DOI: 10.7641/CTA.2017.70566

# 柔性卫星系统的振动自适应边界控制

# 刘 屿, 付 云, 刘伟东<sup>†</sup>, 吴忻生

(华南理工大学自动化科学与工程学院,广东广州 510641)

摘要:针对受外部干扰和具有结构参数不确定性的柔性卫星系统,为了抑制其振动和避免控制溢出问题,采用 Hamilton变分原理和Euler-Bernoulli梁理论建立了结构无穷维偏微分方程模型,随后基于该无穷维模型设计了带有 干扰自适应律的自适应边界控制对柔性卫星振动进行主动控制,并证明了闭环柔性卫星控制系统解的存在性、唯 一性和收敛性,最后,仿真结果验证了所设计的自适应边界控制算法的有效性.

关键词:柔性卫星;振动控制;边界控制;自适应算法;适定性

**引用格式**: 刘屿, 付云, 刘伟东, 等. 柔性卫星系统的振动自适应边界控制. 控制理论与应用, 2018, 35(7): 973 – 980 中图分类号: TP273 文献标识码: A

# Adaptive vibration boundary control for a flexible satellite system

LIU Yu, FU Yun, LIU Wei-dong<sup>†</sup>, WU Xin-sheng

(School of Automation Science and Technology, South China University of Technology, Guangzhou Guangdong 510641, China)

**Abstract:** To suppress the vibration and avoid the control spillover problem of a flexible satellite system with the external disturbances and system parametric uncertainties, an adaptive boundary control with disturbance adaptive law is proposed based on the infinite dimensional partial differential equation model derived by Hamilton's principle and Euler-Bernoulli beam theory. Under the designed boundary control, the existence, uniqueness and convergence of the solution for the closed-loop flexible satellite system are proven. The simulation results illustrate the effectiveness of the proposed adaptive boundary control.

Key words: flexible satellite; vibration control; boundary control; adaptive algorithms; well-posedness

**Citation:** LIU Yu, FU Yun, LIU Weidong, et al. Adaptive vibration boundary control for a flexible satellite system. *Control Theory & Applications*, 2018, 35(7): 973 – 980

# 1 引言(Introduction)

带有柔性太阳能帆板的卫星系统被广泛应用于通讯、遥感和空间探测等领域,柔性帆板在外部干扰的作用下将产生振动,从而影响卫星系统的性能,甚至会损坏卫星<sup>[1-2]</sup>.因此,为了提高卫星系统的运行性能和使用寿命,亟需开展对其振动的主动控制研究.

柔性卫星系统具有无穷多个模态,其动力学模型 中的控制方程由无穷维偏微分方程(partial differential equation, PDE)描述,因此难以直接对其进行控制设 计.传统控制方法采用模态展开法、有限元法和集中 质量法等对无穷维PDE进行降阶处理,随后基于降阶 模型进行控制设计.然而,当仅对有限个关键模态进 行控制时,可能导致控制溢出和模型偏差等问题,而 若增加控制模态数,则又会出现因高阶控制而导致控 制器难以实现的问题<sup>[3-4]</sup>.

近年来,直接基于无穷维PDE模型的边界控制,因 其能避免控制溢出等问题且仅需较少传感/执行器而 被广泛地应用于无穷维系统的主动控制,如柔性臂式 结构<sup>[5-7]</sup>、轴向移动结构<sup>[8-9]</sup>、波和热方程<sup>[10-11]</sup>等,文 献[12]对近年边界控制研究所取得的进展以及将来研 究方向进行了概述.但是,对于柔性卫星系统的主动 控制,现有研究成果绝大多数都是基于其降阶模型进 行控制设计<sup>[1-2,13-15]</sup>,而文献[16-17]是仅有少数直接 基于其无穷维PDE模型进行主动控制的研究成果,但

<sup>†</sup>通信作者. E-mail: auylau@scut.edu.cn; Tel.: +86 20-87114489.

本文责任编委:姚鹏飞.

收稿日期: 2017-08-11; 录用日期: 2017-12-04.

