1z^{-1}+\cdots+b_nz^{-n}}{1+a_1z^{-1}+\cdots+a_nz^{-n}}, \tag{1}$$

式中: a_i和$b_i(i=1,2,\cdots,n)$为模型参数, n为模型阶次. 同时假设[9]:

i) 系统模型$G(z^{-1})$是渐近稳定的, 且可观和可达, 即$A(z^{-1})$的所有零点都位于单位圆内, $A(z^{-1})$和$B(z^{-1})$没有公共因子.

ii) 系统输入$u(k)$是宽平稳、有界的信号, 即对于任意l, $u(k)$的自相关函数存在, 记作$R_u(l)=\lim\limits_{L\to\infty}\frac{1}{L}\sum\limits_{k=1}^{L}u(k-l)u(k)$, 以此组成的输入信号自相关函数矩阵是正定的, 也就是意味着$u(k)$是$(n+1)$阶持续激励信号[9].

iii) 输出噪声$v(k)$和输入噪声$w(k)$是零均值、高斯分布白噪声, 方差分别为未知的σ_{v}^2和σ_{w}^2, 同时$u(k)$, $v(k)$和$w(k)$是两两互不相关的随机变量.

根据以上假设, 图1所示的EIV模型辨识问题可描述为: 在i)–iii)假设条件下, 利用输入和输出测量数据序列$\{x(k), z(k),\ k=1,2,\cdots,L\}$, L为数据长度, 估计系统模型$A(z^{-1})$和$B(z^{-1})$的参数及输入和输出噪声方差σ_{w}^2和σ_{v}^2.

3 辨识算法(Identification algorithm)

图1所示的EIV模型可以写成

$$\begin{cases}A(z^{-1})z(k)=B(z^{-1})x(k)+e(k),\\ e(k)=A(z^{-1})v(k)-B(z^{-1})w(k).\end{cases} \tag{2}$$

定义模型参数向量和数据向量

$$\begin{cases}\boldsymbol{\theta}_n=[a_n\ b_n\ \cdots\ a_1\ b_1]^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^{2n\times1},\\ \boldsymbol{h}_n(k)=[-z(k-n)\ \ x(k-n)\ \cdots\\ \qquad\qquad -z(k-1)\ \ x(k-1)]^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^{2n\times1},\end{cases} \tag{3}$$

那么模型(2)第1式可写成最小二乘格式

$$z(k) = \boldsymbol{h}_n^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{\theta}_n + e(k). \tag{4}$$

在k时刻, 模型(4)的最小二乘参数估计值为[9]

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_n(k) = (\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{h}_n(i)\boldsymbol{h}_n^{\mathrm{T}}(i))^{-1}\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{h}_n(i)z(i). \tag{5}$$

由于模型(4)的方程误差$e(k)$是有色噪声, 利用最小二乘法获得模型参数估计值不是无偏估计, 即利用式(5)得到的模型参数估计值是有偏的, 偏差量与方程误差$e(k)$的特性有关. 下面讨论这种情况下最小二乘模型参数估计值$\hat{\boldsymbol{\theta}}_n(k)$偏差的定量表达, 以便利用补偿原理校正这个偏差, 以求获得无偏模型参数估计(参考文献[8–9], 可导出如下定理1).

定理 1　图1所示的EIV模型, 在i)–iii)假设条件下, 模型(4)的最小二乘参数估计值是有偏的, 偏差可表征为

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\tilde{\boldsymbol{\theta}}(k) = \lim_{k\to\infty}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n(k) - \boldsymbol{\theta}_0) = \\ -\lim_{k\to\infty}(k\boldsymbol{P}_n(k))\,\boldsymbol{R}_n\boldsymbol{\theta}_0 \neq 0,\end{aligned} \tag{6}$$

其中: $\boldsymbol{\theta}_0$为模型真实参数, $\boldsymbol{P}_n(k)$为数据协方差矩阵, $\boldsymbol{R}_n$为输入输出噪声方差矩阵, 表示为

$$\begin{cases}\boldsymbol{P}_n(k) = (\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{h}_n(i)\boldsymbol{h}_n^{\mathrm{T}}(i))^{-1} \in \mathbb{R}^{2n\times 2n},\\ \boldsymbol{R}_n = \mathrm{diag}\{\underbrace{\sigma_{\mathrm{v}}^2, \sigma_{\mathrm{w}}^2, \cdots, \sigma_{\mathrm{v}}^2, \sigma_{\mathrm{w}}^2}_{2n}\} \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}.\end{cases} \tag{7}$$

证　定义噪声向量

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\eta}_n(k) = [v(k-n)\ \ -w(k-n)\ \cdots \\ v(k-1)\ \ -w(k-1)]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{2n\times 1},\end{aligned} \tag{8}$$

模型(4)可进一步写成

$$z(k) = \boldsymbol{h}_n^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{\theta}_0 + \boldsymbol{\eta}_n^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{\theta}_0 + v(k). \tag{9}$$

