

随机多智能体系统一致性增益的设计与分析

段玉波, 杨振威[†]

(东北石油大学 电气信息工程学院, 黑龙江 大庆 163318)

摘要: 在固定和切换拓扑中通信网络含有加性随机噪声的情况下, 针对随机多智能体系统一致性跟踪控制问题, 本文采用自适应控制方法给出了一种新的一致性增益设计方法。在基于邻居智能体状态设计的分布式自适应控制协议中, 每个跟随者的一致性增益自适应律仅仅依赖于跟踪误差, 并且与通信网络全局信息无关。结合代数图论, 随机理论工具和自适应控制得到两个结论: 1) 每个跟随者以均方意义上跟踪上领导者; 2) 每个跟随者的一致性增益趋于一个理想估计值。通过两个仿真实例验证算法的有效性。

关键词: 多智能体系统; 随机噪声; 一致性; 有向图; 自适应控制

引用格式: 段玉波, 杨振威. 随机多智能体系统一致性增益的设计与分析. 控制理论与应用, 2019, 36(4): 629–635

DOI: 10.7641/CTA.2018.70556

Design and analysis of the consensus gain for stochastic multi-agent systems

DUAN Yu-bo, YANG Zhen-wei[†]

(College of Electrical and Information Engineering, Northeast Petroleum University, Daqing Heilongjiang 163318, China)

Abstract: In the case of communication network with the additive stochastic noises under the fixed and switching topology, this paper gives a new approach to design of the consensus gain for the consensus tracking control problem of stochastic multi-agent systems by using adaptive control method. The distributed adaptive consensus protocol, in which the adaptive law of the consensus gain for each follower only depends on tracking errors, is designed based on the relative states of neighboring agents and is independent of global information of the communication network. Combining with algebraic graph theory, matrix analysis and stochastic theory tools, two conclusions are obtained: 1) Each follower can keep track of the leader in mean square; 2) The consensus gain of each follower tends to an ideal value. The effectiveness of the proposed algorithms are validated by two simulation examples.

Key words: multi-agent systems; stochastic noises; consensus; directed graph; adaptive control

Citation: DUAN Yubo, YANG Zhenwei. Design and analysis of the consensus gain for stochastic multi-agent systems.

Control Theory & Applications, 2019, 36(4): 629–635

1 引言

近年来, 多智能体系统的一致性控制在协同控制、交通管控、电力供应以及目标跟踪等领域显示出巨大的工程应用潜力, 目前, 一致性控制问题已成为系统与控制领域的研究热点。在早期的研究中, 文献[1–3]以代数图论和控制论为基础取得了突破性的理论成果。一致性是指多智能体系统中的个体通过获取邻居信息不断调整并更新自身的状态, 多智能体系统中所有智能体状态最终收敛到某一个共同值, 关键在于设计一致性控制协议。

在一致性控制的研究中, 结合工程实践, 多智能体通信网络不可避免受自身通信能力的限制或外界不

确定情况的干扰^[4–5], 例如通信带宽、通讯失败、丢包、噪声和时滞等因素, 可能导致智能体状态发散。文献[6–11]研究了智能体接收邻居信息中含有加性标准高斯噪声的一致性问题。为了降低可测噪声对系统一致性的影晌, 文献[6]针对离散多智能体系统提出以递减步长为重要特征的随机近似类型的一致性算法。文献[7–8]分别得到一阶和二阶连续多智能体系统达到均方一致的充分必要条件, 其中对于一致性增益 $\{a(t)\}$ 的选取满足两个积分条件: $\int_0^\infty a(t) dt = \infty$ 和 $\int_0^\infty a^2(t) dt < \infty$, 广泛应用在通信网络受加性随机白噪声干扰的多智能体系统一致性研究中^[9–15]。在考

收稿日期: 2017–8–5; 录用日期: 2018–8–17。

[†]通信作者. E-mail: zw_ymail@163.com; Tel.: +86 18246780252.

本文责任编辑: 冯祖仁。

虑噪声干扰的基础上,许多学者进一步处理多智能体系统一致性控制中的通信时滞^[12-13, 15]和一致跟踪^[13-14]等问题,所设计的一致性控制协议 $a(t)$ 同样满足上述条件.

由于很多一致性算法很大程度上依赖系统全局信息(尤其是无向图所对应拉普拉斯矩阵的最小非零特征值,有向图所对应拉普拉斯矩阵的最小特征值的实部),为了克服这一缺陷,很多研究者采用自适应控制设计完全分布式一致性算法.文献[16-18]利用神经网络逼近每个智能体动态方程中的未知项,权重自适应律依赖跟踪误差进行调整,分别研究了二阶系统、高阶系统、有限时间的一致性跟踪问题.文献[19]基于相邻智能体状态输出构造出了“点型”和“边型”两类自适应算法,给出了多智能体系统实现一致的充分条件.文献[18-20]提出的自适应协议可以实现多智能体系统一致跟踪,多智能体系统动态方程中的非线性函数不需要满足Lipschitz(或Lipschitz-like)条件.文献[21]提出的分布式一致性协议仅需要相邻智能体的状态信息,无需系统全局信息.文献[22]研究了随机拉格朗日多智能体系统的一致跟踪问题,设计的自适应跟踪控制器可以确保跟踪误差在渐进意义下趋于0.