国家自然科学基金项目(61203060), 广东省科技计划项目(2017B090910006, 2016B090912003, 2016B090927010, 2016B010126001), 华南理工大学中央高校基本科研业务费项目(2017ZD058), 国家留学基金委项目([2016]3192)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (61203060), the Science and Technology Planning Project of Guangdong Province (2017B090910006, 2016B090912003, 2016B090927010, 2016B010126001), the Fundamental Research Funds for Central Universities of SCUT (2017ZD058) and the China Scholarship Council ([2016]3192).

是它们忽略了未知干扰和系统参数不确定性对主动 控制性能的影响,以及它们虽然讨论了闭环控制系统 的稳定性问题,但未对闭环控制系统解的存在性、唯 一性和收敛性(即适定性)进行讨论.

本文采用Euler-Bernoulli梁式结构建立包含未知 干扰的卫星系统无穷维PDE模型,并直接基于该无穷 维模型,结合Lyapunov直接法、自适应和边界控制技 术,设计了自适应边界控制器对卫星的振动进行主动 控制,利用算法自适应能力补偿控制系统和外部未知 干扰的不确定性,并避免了传统控制方法的控制溢出 等问题.此外,基于所设计控制算法,讨论了卫星控制 系统的适定性和稳定性问题,以及通过数字仿真研究 验证所设计控制算法的有效性.

# 2 问题描述和预备知识(Problem formulation and preliminaries)

#### 2.1 动力学分析(Dynamics analysis)

图1为一类典型的带有柔性太阳能帆板的卫星系统,坐标*XOY*的原点O位于卫星中心,卫星本体视为质量为m的一个质点,*l*为帆板长度,*z*(*s*,*t*)为帆板振动偏移量,控制器位于卫星中心且控制输入*u*(*t*)指向*Y*轴,*f*(*s*,*t*)为作用于卫星系统的分布式干扰,*d*(*t*)为控制器工作时带来的边界扰动.在本文中作如下简写:



#### 图 1 典型的柔性卫星系统

#### Fig. 1 A typical flexible satellite system

柔性卫星系统两侧帆板为对称结构,因此在本文中只研究其右侧部分,而左侧部分与之完全相同.采用Euler-Bernoulli梁式结构对柔性卫星系统建模,其动能*E<sub>k</sub>(t)*为

$$E_k(t) = \frac{1}{2}m\dot{z}^2(0,t) + \frac{1}{2}\rho A \int_0^l \dot{z}^2 \mathrm{d}s, \qquad (1)$$

其中: ρ和A分别为帆板密度和单位长度面积, z(0,t) 为质点振动偏移量.

帆板弯曲变形导致的势能 $E_{p}(t)$ 为

$$E_{\rm p}(t) = \frac{1}{2} {\rm EI} \int_0^l (z'')^2 {\rm d}s + \frac{1}{2} T \int_0^l (z')^2 {\rm d}s, \quad (2)$$

其中EI和T分别为帆板的弯曲刚度和张力.

非保守力、阻尼和控制输入所作的功 $\delta W(t)$ 为

$$\delta W(t) = -\int_0^l \gamma_1 \dot{z} \delta z \mathrm{d}s + \int_0^l f \delta z \mathrm{d}s + [d(t) - d_\mathrm{s} \dot{z}(0, t) + u(t)] \delta z(0, t), \quad (3)$$

其中 $\gamma_1$ 和 $d_s$ 分别为结构阻尼系数和控制器阻尼系数. 柔性卫星系统运动方程可由Hamilton原理描述为

$$\int_{t_1}^{t_2} [\delta E_k(t) - \delta E_p(t) + \delta W(t)] dt = 0, \quad (4)$$

其中: δ为变分操作符, t<sub>1</sub>和t<sub>2</sub> (t<sub>1</sub> < t<sub>2</sub>)分别为两时刻. 将式(1)-(3)代入式(4),并运用变分和分部积分可

得卫星系统的控制方程

$$\rho A\ddot{z} + \text{EI}z^{(4)} - Tz'' + \gamma_1 \dot{z} = f,$$
(5)

$$\begin{cases} z'(0,t) = z''(l,t) = 0, \\ \operatorname{EI} z'''(l,t) = T z'(l,t), \\ m \ddot{z}(0,t) = \operatorname{EI} z'''(0,t) - d_{\mathrm{s}} \dot{z}(0,t) + \\ u(t) + d(t), \ \forall t \in [0,+\infty). \end{cases}$$
(6)