将上式代入式(5), 整理后可得

$$\begin{aligned}(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{h}_n(i)\boldsymbol{h}_n^{\mathrm{T}}(i))(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n(k) - \boldsymbol{\theta}_0) = \\ \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{h}_n(i)\left(\boldsymbol{\eta}_n^{\mathrm{T}}(i)\boldsymbol{\theta}_0 + v(i)\right),\end{aligned} \tag{10}$$

式中: 模型真实参数$\boldsymbol{\theta}_0$定义为

$$\boldsymbol{\theta}_0 = [\underbrace{0\ \cdots\ 0}_{2\times(n-n_0)}\underbrace{a_{n_0}\ b_{n_0}\ \cdots\ a_1\ b_1}_{2\times n_0}]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{2n\times 1}, \tag{11}$$

其中$n_0 \leqslant n$为模型的真实阶次.

考虑到$v(k)$和$w(k)$分别是零均值、方差为σ_{v}^2和σ_{w}^2, 互不相关的白噪声, 根据数据向量$\boldsymbol{h}_n(k)$和噪声向量$\boldsymbol{\eta}_n(k)$的定义, 有

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{h}_n(i)\boldsymbol{\eta}_n^{\mathrm{T}}(i) = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\begin{bmatrix}-z(i-n)\\ x(i-n)\\ \vdots\\ -z(i-1)\\ x(i-1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v(i-n)\\ -w(i-n)\\ \vdots\\ v(i-1)\\ -w(i-1)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \tag{12}$$

则

$$(\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{h}_n(i)\boldsymbol{\eta}_n^{\mathrm{T}}(i))\boldsymbol{\theta}_0 = -\boldsymbol{R}_n\boldsymbol{\theta}_0. \tag{13}$$

上式代入式(10), 考虑到$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{h}_n(i)v(i) = 0$, 又由假设条件ii)知, 数据协方差矩阵$\boldsymbol{P}_n(k)$为非奇异阵, $\boldsymbol{R}_n$亦为非零方差阵, 故定理1得证.　　证毕.

根据定理1和文献[9]论述的补偿原理, 取参数估计偏差量为$-k\boldsymbol{P}_n(k)\boldsymbol{R}_n\boldsymbol{\theta}_0$, 可按如下递推形式对参数估计值进行偏差补偿修正:

$$\begin{cases}\hat{\boldsymbol{\theta}}_n^{(\mathrm{C})}(k) = \hat{\boldsymbol{\theta}}_n(k) + k\boldsymbol{P}_n(k)\hat{\boldsymbol{R}}_n(k)\hat{\boldsymbol{\theta}}_n^{(\mathrm{C})}(k-1) = \\ \qquad \hat{\boldsymbol{\theta}}_n(k) + k\boldsymbol{P}_n(k)\hat{\boldsymbol{\Theta}}_n^{(\mathrm{C})}(k-1)\hat{\boldsymbol{\sigma}}(k-1),\\ \hat{\boldsymbol{\Theta}}_n^{(\mathrm{C})}(k-1) = \\ [\boldsymbol{I}_n^{(\mathrm{O})}\hat{\boldsymbol{\theta}}_n^{(\mathrm{C})}(k-1)\ \ \boldsymbol{I}_n^{(\mathrm{E})}\hat{\boldsymbol{\theta}}_n^{(\mathrm{C})}(k-1)] \in \mathbb{R}^{2n\times 2},\\ \boldsymbol{I}_n^{(\mathrm{O})} = \mathrm{diag}\{1, 0, \cdots, 1, 0\} \in \mathbb{R}^{2n\times 2n},\\ \boldsymbol{I}_n^{(\mathrm{E})} = \mathrm{diag}\{0, 1, \cdots, 0, 1\} \in \mathbb{R}^{2n\times 2n},\\ \hat{\boldsymbol{\sigma}}(k-1) = [\hat{\sigma}_{\mathrm{v}}^2(k-1)\ \ \hat{\sigma}_{\mathrm{w}}^2(k-1)]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{2\times 1},\end{cases} \tag{14}$$

式中: $\hat{\boldsymbol{\theta}}_n^{(\mathrm{C})}(k)$为模型参数补偿估计值, $\hat{\boldsymbol{\theta}}_n(k)$是最小二乘模型参数估计值, $\boldsymbol{P}_n(k)$是数据协方差矩阵, $\hat{\boldsymbol{\Theta}}_n^{(\mathrm{C})}(k-1)$是由$\hat{\boldsymbol{\theta}}_n^{(\mathrm{C})}(k-1)$拼接的模型参数补偿估计值矩阵, $\hat{\boldsymbol{R}}_n(k)$和$\hat{\boldsymbol{\sigma}}(k-1)$为输入输出噪声方差估计量, 目前还是未知的.