本文研究具有领导者的连续多智能体系统跟踪控制问题,所对应的有向拓扑通信图中,领导者作为根节点且在全局是可达的.文献[7-15]中每个智能体具有相同的一致性增益 $\{a(t)\}$,增益的选取与系统的状态无关,需要满足两个外在积分条件.本文采取自适应控制策略,针对不同的智能体设计不同的一致性增益 $\{a_i(t)\}$,一致性增益的自适应律仅仅依赖跟踪误差状态信息进行调整更新.有向通信网络中的信息含有加性随机白噪声,一致性增益完全依靠跟踪误差调整的研究工作少见.

2 预备知识

智能体之间的通信拓扑使用图进行描述,便于对系统分析.通常,对于给定的有向图 $G(V, E, A_0)$,其中: $V = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ 为非空节点集, $E \in V \times V$ 代表边集,对于任意一边 $(v_i, v_j) \in E$,其中: v_i 称为父节点, v_j 称为子节点,节点 v_i 的邻居智能体集合定义为 $N_i = \{v_j \in V : (v_j, v_i) \in E\}$.节点 v_{i_1} 到节点 v_{i_l} 的有向路径是由一系列有序边集 $(v_{i_k}, v_{i_{k+1}})$ 构成, $k = 1, \dots, l - 1$,则称节点 v_{i_1} 到节点 v_{i_l} 是可达的,如果有向图中节点 v_{i_1} 到任何一节点都存在有向路径,节点 v_{i_1} 被认为是全局可达的. $A_0 = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是通信拓扑对应的邻接矩阵,当 $j \in N_i$ 时, $a_{ij} \geq 0$;当 $i = j$ 时, $a_{ii} = 0$.如果 $\sum_{j=1}^n a_{ij} = \sum_{j=1}^n a_{ji}$,对于 $i = 1, 2, \dots, n$ 成立,那么称其所对应的拓扑图为平衡图,拓扑

图的拉普拉斯矩阵定义为 $L = [L_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$,其中:
 $L_{ii} = \sum_{i \neq j} a_{ij}$,且 $L_{ij} = -a_{ij}$, $i \neq j$.

随机微分方程

$$dx(t) = f(x(t), t)dt + g(x(t), t)dW(t), \quad (1)$$

其中: $f(0, t) = 0$ 和 $g(0, t) = 0$, $V \in C^{2,1}(\mathbb{R}^h \times \mathbb{R}^+; \mathbb{R})$ 是关于 $x(t)$ 二阶连续可微函数,微分算子 $\{\ell\}$ 作用在 $V(x(t), t)$ 上得

$$\begin{aligned} \ell V(x(t), t) &= V_t(x(t), t) + V_x(x(t), t)f(t) + \\ &\quad \frac{1}{2}\text{tr}(g^T(t)V_{xx}(x(t), t)g(t)), \end{aligned} \quad (2)$$

其中:

$$\begin{aligned} V_x &= [\frac{\partial V}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial V}{\partial x_d}]_{1 \times d}, \\ V_{xx} &= [\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}]_{d \times d}, \quad V_t = \frac{\partial V}{\partial t}. \end{aligned}$$

引理 1^[22] 对于系统(1),假设存在一个函数 $V \in C^{2,1}(\mathbb{R}^h \times \mathbb{R}^+; \mathbb{R})$,正常数 $k_i, k'_i, p_i, p'_i, c, d_c$ 满足

$$\sum k_i |x_i|^{p_i} \leq V(x(t), t) \leq \sum k'_i |x_i|^{p'_i}, \quad (3)$$

$$\ell V(x(t), t) \leq -cV(x(t), t) + d_c. \quad (4)$$

对每一个 $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$,系统(1)存在唯一强解 $x(t) = x(t; x_0, t_0)$,并且系统(1)是 p 阶矩阵指数稳定, $p = \min\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$.当 $p = 2$ 时,也称为均方意义上的矩阵指数稳定.

引理 2^[23] 针对式(1)描述的随机微分方程系统,如果式(4)成立,那么下述结论成立:

- 1) 随机系统(1)几乎处处有唯一解;
- 2) 随机系统(1)在概率意义上是有界的.

引理 3^[24] 下列的表述是等价的

- 1) 节点0在有向图 \bar{G} 是全局可达的;
- 2) H 是正稳定矩阵,其特征值实部为正;
- 3) 假若 G 是平衡图,那么 $(H + H^T)$ 是对称正定矩阵.

3 问题描述

本文讨论的多智能体系统由1个领导者{标记为0节点}和 n 个跟随者{依次标记为1, ..., n 节点}组成.本文假设 n 个跟随者之间的通信拓扑结构为有向图 $G(V, E, A_0)$,所对应的拉普拉斯矩阵为 L_G , $n + 1$ 个智能体之间的通信拓扑结构为有向图 $\bar{G}(\bar{V}, \bar{E}, \bar{A}_0)$,所对应的拉普拉斯矩阵为 $L_{\bar{G}}$. $L_{\bar{G}}$ 和 L_G 的关系写成分块矩阵形式如下:

$$L_{\bar{G}} = \begin{bmatrix} 0 & 0_{1 \times n} \\ -B \cdot \mathbf{1}_n & L_G + B \end{bmatrix}, \quad (5)$$

其中: $B = \text{diag}\{a_{10}, a_{20}, \dots, a_{n0}\}$, $\mathbf{1}_n = [1 \ 1 \ \dots]$

$1]_{1 \times n}^T$. 为了便于下文结论的证明, 令 $H = L_G + B$.