#### 2.2 预备知识(Preliminaries)

**引理 1**<sup>[18]</sup> 设 $z_1(s,t), z_2(s,t) \in \mathbb{R}, \psi > 0, \forall (s,t) \in [0, l] \times [0, +\infty), 则有下列不等式成立:$ 

$$z_1 z_2 \leqslant \frac{1}{\psi} z_1^2 + \psi z_2^2.$$
 (7)

**引理 2**<sup>[19]</sup> 设z(s,t)为 $[0,l] \times [0,+\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,则 下列不等式成立:

$$z^{2} \leq z^{2}(0,t) + \int_{0}^{l} z^{2} ds + \int_{0}^{l} (z')^{2} ds.$$
 (8)

**引理 3**<sup>[8]</sup> 设 $z(s,t) \in \mathbb{R}$ 为定义在 $z(s,t) \in [0,l]$ ×  $[0, +\infty)$ 上的函数,且满足z'(l,t) = 0,有下列不等 式成立:

$$\int_{0}^{l} z^{2} \mathrm{d}s \leq l^{4} \int_{0}^{l} (z'')^{2} \mathrm{d}s + lz^{2}(0,t).$$
(9)

**引理**  $4^{[18]}$  设 $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是一个正定的实对称矩 阵,  $\lambda_{\min} \pi \lambda_{\max}$ 分别为其最小和最大特征值, 则有

 $\lambda_{\min}||x||^2 \leqslant x^{\mathrm{T}} B x \leqslant \lambda_{\max} ||x||^2, \ \forall x \in \mathbb{R}^n, \ (10)$ 其中||·||为欧氏范数.

**引理 5**<sup>[9]</sup> 设任给 $z = [z_1 \cdots z_i \cdots z_n]^{\mathrm{T}}$ ,其中  $z_i \in C^1[0, l], i = 1, \cdots, n, 则下列不等式成立:$ 

$$\begin{cases} \int_{0}^{l} z \cdot z dx \leqslant 2lz(0) \cdot z(0) + 4l^{2} \int_{0}^{l} z' \cdot z' ds, \\ \int_{0}^{l} z \cdot z dx \leqslant 2lz(l) \cdot z(l) + 4l^{2} \int_{0}^{l} z' \cdot z' ds, \\ \max_{s \in [0,l]} [z \cdot z] \leqslant 2\sqrt{\int_{0}^{l} z \cdot z ds} \sqrt{\int_{0}^{l} z' \cdot z' ds} + z(0) \cdot z(0), \\ \max_{s \in [0,l]} [z \cdot z] \leqslant 2\sqrt{\int_{0}^{l} z + \cdot z ds} \sqrt{\int_{0}^{l} z' \cdot z' ds} + z(l) \cdot z(l). \end{cases}$$

$$(11)$$

**假设1** 对于分布式干扰f(s,t)和边界干扰d(t), 存在正常数 $\bar{f}$ 和 $\bar{d}$ ,使得 $|f(s,t)| \leq \bar{f}$ ,  $\forall (s,t) \in [0,l] \times$  第7期

 $[0, +\infty) \boxplus |d(t)| \leq \bar{d}, \forall t \in [0, +\infty).$ 

### 3 控制设计(Control design)

在外部未知边界干扰d(t)和分布式干扰f(x,t)、 以及系统结构参数m, EI和d<sub>s</sub>不确定情况下,本文通 过设计自适应边界控制实现卫星系统(5)-(6)的振动 主动抑制,其中参数和干扰自适应律分别用于补偿系 统参数和边界干扰的不确定性.为使所设计闭环控制 系统稳定,推出如下自适应边界控制

$$u(t) = -P\hat{\Phi} - k_1 u_{\rm a}(t) + u_{\rm d}(t),$$
 (12)

其中k<sub>1</sub>为控制增益,系统参数估计向量**Φ**和控制输入 矩阵P分别为

$$\hat{\Phi} = \begin{bmatrix} \hat{m} \\ \hat{EI} \\ \hat{d}_{s} \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} \dot{z}'''(0,t) + \dot{z}(0,t) \\ -z'''(0,t) \\ -\dot{z}(0,t) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \quad (13)$$