式(14)表明, 为获得模型参数补偿估计值$\hat{\boldsymbol{\theta}}_n^{(\mathrm{C})}(k)$, 必须求得最小二乘模型参数估计值$\hat{\boldsymbol{\theta}}_n(k)$和数据协方差矩阵 $\boldsymbol{P}_n(k)$及输入输出噪声方差估计值$\hat{\boldsymbol{\sigma}}(k-1)$. 下面讨论输入输出噪声方差估计问题, 给出它与最小二乘损失函数的定量关系(参考文献[8–9], 可导出如下定理2).

定理 2　图1所示的EIV模型, 在i)∼iii)假设条件下, 输入输出噪声方差及最小二乘模型参数估计值与最小二乘损失函数的关系可表示为

$$\sigma_{\mathrm{v}}^2 + \boldsymbol{\theta}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_n\lim_{k\to\infty}\hat{\boldsymbol{\theta}}_n(k) = \lim_{k\to\infty}(\frac{1}{k}J_n(k)), \tag{15}$$

其中: $\boldsymbol{\theta}_0$为模型真实参数, $\hat{\boldsymbol{\theta}}_n(k)$为最小二乘模型参数估计值, $J_n(k)$为最小二乘损失函数, $\boldsymbol{R}_n$为输入输出噪声方差矩阵.

证　对模型(4)运用最小二乘原理得到的模型输出误差可写成

$$\varepsilon_n(k) = z(k) - \boldsymbol{h}_n^{\mathrm{T}}(k)\hat{\boldsymbol{\theta}}_n(k). \tag{16}$$

根据式(9), 至k时刻模型输出误差平方和在极限情况下可以表示成

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\varepsilon_n^2(i)=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\varepsilon_n(i)[\boldsymbol{h}_n^{\mathrm{T}}(i)(\boldsymbol{\theta}_0-\hat{\boldsymbol{\theta}}_n(k))+\boldsymbol{\eta}_n^{\mathrm{T}}(i)\boldsymbol{\theta}_0+v(i)]. \tag{17}$$

由式(5)知, $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum\limits_{i=1}^{k}\varepsilon_n(i)\boldsymbol{h}_n^{\mathrm{T}}(i)=0$, 则上式可进一步写成

$$\begin{aligned}
&\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\varepsilon_n^2(i)=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\varepsilon_n(i)(\boldsymbol{\eta}_n^{\mathrm{T}}(i)\boldsymbol{\theta}_0+v(i))=\\
&\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}[\boldsymbol{h}_n^{\mathrm{T}}(i)(\boldsymbol{\theta}_0-\hat{\boldsymbol{\theta}}_n(k))+\boldsymbol{\eta}_n^{\mathrm{T}}(i)\boldsymbol{\theta}_0+v(i)]\cdot\\
&(\boldsymbol{\eta}_n^{\mathrm{T}}(i)\boldsymbol{\theta}_0+v(i))=\\
&\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}[\boldsymbol{h}_n^{\mathrm{T}}(i)(\boldsymbol{\theta}_0-\hat{\boldsymbol{\theta}}_n(k))(\boldsymbol{\eta}_n^{\mathrm{T}}(i)\boldsymbol{\theta}_0+v(i))]+\\
&\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}(\boldsymbol{\eta}_n^{\mathrm{T}}(i)\boldsymbol{\theta}_0+v(i))^2,
\end{aligned}\tag{18}$$

再利用

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{h}_n(i)v(i)=0,$$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{h}_n(i)\boldsymbol{\eta}_n^{\mathrm{T}}(i)=-\boldsymbol{R}_n$$

及$\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum\limits_{i=1}^{k}\boldsymbol{\eta}_n(i)\boldsymbol{\eta}_n^{\mathrm{T}}(i)=\boldsymbol{R}_n$, 可得

$$\begin{aligned}
&\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\varepsilon_n^2(i)=\\
&-\boldsymbol{\theta}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_n\lim_{k\to\infty}(\boldsymbol{\theta}_0-\hat{\boldsymbol{\theta}}_n(k))+\sigma_{\mathrm{v}}^2+\boldsymbol{\theta}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_n\boldsymbol{\theta}_0=\\
&\sigma_{\mathrm{v}}^2+\boldsymbol{\theta}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_n\lim_{k\to\infty}\hat{\boldsymbol{\theta}}_n(k).
\end{aligned}\tag{19}$$

又由最小二乘损失函数的定义$\sum\limits_{i=1}^{k}\varepsilon_n^2(i)=J_n(k)$知, 式(15)成立, 定理2得证.　　证毕.