多智能体系统由 $n+1$ 个智能体组成 1 个领导者和 n 个跟随者, 第 i 个智能体的一阶动力学方程为

$$\dot{x}_i(t) = u_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (6)$$

其中: $x_i(t) \in \mathbb{R}^m$ 表示第 i 个智能体 t 时刻位置状态, $u_i(t) \in \mathbb{R}^m$ 表示第 i 个智能体 t 时刻控制输入, 为了下述证明方便简洁, 取 $m=1$, 如果所需控制状态要扩展到 $m \geq 2$ 维, 相应状态进行科卡尔积运算.

实际的智能体之间的通讯网络受不同类型的干扰, 本文假设智能体接收邻居位置信息含有加性白噪声, 智能体 i 接收与其相连邻居智能体的位置信息 $y_{ji}(t)$:

$$y_{ji}(t) = x_j(t) + \sigma_{ji}\eta_{ji}(t), \quad j \in N_i, \quad (7)$$

其中: $\{\eta_{ji}(t) : i = 1, \dots, n, j \in N_i\}$ 表示相互独立的标准白噪声, 且 $\sigma_{ji} > 0$ 表示噪声强度.

定义 1 每个跟随者可跟踪上领导者的条件是跟踪误差以均方意义下收敛到比较小的 $\epsilon \{ \epsilon > 0 \}$:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[x_i(t) - x_0(t)]^2 \leq \epsilon.$$

在有向通信网络中, 多智能体的位置测量含有加性高斯白噪声, 设计适当的自适应跟踪一致性算法, 满足定义 1.

假设 1 节点 0 在有向图 \bar{G} 中是全局可达的.

4 自适应跟踪控制

4.1 一致性协议

针对智能体 i , 本文设计的一致性控制协议如下:

$$\begin{aligned} u_i(t) = & a_i(t) \left\{ \sum_{j \in N_i} a_{ij}(y_{ji}(t) - x_i(t)) + \right. \\ & \left. a_{i0}(y_{0i}(t) - x_i(t)) \right\}, \\ i = & 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (8)$$

其中: $a_i(t) : 0 \leq \vartheta \leq a_i(t) \leq \vartheta_0 < \infty$, 表示智能体 i 在 t 时刻的一致性增益, 并且 ϑ 和 ϑ_0 为正常数.

对于智能体 i , 一致性增益 $a_i(t)$ 自适应律设计为

$$\begin{aligned} \dot{a}_i(t) = & (x_i(t) - x_0(t)) \sum_{j=1}^n [(x_j(t) - x_0(t)) \times \\ & \sum_{k=1}^n p_{jk} h_{ki}], \quad i = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (9)$$

其中: h_{ij} 为矩阵 $H = [h_{ij}]_{n \times n}$ 的元素, p_{ij} 为矩阵 $P = [p_{ij}]_{n \times n}$ 的元素. 根据假设 1, 满足引理 3, 那么必定存在为正定对称矩阵 P , 使得 H 和 P 满足关系式: $PH + H^T P = I_n$.

注 1 本文对不同智能体设计不同的增益 $a_i(t) : i = 1, 2, \dots, n$, 在式(9)中, 可以得知 $a_i(t)$ 的设计仅依赖于 t 时刻自身与领导者的相对位置状态. 在文献[7-15]中, 智能体系统中所有个体的一致性增益 $a(t)$ 相同, 它的选取

仅仅需要满足两个积分条件: $\int_0^\infty a(t)dt = \infty$ 和 $\int_0^\infty a^2(t)dt < \infty$. 由于该条件与智能体系统状态无关, 那么在通信网络有噪声干扰的基础之上, 更易于进一步探究通信时滞和含有领导者的多智能体系统跟踪等问题.

注 2 在已有的研究结论中, 一致性增益 $a(t)$ 只需满足上述给定的两个积分条件, 选择范围比较大, 比如 $a(t) = \frac{1}{1+t}$, $a(t) = \frac{\log(1+t)}{1+t}$ 等, 不同的 $a(t)$ 对应系统状态的收敛速度也不一样. 当 $a(t)$ 确定后, 无论智能体数目和有向平衡拓扑结构, 任意给定系统状态一组初始值, 在同一时刻, 每个智能体的一致性增益都是相同的和固定的, 与系统的状态无关, 具有“强制性”. 在本文中, 针对智能体 i , 系统状态不同的初始值, 一致性增益是不同的. 在同一时刻, 各个智能体的一致性增益也是不同的, 其自适应律取决于跟踪误差. 跟踪误差值越大, 调节的作用越大, 跟踪误差值越小, 调节的作用越小, 一致性增益呈现出“自调性”.

注 3 文献[7-8]的结论表明一致性增益的选取是设计控制协议是否有效的关键, 以用来减弱随机噪声对一致性控制的影响, 主要结论通过使用随机分析工具证明得到. 而本文主要基于自适应控制方法解决此问题. 两种不同方法所确定的一致性增益对系统达到一致性的作用机理不同, 智能体 i 的动态方程简化为

$$\dot{x}_i(t) = a_i(t)f(x_0(t), x_1(t), \dots, x_n(t)),$$

其中: $f(\cdot)$ 是有界函数; 当 $a_i(t) = \frac{1}{1+t}$, 随着时间 t 的增大, $a_i(t) = \frac{1}{1+t} \rightarrow 0$, 使得 $\dot{x}_i(t) \rightarrow 0$, 那么 $x_i(t)$ 趋于一个相对稳定值. 本文设计的 $a_i(t)$ 最终状态趋于一个理想估计值, 当 $x_j(t) \rightarrow x_j(t) \rightarrow x_0(t) (i \neq j)$ 时, 从而使 $f(\cdot) \rightarrow 0$, 进一步可得 $\dot{x}_i(t) \rightarrow 0$, 多智能体系统的状态最终趋于一个相对稳定值.