其中: $\hat{m}, \hat{d}_{s}$ 和ÉI分别为系统参数 $m, d_{s}$ 和EI的估计. 辅助项 $u_{a}(t)$ 定义为

$$u_{\rm a}(t) = z^{\prime\prime\prime}(0,t) + z(0,t) + \dot{z}(0,t), \qquad (14)$$

基于鲁棒控制策略<sup>[8]</sup>,设计辅助输入项u<sub>d</sub>(t)为

$$u_{\rm d}(t) = -\frac{\hat{d}^2(t)}{\hat{d}(t)|u_{\rm a}(t)| + \iota} u_{\rm a}(t), \tag{15}$$

其中: *d*(*t*)为边界干扰的上界*d*的估计, *ι*为正常数.

设计干扰自适应律为

$$\dot{\hat{d}}(t) = -\frac{\nu}{\mu}\hat{d}(t) + \frac{1}{\mu}|u_{\rm a}(t)|,$$
 (16)

其中 $\nu$ 和 $\mu$ 为正常数.并定义干扰估计误差 $\tilde{d}(t)$ 为

$$\tilde{d}(t) = \bar{d} - \hat{d}(t). \tag{17}$$

系统参数估计误差向量 $\tilde{\Phi}$ 定义为

$$\tilde{\Phi} = \hat{\Phi} - \Phi = [\hat{m} - m \quad \hat{\mathrm{EI}} - \mathrm{EI} \quad \hat{d}_{\mathrm{s}} - d_{\mathrm{s}}]^{\mathrm{T}}.$$
(18)

设计系统结构参数参数自适应律为

$$\hat{\Phi} = \Gamma P^{\mathrm{T}} u_{\mathrm{a}}(t) - \varsigma \Gamma \hat{\Phi}, \qquad (19)$$

其中:  $\Gamma \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ 为正定对角矩阵,  $\varsigma$ 为正常数.

**注**1 边界控制式(12)中输入信号z(0,t)和z<sup>'''</sup>(0,t)可 分别由位移传感器和剪力传感器测得, ż(0,t)和ż<sup>'''</sup>(0,t)可由 对z(0,t)和z<sup>'''</sup>(0,t)用后差分算法计算得到.本文传感器和 制动器均位于中心体上,所设计控制器只需知道系统边界状 态量,因此需要的传感器数量很少,这样可以减轻卫星所携带 的物体质量,更有利于卫星的运行.

给定候选Lyapunov函数为

$$V(t) = E_1(t) + E_2(t) + E_3(t) + \frac{\mu}{2}\tilde{d}^2(t) + \frac{1}{2}\tilde{\varPhi}^{\rm T}\Gamma^{-1}\tilde{\varPhi},$$
(20)

其中:

$$\begin{cases}
E_1(t) = \frac{\alpha \gamma_1}{2} \int_0^l z^2 ds + \frac{\beta T}{2} \int_0^l (z')^2 ds + \frac{\beta \rho A}{2} \int_0^l \dot{z}^2 ds + \frac{\beta EI}{2} \int_0^l (z'')^2 ds, \\
E_2(t) = \frac{1}{2} m u_a^2(t) + \frac{\kappa}{2} z^2(0, t), \\
C_3(t) = \alpha \rho A \int_0^l z \dot{z} ds,
\end{cases}$$
(21)

其中α, β和κ为正的权重常数.

**引理6** 由式(20)给定的Lyapunov函数具有如下上下界:

$$0 \leqslant \lambda_{1}[E_{1}(t) + E_{2}(t) + \tilde{d}^{2}(t) + ||\tilde{\Phi}||^{2}] \leqslant V(t) \leqslant \lambda_{2}[E_{1}(t) + E_{2}(t) + \tilde{d}^{2}(t) + ||\tilde{\Phi}||^{2}], \quad (22)$$

其中 $\lambda_1$ 和 $\lambda_2$ 为两个正常数. **证** 运用引理4可得

$$\frac{1}{\tau_{\max}} ||\tilde{\Phi}||^2 \leqslant \tilde{\Phi} \Gamma^{-1} \tilde{\Phi}^{\mathrm{T}} \leqslant \frac{1}{\tau_{\min}} ||\tilde{\Phi}||^2, \quad (23)$$