将定理2式(15)写成

$$\begin{cases}
J_n(k)=k(\sigma_{\mathrm{v}}^2+\boldsymbol{\theta}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_n\hat{\boldsymbol{\theta}}_n(k))=k\bar{\boldsymbol{\theta}}_0^{\mathrm{T}}\hat{\bar{\boldsymbol{\Theta}}}_n(k-1)\boldsymbol{\sigma},\\
\hat{\bar{\boldsymbol{\Theta}}}_n(k-1)=[\boldsymbol{I}_{n+1}^{(\mathrm{O})}\hat{\bar{\boldsymbol{\theta}}}_n(k)\ \ \boldsymbol{I}_{n+1}^{(\mathrm{E})}\hat{\bar{\boldsymbol{\theta}}}_n(k)]\in\mathbb{R}^{2(n+1)\times 2},\\
\bar{\boldsymbol{\theta}}_0=[\boldsymbol{\theta}_0^{\mathrm{T}}\ \ 1\ \ 0]^{\mathrm{T}},\\
\hat{\bar{\boldsymbol{\theta}}}_n(k)=[\hat{\boldsymbol{\theta}}_n^{\mathrm{T}}(k)\ \ 1\ \ 0]^{\mathrm{T}},\\
\boldsymbol{\sigma}=[\sigma_{\mathrm{v}}^2\ \ \sigma_{\mathrm{w}}^2]^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^{2\times 1},
\end{cases}\tag{20}$$

式中: 奇数和偶数单位对角矩阵$\boldsymbol{I}_{n+1}^{(\mathrm{O})}$和$\boldsymbol{I}_{n+1}^{(\mathrm{E})}$的组成与式(14)相同, 只是阶次不同而已. 式(20)表明, 为获得输入输出噪声方差$\boldsymbol{\sigma}$估计, 需要两组由式(20)表达的关系式, 为此取两种不同的模型阶次, 即取$n=n_1$和$n_2\,(n_2>n_1\geqslant n_0)$, 则由式(20), 输入输出噪声方差估计值可以写成

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}(k)=\begin{bmatrix}\hat{\sigma}_{\mathrm{v}}^2(k)\\ \hat{\sigma}_{\mathrm{w}}^2(k)\end{bmatrix}=
\frac{1}{k}\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{\theta}}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}_{n_1+1}^{(\mathrm{O})}\hat{\bar{\boldsymbol{\theta}}}_{n_1}(k) & \bar{\boldsymbol{\theta}}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}_{n_1+1}^{(\mathrm{E})}\hat{\bar{\boldsymbol{\theta}}}_{n_1}(k)\\ \bar{\boldsymbol{\theta}}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}_{n_2+1}^{(\mathrm{O})}\hat{\bar{\boldsymbol{\theta}}}_{n_2}(k) & \bar{\boldsymbol{\theta}}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}_{n_2+1}^{(\mathrm{E})}\hat{\bar{\boldsymbol{\theta}}}_{n_2}(k)\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}J_{n_1}(k)\\ J_{n_2}(k)\end{bmatrix}. \tag{21}$$

该式表明, 为获得输入输出噪声方差估计值必须求得最小二乘损失函数.

再次定义数据向量

$$\boldsymbol{\varphi}_{n_2}(k)=[-z(k-n_2)\ \ x(k-n_2)\ \ \cdots\ \ -z(k-1)\ \ x(k-1)\ \ -z(k)]^{\mathrm{T}}, \tag{22}$$

由此构成信息压缩矩阵$\boldsymbol{C}_{n_2}(k)$, 并对之进行UD分解:

$$\boldsymbol{C}_{n_2}(k)=[\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{\varphi}_{n_2}(i)\boldsymbol{\varphi}_{n_2}^{\mathrm{T}}(i)]^{-1}=\boldsymbol{U}_{n_2}(k)\boldsymbol{D}_{n_2}(k)\boldsymbol{U}_{n_2}^{\mathrm{T}}(k), \tag{23}$$

式中: $\boldsymbol{U}_{n_2}(k)$称作参数辨识矩阵, 包含不同阶次的最小二乘模型参数估计值$\hat{\boldsymbol{\theta}}_n(k), n=1,\cdots,n_2$, $\boldsymbol{D}_{n_2}(k)$称作损失函数矩阵, 包含不同阶次的最小二乘损失函数$J_n(k), n=1,\cdots,n_2$[9]. 只要对信息压缩矩阵$\boldsymbol{C}_{n_2}(k)$实施UD分解, 就可以获得所需模型阶次的最小二乘参数估计值$\hat{\boldsymbol{\theta}}_n(k)$和对应的损失函数$J_n(k)$, $n=n_1,n_2$. 文献[9]还给出式(23)的递推形式, 更便于计算.