4.2 系统稳定性分析

将式(7)-(9)代入式(6)可得

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) = & a_i(t)[\sum_{j \in N_i} a_{ij}(x_j(t) + \sigma_{ji}\eta_{ji}(t) - \\ & x_i(t)) + a_{i0}(x_0(t) + \sigma_{0i}\eta_{0i}(t) - x_i(t))]. \end{aligned} \quad (10)$$

简化式(10)成为矩阵形式

$$\dot{X}(t) = -AHX(t) + AB(\mathbf{1}_n \otimes x_0(t)) + A\Theta\eta(t), \quad (11)$$

其中:

$$X(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ \dots \ x_n(t)]^T,$$

$$A = \text{diag}\{a_1(t), a_2(t), \dots, a_n(t)\},$$

$$\eta_0(t) = [\eta_{01}(t) \ \eta_{02}(t) \ \dots \ \eta_{0n}(t)]^T,$$

$$\eta_i(t) = [\eta_{1i}(t) \ \eta_{2i}(t) \ \dots \ \eta_{ni}(t)]^T,$$

$$\eta(t) = [\eta_0^T(t) \ \eta_1^T(t) \ \dots \ \eta_n^T(t)]^T,$$

$$\gamma_i = [a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{in}],$$

$$\begin{aligned}\Xi_0 &= \text{diag}\{\sigma_{01}, \sigma_{02}, \dots, \sigma_{0n}\}, \\ \Xi_i &= \text{diag}\{\sigma_{1i}, \sigma_{2i}, \dots, \sigma_{ni}\}, \\ \Theta &= [B\Xi_0 \ \text{diag}\{\gamma_1\Xi_1, \gamma_2\Xi_2, \dots, \gamma_n\Xi_n\}].\end{aligned}$$

定义跟踪误差向量 $\varepsilon(t) = [x_1(t) - x_0(t) \ x_2(t) - x_0(t) \ \dots \ x_n(t) - x_0(t)]^T$, 根据式(11), 智能体系统误差状态方程为

$$\dot{\varepsilon}(t) = -AH\varepsilon(t) + A\Theta\eta(t). \quad (12)$$

定理1 在假设1成立的前提下, 有向拓扑图中, 对于满足式(6)的 $(n+1)$ 个智能体所构成的多智能体系统, 在任意初始状态值下, 由式(8)–(9)构成的自适应一致性控制协议可保证跟随者以均方意义下跟踪上领导者

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[x_i(t) - x_0(t)]^2 \leq \epsilon.$$

证 把式(12)写成Itô型随机微分方程

$$d\varepsilon(t) = -AH\varepsilon(t)dt + A\Theta dW(t), \quad (13)$$

其中 $W(t)$ 是一个 $n \times (n+1)$ 维标准布朗运动.

选取李雅普诺夫函数如下:

$$\begin{aligned}V(t) &= V_1(t) + V_2(t) = \\ &\varepsilon^T(t)P\varepsilon(t) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \tilde{a}_i^2(t),\end{aligned} \quad (14)$$

其中: $\tilde{a}_i(t) = a_i(t) - \hat{a}_i(t)$, $\hat{a}_i(t) : 0 \leq \theta \leq \hat{a}_i(t) \leq \theta_0 < \infty$ 代表一致性增益的理想估计值; θ 和 θ_0 为正常数; 令矩阵 $\hat{A} = \text{diag}\{\hat{a}_1(t), \hat{a}_2(t), \dots, \hat{a}_n(t)\}$.

$V_1(x(t), t)$ 和 $V_2(x(t), t)$ 的取值范围如下:

$$\begin{aligned}\lambda_{\min}(P) \sum_{i=1}^n |\varepsilon_i(t)|^2 &\leq \\ V_1(\varepsilon(t), t) &\leq \lambda_{\max}(P) \sum_{i=1}^n |\varepsilon_i(t)|^2,\end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned}0 &\leq V_2(\varepsilon(t), t) = \\ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \tilde{a}_i^2(t) &\leq n(\theta_0^2 + \vartheta_0^2) = \Gamma,\end{aligned} \quad (16)$$

其中 Γ 为正常数.

结合式(15)和式(16)可得到

$$\sum_{i=1}^n \eta_i |\varepsilon_i(t)|^2 \leq V(t) \leq \sum_{i=1}^n \eta'_i |\varepsilon_i(t)|^2, \quad (17)$$

其中 η_i, η'_i 为正常数. 由式(17)可知 $V(t)$ 满足引理1中的式(3), 且可以得到 $p = 2$.

将式(14)沿着式(13)进行Itô过程, 利用式(2)微分算子 $\{\ell\}$ 作用法则可得

$$\begin{aligned}\ell V(t) &= -2\varepsilon^T(t)APH\varepsilon(t) + \\ &\text{tr}(PA\Theta\Theta^TA) + \dot{V}_2(t),\end{aligned} \quad (18)$$

$$\dot{V}_2(t) = \sum_{i=1}^n (a_i(t) - \hat{a}_i(t))\dot{a}_i(t). \quad (19)$$

根据式(18)和式(19)可知

$$\begin{aligned}\ell V(t) &= -2\varepsilon^T(t)APH\varepsilon(t) + \text{tr}(PA\Theta\Theta^TA) + \\ &\sum_{i=1}^n (a_i(t) - \hat{a}_i(t))\dot{a}_i(t).\end{aligned} \quad (20)$$