综合式(14)(21)及式(23)的递推计算形式, 可将UD分解与偏差补偿结合的EIV模型参数辨识算法归纳成:

Part I UD分解递推辨识算法[9]:

$$\begin{cases}
\boldsymbol{f}_{n_2}(k)=[f_1(k)\ \ f_2(k)\ \ \cdots\ \ f_{2n_2+1}]^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{U}_{n_2}^{\mathrm{T}}(k-1)\boldsymbol{\varphi}_{n_2}(k),\\
\boldsymbol{g}_{n_2}(k)=[g_1(k)\ \ g_2(k)\ \ \cdots\ \ g_{2n_2+1}]^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{D}_{n_2}(k-1)\boldsymbol{f}_{n_2}(k),\\
\beta_j(k)=1+\sum\limits_{i=1}^{j}f_i(k)g_i(k),\\
\bar{u}_{ij}(k)=-\dfrac{f_j(k)g_i(k)}{\beta_{j-1}(k)},\\
u_{jj}(k)=1,\\
u_{ij}(k)=u_{ij}(k-1)+\sum\limits_{l=1}^{j-1}u_{il}(k-1)\bar{u}_{lj}(k),\\
u_{ii}(k)=1,\\
d_j(k)=\dfrac{d_j(k-1)\beta_{j-1}(k)}{\beta_j(k)},\\
i,j=1,2,\cdots,2n_2+1,
\end{cases}\tag{24}$$

式中: $u_{ij}(k)$, $i,j=1,2,\cdots,2n_2+1$为参数辨识矩阵$\boldsymbol{U}_{n_2}(k)$的元素, $d_j(k)$, $j=1,2,\cdots,2n_2+1$为损失函数矩阵 $\boldsymbol{D}_{n_2}(k)$ 的元素, $f_i(k)$ 及 $g_i(k)$, $i=1,2,\cdots,2n_2+1$为辅助数据向量$\boldsymbol{f}_{n_2}(k)$和$\boldsymbol{g}_{n_2}(k)$的第i元素. 不同模型阶次的最小二乘参数估计值$\hat{\boldsymbol{\theta}}_n(k)$及其对应的损失函数$J_n(k)$, $n=n_1,n_2$由参数辨识矩阵$\boldsymbol{U}_{n_2}(k)$和损失函数矩阵$\boldsymbol{D}_{n_2}(k)$中的相应元素组成, 即有[9]

$$\begin{cases}\hat{\boldsymbol{\theta}}_n(k)=[u_{1(2n+1)}(k)\ \ u_{2(2n+1)}(k)\\ \qquad\qquad \cdots\ u_{(2n)(2n+1)}(k)]^{\mathrm{T}},\\ J_n(k)=1/d_{2n+1}(k),\\ n=n_1,n_2.\end{cases} \tag{25}$$

Part II 偏差补偿辨识算法:

$$\begin{cases}\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(\mathrm{C})}_{n_1}(k)=\hat{\boldsymbol{\theta}}_{n_1}(k)+k\boldsymbol{P}_{n_1}(k)\boldsymbol{\Theta}^{(\mathrm{C})}_{n_1}(k-1)\hat{\boldsymbol{\sigma}}(k-1),\\ \hat{\boldsymbol{\Theta}}^{(\mathrm{C})}_{n_1}(k-1)=[\boldsymbol{I}^{(\mathrm{O})}_{n_1}\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(\mathrm{C})}_{n_1}(k-1)\ \ \boldsymbol{I}^{(\mathrm{E})}_{n_1}\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(\mathrm{C})}_{n_1}(k-1)],\end{cases} \tag{26}$$

式中: 奇数和偶数单位对角矩阵$\boldsymbol{I}^{(\mathrm{O})}_{n_1}$和$\boldsymbol{I}^{(\mathrm{E})}_{n_1}$按式(14)构成, $n_1(n_1<n_2,\ n_1\geqslant n_0)$ 为选定的模型阶次, $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{n_1}(k)$为最小二乘模型参数估计值, $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(\mathrm{C})}_{n_1}(k)$为模型参数补偿估计值, 它是最终的辨识结果. $\boldsymbol{P}_{n_1}(k)$为数据协方差矩阵, 通过对信息压缩矩阵$\boldsymbol{C}_{n_2}(k)$进行块分解, 可从左上角块矩阵中获得[9], 或可直接利用数据协方差矩阵$\boldsymbol{P}_{n_1}(k)$的定义计算.

Part III 输入输出噪声方差估计算法:

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}(k)=\begin{bmatrix}\hat{\sigma}^2_{\mathrm{v}}(k)\\ \hat{\sigma}^2_{\mathrm{w}}(k)\end{bmatrix}=\frac{1}{k}\begin{bmatrix}\hat{\bar{\boldsymbol{\theta}}}^{(\mathrm{C})}_{n_1}(k)\boldsymbol{I}^{(\mathrm{O})}_{n_1+1}\hat{\bar{\boldsymbol{\theta}}}_{n_1}(k) & \hat{\bar{\boldsymbol{\theta}}}^{(\mathrm{C})}_{n_1}(k)\boldsymbol{I}^{(\mathrm{E})}_{n_1+1}\hat{\bar{\boldsymbol{\theta}}}_{n_1}(k)\\ \hat{\bar{\boldsymbol{\theta}}}^{(\mathrm{C})}_{n_2}(k)\boldsymbol{I}^{(\mathrm{O})}_{n_2+1}\hat{\bar{\boldsymbol{\theta}}}_{n_2}(k) & \hat{\bar{\boldsymbol{\theta}}}^{(\mathrm{C})}_{n_2}(k)\boldsymbol{I}^{(\mathrm{E})}_{n_2+1}\hat{\bar{\boldsymbol{\theta}}}_{n_2}(k)\end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix}J_{n_1}(k)\\ J_{n_2}(k)\end{bmatrix}, \tag{27}$$

式中: 奇数和偶数单位对角矩阵$\boldsymbol{I}^{(\mathrm{O})}_{n}$和$\boldsymbol{I}^{(\mathrm{E})}_{n}(n=n_1,n_2)$的组成与式(14)相同, 且

$$\begin{cases}\hat{\bar{\boldsymbol{\theta}}}^{(\mathrm{C})}_{n_1}(k)=[\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(\mathrm{C})\mathrm{T}}_{n_1}(k)\ \ 1\ \ 0]^{\mathrm{T}},\\ \hat{\bar{\boldsymbol{\theta}}}^{(\mathrm{C})}_{n_2}(k)=[\underbrace{0\ \cdots\ 0}_{n_2-n_1}\ \ \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(\mathrm{C})\mathrm{T}}_{n_1}(k)\ \ 1\ \ 0]^{\mathrm{T}},\\ \hat{\bar{\boldsymbol{\theta}}}_n(k)=[\hat{\boldsymbol{\theta}}^{\mathrm{T}}_n(k)\ \ 1\ \ 0]^{\mathrm{T}},\ n=n_1,n_2,\end{cases} \tag{28}$$

其中: n_1 和 $n_2(n_2>n_1\geqslant n_0)$ 为两种选定的模型阶次, $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{n_1}(k)$ 和 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{n_2}(k)$ 为最小二乘模型参数估计值, $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(\mathrm{C})}_{n_1}(k)$为模型参数补偿估计值, $J_{n_1}(k)$和$J_{n_2}(k)$为最小二乘损失函数, $\hat{\sigma}^2_{\mathrm{w}}(k)$和$\hat{\sigma}^2_{\mathrm{v}}(k)$为输入输出噪声方差估计值.

以上3部分算法 (Part I, Part II和Part III)构成一套UD分解与偏差补偿结合的EIV模型辨识算法.

4 仿真验证(Simulation verification)

考虑图1所示的EIV模型, 设仿真系统模型为

$$G(z^{-1})=\frac{1.0z^{-1}+0.5z^{-2}}{1.0-1.5z^{-1}+0.7z^{-2}}, \tag{29}$$

输入$u(k)$选用特征多项式为$F(s)=s^6\oplus s^5\oplus 1$, 幅度为1.0的M序列, 输入和输出测量噪声的标准差分别取 $\sigma_{\mathrm{v}}=0.8$ 和 $\sigma_{\mathrm{w}}=0.5$, 折合噪信比各为19.01%和50.56%. 利用本文提出的UD分解与偏差补偿结合的辨识算法, 即上面的式(25)–(27), 模型阶次取$n_1=2$, $n_2=3$, 递推至1600步, 辨识结果如表1所示, 最终获得的辨识模型为

$$\begin{aligned}z(k)=&1.5018z(k-1)-0.7040z(k)+\\ &1.0281u(k-1)+0.4770u(k-2).\end{aligned} \tag{30}$$

表 1 辨识结果

Table 1 Identification results

模型参数	a_1	a_2	b_1	b_2	静态增益	输入噪声标准差	输出噪声标准差
真值	–1.50	0.70	1.00	0.50	7.50	0.50	0.80
估计值	–1.5018	0.7040	1.0281	0.4770	7.44	0.5130	0.8132

图2给出利用UD分解与偏差补偿相结合辨识算法所获得的模型参数估计变化过程, 模型参数估计值都能很好地逼近参数真值, 相对2范数误差小于1.83%, 其中参数b_1的相对偏差最大, 也小于2.81%(位于图中“*”标记处), 辨识结果与真实模型非常逼近.

图3给出模型阶跃响应特性比较结果, 最大相对误差为1.54%(位于图中“*”标记处), 相对2范数误差为0.80%, 静态增益相对误差为0.73%, 说明辨识模型的动态响应和静态响应特性与仿真模型都非常吻合.

图4给出模型对数幅频特性比较结果, 最大相对误差为2.64%(位于图中“*”标记处, 处于高频段$\omega_{\mathrm{M}}=0.9999\pi$), 相对2范数误差为0.52%.

图5给出模型对数相频特性比较结果, 最大相对误差为1.07%(位于图中“*”标记处, 处于高频段$\omega_{\mathrm{P}}=0.9999\pi$), 相对2范数误差为0.82%.

通过这些响应特性的比较说明, 辨识模型与仿真模型的时域和频域特性都非常接近, 尤其在低频段和中频段模型频率响应特性相当吻合, 仅在高频段频率

模型响应特性有所偏差. 说明本文提出的UD分解与偏差补偿相结合辨识算法是有效的, 不失为一种可供选择的EIV模型辨识方法.