为使系统状态以均方意义收敛, 在引理1中的式(4)中, c, d_c 是正常数, 根据等式(20)右边第1项的结构, 那么式(20)改写成

$$\begin{aligned}\ell V(t) &= -\varepsilon^T(t)(A + \hat{A})PH\varepsilon(t) + \\ &\dot{V}_2(t) - \varepsilon^T(t)(A - \hat{A})PH\varepsilon(t) + \\ &\text{tr}(PA\Theta\Theta^TA).\end{aligned} \quad (21)$$

令

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n (a_i(t) - \hat{a}_i(t))\dot{a}_i(t) - \\ \varepsilon^T(t)(A - \hat{A})PH\varepsilon(t) = 0,\end{aligned} \quad (22)$$

又有

$$\begin{aligned}\varepsilon^T(t)(A - \hat{A})PH\varepsilon(t) = \\ \sum_{i=1}^n [(a_i(t) - \hat{a}_i(t))(x_i(t) - x_0(t))] \times \\ \sum_{j=1}^n [(x_j(t) - x_0(t)) \sum_{k=1}^n p_{jk} h_{ki}].\end{aligned} \quad (23)$$

将式(23)代入式(22), 求解可得一致性增益自适应律

$$\begin{aligned}\dot{a}_i(t) &= (x_i(t) - x_0(t)) \sum_{j=1}^n [(x_j(t) - x_0(t)) \times \\ &\sum_{k=1}^n p_{jk} h_{ki}], \quad i = 1, 2, \dots, n.\end{aligned} \quad (24)$$

化简式(21)可得

$$\begin{aligned}\ell V(t) &= \\ -\varepsilon^T(t)(A + \hat{A})PH\varepsilon(t) + \text{tr}(PA\Theta\Theta^TA) &\leq \\ -\frac{\theta + \vartheta}{2} \varepsilon^T(t)(PH + H^T P)\varepsilon(t) + \text{tr}(PA\Theta\Theta^TA) &\leq \\ -\min\left\{\frac{\theta + \vartheta}{2\lambda_{\max}(P)}, 1\right\} V(t) + \\ n\lambda_{\max}(P)\vartheta_0^2 \|\Theta\|^2 + n(\theta_0^2 + \vartheta_0^2) &= \\ -\min\left\{\frac{\theta + \vartheta}{2\lambda_{\max}(P)}, 1\right\} V(t) + \\ n\max\{\theta_0^2, \vartheta_0^2\}(2 + \lambda_{\max}(P))\|\Theta\|^2 &= \\ -\mu V(t) + \mu_0,\end{aligned} \quad (25)$$

其中: $\mu_0 = n\max\{\theta_0^2, \vartheta_0^2\}(2 + \lambda_{\max}(P))\|\Theta\|^2$, 且 $\mu = \min\left\{\frac{\theta + \vartheta}{2\lambda_{\max}(P)}, 1\right\}$. 那么, 上述式(17)和式(25)满足引理1. 因为

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(V(t)) &= \mathbb{E} \int_{t_0}^t \ell V(s) ds + \mathbb{E}(V(t_0)) \leq \\ V(t_0)e^{-\mu(t-t_0)} + \mu^{-1}\mu_0,\end{aligned} \quad (26)$$

$V(t)$ 在均方意义下收敛到紧集 $\Omega = \{(\varepsilon(t), \tilde{a}(t)) \in$

$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : V(\varepsilon(t), \tilde{a}(t)) \leq \mu^{-1} \mu_0$. 根据式(25)结果可得, 当 $(\varepsilon(t), \tilde{a}(t))$ 在紧集 Ω 之外, $\ell V(t)$ 是严格单调递减的, 由引理2可知 $\varepsilon(t)$ 和 $\tilde{a}(t)$ 是依概率有界的, 又由式(14), 那么

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[x_i(t) - x_0(t)]^2 \leq \epsilon, \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[a_i(t) - \hat{a}_i(t)]^2 \leq \epsilon, \end{cases} \quad i = 1, \dots, n. \quad (27)$$

所以可得定理1成立, 同时, 可知 $a_i(t)$ 趋于理想估计值 $\hat{a}_i(t)$. 证毕.

注4 在智能体之间的通信过程中, 通信失败、通信重连或通信范围有限等都可能会导致通信拓扑结构发生改变, 本文所给出的结论也可以推广到时变有向平衡图 $\{\bar{G}_1(t), \bar{G}_2(t), \dots, \bar{G}_h(t)\}$, 在每个有向平衡图 $\bar{G}_i(t)$ 中, 领导者节点0是全局可达的. 假设切换信号 $s(t) : [t_1, \infty) \rightarrow s = \{1, 2, \dots, h\}$ 把时间区间 $[t_1, \infty)$ 分成有限个且相互不重叠时间段 $[t_s, t_{s+1})$ $\{s = 1, 2, \dots, h\}$.

假设在 $[t_s, t_{s+1})$ 时间段, 相对应的有向拓扑图为 $\bar{G}_s(t)$, 与上文证明所需要的类似量, 用下标 s 进行标注区别, 此段对应的系统误差状态方程为

$$\dot{\varepsilon}(t) = -A_s H_s \varepsilon(t) + A_s \Theta_s \eta(t). \quad (28)$$

一致性控制协议如下:

$$u_i(t) = a_{is}(t) \left\{ \sum_{j \in N_i} a_{js}(y_{ji}(t) - x_i(t)) + a_{i0s}(y_{0i}(t) - x_i(t)) \right\}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (29)$$

在切换拓扑情况下, 设计的一致性自适应增益律和固定拓扑情况下的形式相似如下:

$$\dot{a}_{is}(t) = (x_i(t) - x_0(t)) \sum_{j=1}^n [(x_j(t) - x_0(t)) \times \sum_{k=1}^n h_{kis}], \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (30)$$