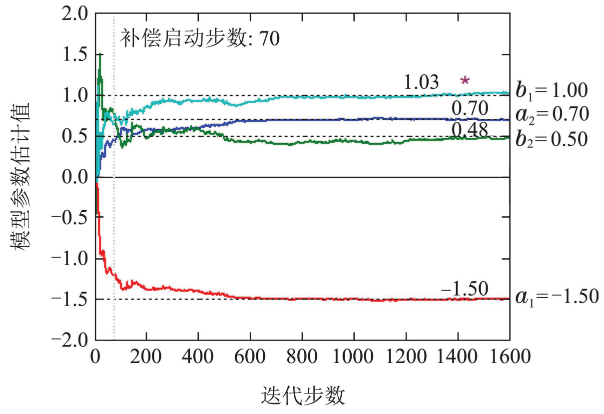

图 2 基于UD分解和偏差补偿的模型参数辨识结果

Fig. 2 Identification results of model parameters based on the UD factorization and bias compensation

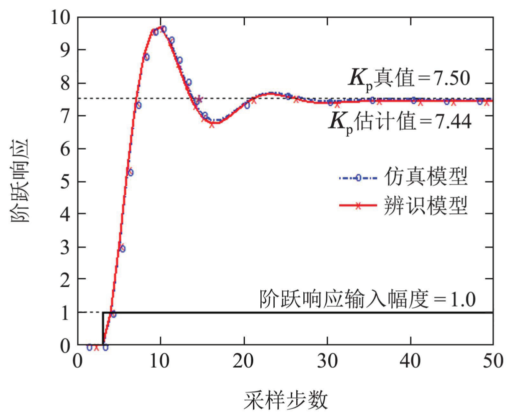

图 3 阶跃响应特性比较

Fig. 3 Comparison of step response characteristics

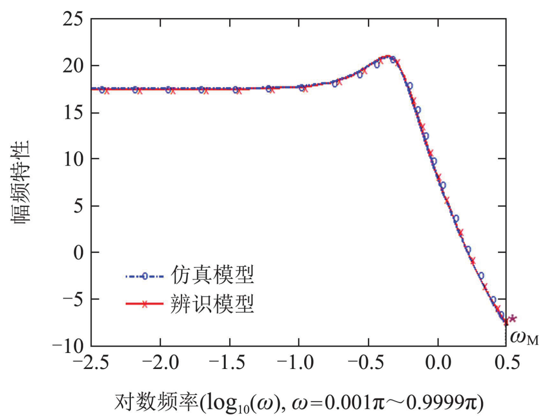

图 4 对数幅频特性比较

Fig. 4 Comparison of logarithmic amplitude-frequency characteristics

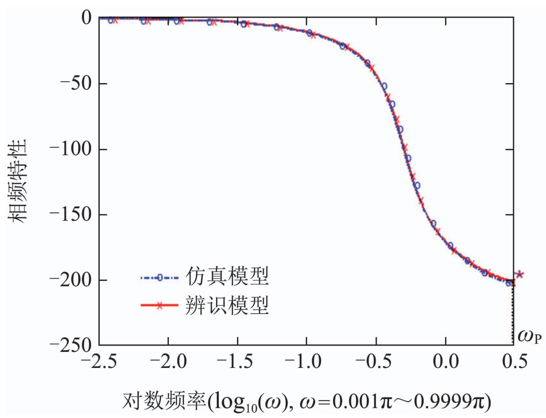

图 5 对数相频特性比较

Fig. 5 Comparison of logarithmic phase-frequency characteristics

5 问题讨论(Discussions)

1) 仿真实验表明, 算法的偏差补偿动作需要控制在最小二乘模型参数估计值相对平稳之后实行. 本仿真实验例的偏差补偿动作控制在最小二乘模型参数递推估计到第70步之后进行(第70步之前最小二乘模型参数估计还不太平稳, 如图2所示), 这样会使输入输出噪声方差的估计更加平稳. 另外, 输入输出噪声方差估计算式(27)要安排在偏差补偿算式(26)之后进行, 否则可能会降低辨识算法的鲁棒性.

2) 为了减少输入输出噪声方差估计的波动, 可以对输入输出噪声方差估计进行滤波处理. 本文仿真实验采用如下滤波公式

$$\begin{bmatrix}\hat{\sigma}_{\rm v}^2(k)\\ \hat{\sigma}_{\rm w}^2(k)\end{bmatrix}_{\rm F}=(1-\alpha)\begin{bmatrix}\hat{\sigma}_{\rm v}^2(k-1)\\ \hat{\sigma}_{\rm w}^2(k-1)\end{bmatrix}_{\rm F}+\alpha\begin{bmatrix}\hat{\sigma}_{\rm v}^2(k)\\ \hat{\sigma}_{\rm w}^2(k)\end{bmatrix}, \tag{31}$$

式中: $\begin{bmatrix}\hat{\sigma}_{\rm v}^2(k)\\ \hat{\sigma}_{\rm w}^2(k)\end{bmatrix}$为当前输入输出噪声方差估计值, $\begin{bmatrix}\hat{\sigma}_{\rm v}^2(k)\\ \hat{\sigma}_{\rm w}^2(k)\end{bmatrix}_{\rm F}$为当前噪声方差估计滤波值, α为滤波系数, 取值范围$\alpha\in[0,1)$ (本例$\alpha=0.30$). 滤波系数越小, 对输入输出噪声方差估计波动的抑制能力越大, 但又不能太小.

3) 本文提出的UD分解与偏差补偿相结合的辨识方法, 如果系统模型阶次未知, 可以任选两种不同的模型阶次n_1和n_2, 但要求$n_2>n_1\geqslant n_0$ (n_0为模型真实阶次). 为简单起见, 可选$n_2=n_1+1$.

6 结论(Conclusions)

本文讨论图1所示的SISO线性动态系统EIV模型辨识问题, 提出一种基于UD分解与偏差补偿相结合

的EIV模型辨识方法. 这种方法充分利用UD分解辨识方法能同时获得不同阶次最小二乘模型参数估计值及其对应损失函数的优势, 以方便求得输入输出噪声方差估计值, 再以此补偿基于最小二乘估计所造成的模型参数估计偏差. 该方法的优点是, 只用两种不同模型阶次的最小二乘损失函数就能获得比较精准的输入输出噪声方差估计, 并能较为准确地补偿模型参数估计偏差. 多种不同情况下的仿真实验研究表明, 该方法的辨识结果可靠、准确, 具有实际应用价值.

参考文献(References):

[1] SÖDERSTRÖM T. System identification for the errors-in-variables problem [J]. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 2012, 34(7): 780 – 792.

[2] DANKERS A, VAN DEN HOF P M J, BOMBIOS X, et al. Errors-in-variables identification in dynamic networks-Consistency results for an instrumental variable approach [J]. *Automatica*, 2015, 62(12): 39 – 50.

[3] ZHANG E, PINTELON R, SCHOUKENS J. Errors-in-variables identification of dynamic systems excited by arbitrary non-white input [J]. *Automatica*, 2013, 49(10): 3032 – 3041.

[4] SÖDERSTRÖM T, DIVERSI R, SOVERINI U. A unified framework for EIV identification methods when the measurement noises are mutually correlated [J]. *Automatica*, 2014, 50(12): 3216 – 3223.

[5] MU B Q, CHEN H F. Recursive identification of errors-in-variables wiener systems [J]. *Automatica*, 2013, 49(9): 2744 – 2753.

[6] SÖDERSTRÖM T, WANG L P, PINTELON R, et al. Can errors-in-variables systems be identified from closed-loop experiments? [J]. *Automatica*, 2013, 49(2): 681 – 684.

[7] SÖDERSTRÖM T, SOVERINI U. Errors-in-variables identification using maximum likelihood in the frequency domain [J]. *Automatica*, 2017, 79(5): 131 – 143.

[8] ZHENG W X. A bias correction method for identification of linear dynamic errors in variables models [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, 47(7): 1142 – 1147.

[9] XIAO Deyun. *Theory of System Identification with Applications* [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2015.
(萧德云. 系统辨识理论与应用 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2015.)

[10] HONG M, SÖDERSTRÖM T, ZHENG W X. Accuracy analysis of bias-eliminating least squares estimates for errors-in-variables systems [J]. *Automatica*, 2007, 43(9): 1590 – 1596.

[11] GENG Lihui, CUI Shigang, ZHAO Li. Frequency-domain worst-case identification of multiple input multiple output errors-in-variables models [J]. *Control Theory & Applications*, 2016, 33(10): 1366 – 1372.
(耿立辉, 崔世钢, 赵丽. 多输入多输出变量带误差模型的最坏情况频域辨识 [J]. 控制理论与应用, 2016, 33(10): 1366 – 1372.)

[12] GENG L H, CUI S G, ZHAO L, et al. A convex optimization algorithm for frequency domain identification in the v-gap metric [J]. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 2015, 29(3): 362 – 371.

[13] GENG L H, CUI S G, XIA Z Y. Error quantification of the normalized right graph symbol for an errors-in-variables system [J]. *Control Theory and Technology*, 2015, 13(3): 238 – 244.

作者简介:

萧德云 (1945–), 男, 教授, 博士生导师, 研究方向为控制理论与控制工程、系统辨识、故障诊断, E-mail: xiaody@tinghua.edu.cn;

杨　帆 (1980–), 男, 副研究员, 研究方向为控制理论与控制工程、系统辨识、安全分析, E-mail: yangfan@tsinghua.edu.cn;

张益农 (1967–), 女, 教授, 研究方向为控制理论与控制工程、复杂系统建模与控制, E-mail: zdhtyinong@buu.edu.cn;

耿立辉 (1977–), 男, 副教授, 研究方向为系统辨识与状态估计、鲁棒辨识与控制, E-mail: glh2010@tute.edu.cn.