根据引理1的性质2, 可得 $(H_s + H_s^T)$ 是称正定矩阵, 在时间段 $[t_s, t_{s+1})$, 选择李雅普诺夫函数

$$V_s(t) = \varepsilon^T(t) \varepsilon(t) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \tilde{a}_{is}^2(t).$$

根据式(28)–(30), 采用上文类似的推导方法可得

$$\ell V_s(t) \leq -\frac{\theta_s + \vartheta_s}{2} \varepsilon^T(t) (H_s + H_s^T) \varepsilon(t) + \text{tr}(A_s \Theta_s \Theta_s^T A_s). \quad (31)$$

在时间段 $[t_1, \infty)$, 选取李雅普诺夫函数如下:

$$V(t) = \sum_{s=1}^h V_s(t).$$

结合式(31)可得

$$\ell V(t) \leq -\frac{\hbar \phi}{2} \varepsilon^T(t) \varepsilon(t) + h \text{tr}(A_{h_0} \Theta_{h_0} \Theta_{h_0}^T A_{h_0}),$$

其中:

$$\begin{aligned} \text{tr}(A_{h_0} \Theta_{h_0} \Theta_{h_0}^T A_{h_0}) &= \max\{\text{tr}(A_s \Theta_s \Theta_s^T A_s)\}, \\ \hbar &= \lambda_{\min}\{H_s + H_s^T\}, \quad \phi = \min \theta_s + \vartheta_s, \\ s &= 1, 2, \dots; h_0, \dots, h; h_0 \leq h. \end{aligned}$$

后续证明与前文证明类似, 在此不再展开.

5 仿真实例

为了验证主要结论的正确性和有效性, 仿真实例考虑的多智能体系统由1个领导者(标记为节点0)和4个跟随者(依次标记为节点1, 2, 3, 4)构成, 噪声强度 $\sigma_{ij} = 1$, 在固定拓扑情况下, 图1中的 \bar{G} 是本例仿真采用的有向通信拓扑图, 根据上文定义可得拉普拉斯矩阵 L_G 和 B , 领导者节点0在全局是可达的, 由 $H = L_G + B$ 可得

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (32)$$

以及 H 和 P 满足的关系式: $PH + H^T P = I_4$, 经过计算可知

$$P = \begin{bmatrix} 0.5560 & 0.3983 & 0.6120 & 0.4336 \\ 0.3983 & 0.8983 & 0.6390 & 0.6660 \\ 0.6120 & 0.6390 & 1.4025 & 0.9025 \\ 0.4336 & 0.6660 & 0.9025 & 1.1660 \end{bmatrix}. \quad (33)$$

根据式(32)和式(33)的结果, 并结合式(9)和式(12), 任意选取跟随者的状态初值 $X(t) = [-3.5 \ 2 \ 4 \ -1]^T$, 领导者的状态值 $x_0(t) \equiv 1$, 一致性增益的初值 $a(t) = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$. 采用已有的研究结论, 假设系统中所有智能体的时变一致性增益都设计为 $a(t) = 1/(t+1)$, 经过计算可知, $a(t)$ 满足上述的两个条件: $\int_0^\infty a(t) dt = \infty$ 和 $\int_0^\infty a^2(t) dt < \infty$, 选取同样的跟随者状态初值 $X(t) = [-3.5 \ 2 \ 4 \ -1]^T$, 领导者的状态值 $x_0(t) \equiv 1$.

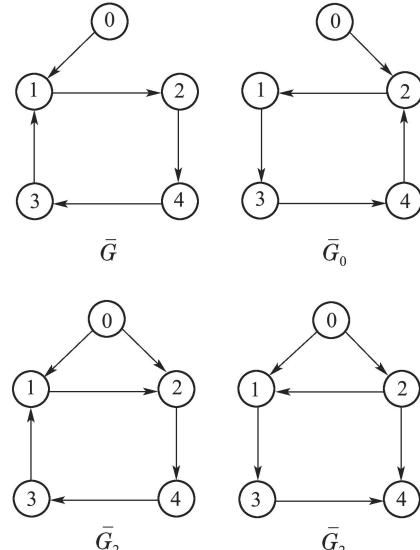


图1 有向通信拓扑

Fig. 1 The directed communication topology

图2和图3描述了每个智能体的位置状态轨迹, 仿真结果都表明每个跟随者都可以在均方意义上跟踪上领导者. 在图2中, 本文提出增益的选取和跟踪误差

有关,位置跟踪的平稳性较好.在图3中,特别是仿真初始时段,由于一致性增益 $a(t)$ 具有“强制性”,会使系统状态产生较强的波动.图4和图5分别描述了这两种方法中的一致性增益随时间演变过程,在自适应控制策略下,在图4中,每个智能体的一致性增益最终都趋于理想估计值,图5表明一致性增益是单调递减的,随着时间的推移,一致性增益逐渐趋于0.由此仿真结果可见,本文提出的自适应一致性算法的正确性和有效性.

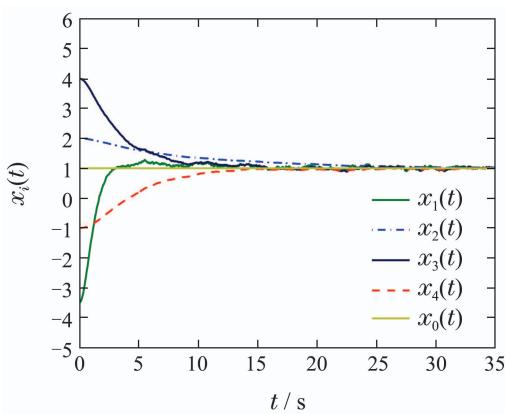


图2 系统状态轨迹(自适应控制方法)

Fig. 2 System state trajectory (adaptive control method)

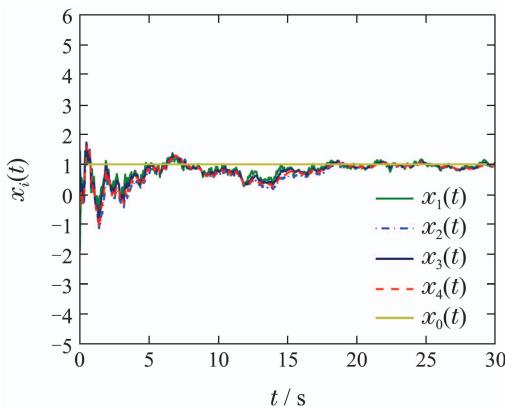


图3 一致性增益轨迹(自适应控制方法)

Fig. 3 Consensus gain trajectory (adaptive control method)

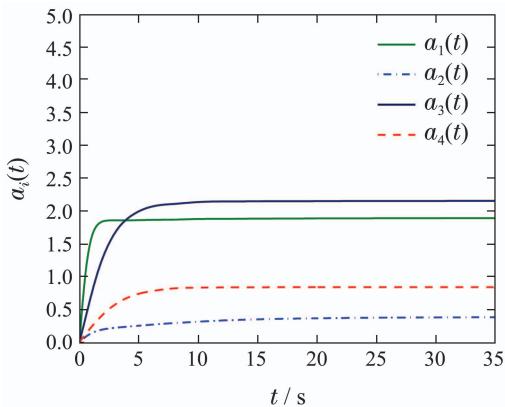


图4 系统状态轨迹($a(t) = \frac{1}{1+t}$)

Fig. 4 System state trajectory ($a(t) = \frac{1}{1+t}$)

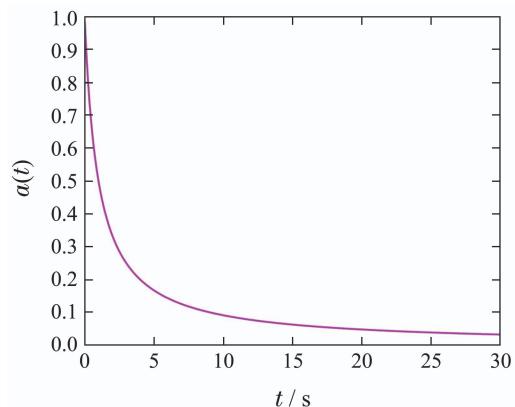


图5 一致性增益轨迹($a(t) = \frac{1}{1+t}$)

Fig. 5 Consensus gain trajectory ($a(t) = \frac{1}{1+t}$)

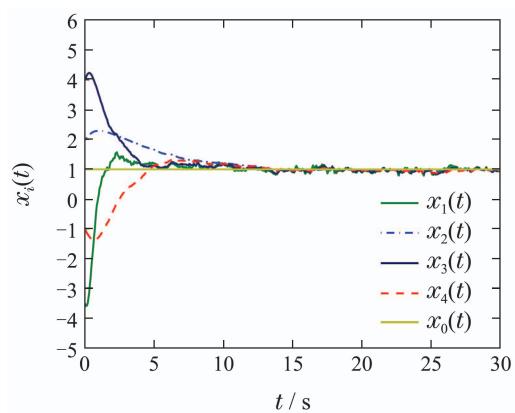


图6 系统状态轨迹(切换拓扑)

Fig. 6 System state trajectory (switching topology)

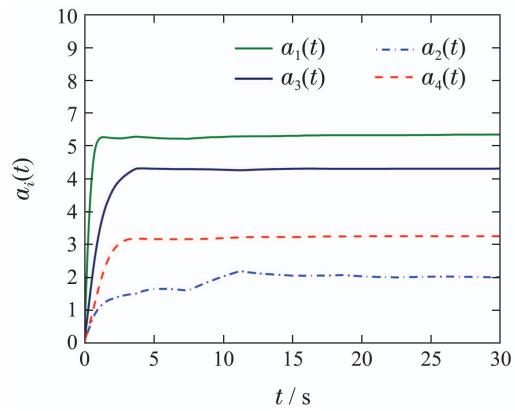


图7 一致性增益轨迹(切换拓扑)

Fig. 7 Consensus gain trajectory (switching topology)

当智能体之间的通信方式发生变化时,即有向平衡图发生改变.在仿真实验中,图1中包含智能体之间所有可能的通信方式,假设通信拓扑每隔3.75 s依次轮流切换($\bar{G} \rightarrow \bar{G}_0 \rightarrow \bar{G}_1 \rightarrow \bar{G}_2 \rightarrow \bar{G} \rightarrow \dots$),仿真时间为30 s,总计切换了7次.跟随者系统状态初值,一致性增益初值,领导者状态值的选取和固定拓扑仿真选取的状态初值相同.在切换拓扑情况下,每个智能体的状态轨迹如图6所示,每个跟随者最终以均方意

义下跟踪上领导者, 每个跟随者的状态波动性较小。在图7中, 和固定拓扑通信结构的仿真结果相比较, 每次拓扑切换会使一致性增益产生较小波动, 随着时间推移, 每个跟随者的一致性增益最终趋于不同的理想估计值。

6 结论

本文考虑了有向图中多智能体通信受加性随机白噪声干扰的情况, 并给出了一致控制协议和一致性增益的自适应律, 利用图论和随机分析工具, 证明了跟随者在均方意义上跟踪上领导者, 每个跟随者的时变一致性增益皆趋于一个理想估计值, 最后通过仿真实例验证了所提一致性算法的合理性和有效性。接下来将研究二阶随机多智能体系统一致性增益的选择问题。

参考文献:

- [1] JADBABAIE A, LIN J, MORSE A S. Coordination of groups of mobile autonomous agents using nearest neighbor rules. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, 48(6): 988 – 1001.
- [2] OLFATI-SABER R, MURRAY R M. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(9): 1520 – 1533.
- [3] REN W, BEARD R W. Consensus seeking in multiagent systems under dynamically changing interaction topologies. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, 50(5): 655 – 661.
- [4] YUAN Wangui, QU Baida. Consensus value of multi-agent systems with intervention and design of target tracking. *Control Theory & Applications*, 2015, 32(6): 844 – 848.
(袁玩贵, 屈百达. 受干预多智能体系统平衡状态及目标追踪设计. 控制理论与应用, 2015, 32(6): 844 – 848.)
- [5] MO Lipo, PAN Tingting. Mean-square bounded consensus of discrete-time multi-agent systems with external disturbance. *Control Theory & Applications*, 2016, 33(3): 361 – 367.
(莫立坡, 潘婷婷. 受外界干扰的离散多智能体系统的均方有界一致性. 控制理论与应用, 2016, 33(3): 361 – 367.)
- [6] HUANG M, MANTON J H. Coordination and consensus of networked agents with noisy measurements: stochastic algorithms and asymptotic behavior. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2009, 48(1): 134 – 161.
- [7] LI T, ZHANG J F. Mean square average-consensus under measurement noises and fixed topologies: necessary and sufficient conditions. *Automatica*, 2009, 45(8): 1929 – 1936.
- [8] CHENG L, HOU Z G, TAN M, et al. necessary and sufficient conditions for consensus of double-integrator multi-agent systems with measurement noises. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2011, 56(8): 1958 – 1963.
- [9] ZONG X F, LI T, ZHANG J F. Stochastic consensus of continuous-time multi-agent systems with additive measurement noises. *Proceedings of the 54th Annual Conference on Decision and Control*. Osaka: IEEE, 2015: 543 – 548.
- [10] CHENG L, HOU Z G, TAN M. A mean square consensus protocol for linear multi-agent systems with communication noises and fixed topologies. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, 59(1): 261 – 267.
- [11] WANG Y, CHENG L, REN W, et al. seeking consensus in networks of linear agents: communication noises and markovian switching topologies. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2015, 60(5): 1374 – 1379.
- [12] LIU J, LIU X, XIE W C, et al. Stochastic consensus seeking with communication delays. *Automatica*, 2011, 47(12): 2689 – 2696.
- [13] DJAIDJA S, WU Q H. Stochastic consensus of leader-following multi-agent systems under additive measurement noises and time-delays. *European Journal of Control*, 2015, 23: 55 – 61.
- [14] HU J P, GANG F. Distributed tracking control of leader-follower multi-agent systems under noisy measurement. *Automatica*, 2010, 46(8): 1382 – 1387.
- [15] LIU J, ZHANG H, LIU X, et al. Distributed stochastic consensus of multi-agent systems with noisy and delayed measurements. *IET Control Theory & Applications*, 2013, 7(10): 1359 – 1369.
- [16] ABHIJIT D, FRANK L L. Cooperative adaptive control for synchronization of second-order systems with unknown nonlinearities. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2011, 21(13): 1509 – 1524.
- [17] ZHANG H W, FRANK L L. Adaptive cooperative tracking control of higher-order nonlinear systems with unknown dynamics. *Automatica*, 2012, 48(7): 1432 – 1439.
- [18] YU H, SHEN Y J, XIA X H. Adaptive finite-time consensus in multi-agent networks. *Systems & Control Letters*, 2013, 62(10): 880 – 889.
- [19] LI Z K, REN W, LIU X D, et al. Distributed consensus of linear multi-agent systems with adaptive dynamic protocols. *Automatica*, 2013, 49(7): 1986 – 1995.
- [20] WANG C R, WANG X H, JI H B. Leader-following consensus for a class of second-order nonlinear multi-agent systems. *Systems & Control Letters*, 2016, 89: 61 – 65.
- [21] LI Z K, WEN G H, DUAN Z S, et al. Designing fully distributed consensus protocols for linear multi-agent systems with directed graphs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2015, 60(4): 1152 – 1157.
- [22] CUI M Y, WU Z J, XIE X J, et al. Modeling and adaptive tracking for a class of stochastic lagrangian control systems. *Automatica*, 2013, 49(3): 770 – 779.
- [23] LIU Y G, ZHANG J F. Reduced-order observer-based control design for nonlinear stochastic systems. *Systems & Control Letters*, 2004, 52(2): 123 – 135.
- [24] HU J, HONG Y. Leader-following coordination of multi-agent systems with coupling time delays. *Physica A Statistical Mechanics & Its Applications*, 2007, 374(2): 853 – 863.

作者简介:

段玉波 教授, 博士生导师, 主要研究方向为智能控制、最优滤波、神经网络理论及应用、电力系统综合自动化、油田节能等的理论及应用, E-mail: 13904697561@163.com;

杨振威 硕士研究生, 主要研究方向为多智能体协调控制, E-mail: zw_ymail@163.com.