其中 $\tau_{\max}$ 和 $\tau_{\min}$ 是 $\Gamma$ 的最大和最小特征值. 由式(21)中 $E_3(t)$ 可得

$$|E_3(t)| \leqslant \alpha \rho A \left[\int_0^l z^2 \mathrm{d}s + \int_0^l \dot{z}^2 \mathrm{d}s\right] \leqslant \pi_1 E_1(t), \quad (24)$$

其中
$$\pi_1 = \frac{\alpha \rho A}{\min\{\alpha \gamma_1, \beta \rho A\}} > 0.$$
  
选取适当 $\alpha \pi \beta, 有$ 

$$\pi_2 = 1 - \pi_1 > 0, \ \pi_3 = 1 + \pi_1 > 1.$$
 (25)

结合式(21)中 $E_1(t)$ 和式(24)可得

$$\pi_2 E_1(t) \leqslant E_1(t) + E_3(t) \leqslant \pi_3 E_1(t).$$
 (26)

再由给定的Lyapunov函数式(20)可得

$$\lambda_{1}[E_{1}(t) + E_{2}(t) + \tilde{d}^{2}(t) + ||\tilde{\Phi}||^{2}] \leq V(t) \leq \lambda_{2}[E_{1}(t) + E_{2}(t) + \tilde{d}^{2}(t) + ||\tilde{\Phi}||^{2}],$$
(27)

其中:

$$\lambda_1 = \min[\pi_2, 1, \frac{1}{2\tau_{\max}}] > 0,$$
  
$$\lambda_2 = \max[\pi_3, 1, \frac{1}{2\tau_{\min}}] > 0.$$

证毕.

**引理7** 式(20)给定的Lyapunov函数的时间导数有如下上界:

$$\dot{V}(t) \leqslant -\lambda V(t) + \varepsilon,$$
 (28)

其中λ和ε为两个正常数.

### 证 对式(20)求时间导数得

$$\dot{V}(t) = \dot{E}_{1}(t) + \dot{E}_{2}(t) + \dot{E}_{3}(t) + \mu \tilde{d}(t) \dot{\tilde{d}}(t) + \tilde{\Phi}^{\mathrm{T}} \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\Phi}}.$$
(29)

对式(21)中*E*<sub>1</sub>(*t*)两边求导,代入控制方程式(5)和 边界条件(6),运用分部积分和引理1可得

$$\dot{E}_{1}(t) \leq \beta \mathrm{EI}z^{\prime\prime\prime}(0,t)\dot{z}(0,t) + \alpha\gamma_{1} \int_{0}^{l} z\dot{z}\mathrm{d}s - (\beta\gamma_{1} - \beta\delta_{1}) \int_{0}^{l} \dot{z}^{2}\mathrm{d}s + \frac{\beta}{\delta_{1}} \int_{0}^{l} f^{2}\mathrm{d}s, \quad (30)$$

其中δ<sub>1</sub>为正常数.

对式(21)中*E*<sub>2</sub>(*t*)两边求导,代入边界条件式(6)和 自适应边界控制律(12)可得

$$\dot{E}_{2}(t) \leqslant -\frac{\beta \mathrm{EI}}{2} \{ [z'''(0,t)]^{2} + \dot{z}^{2}(0,t) + z^{2}(0,t) \} - \beta \mathrm{EI} z'''(0,t) [\dot{z}(0,t) + z(0,t)] + \iota - (k_{1} - \frac{\beta \mathrm{EI}}{2} - \frac{1}{2}) u_{\mathrm{a}}^{2}(t) + \tilde{d}(t) |u_{\mathrm{a}}(t)| - (\beta \mathrm{EI} - \kappa) z(0,t) \dot{z}(0,t) - P \tilde{\Phi} u_{\mathrm{a}}(t).$$

$$(31)$$

对式(21)中*E*<sub>3</sub>(*t*)两边求导,代入边界条件式(6),运用引理3和分部积分,有

$$\dot{E}_{3}(t) \leq \alpha \mathrm{EI}z^{\prime\prime\prime}(0,t)z(0,t) + \eta lz^{2}(0,t) - (\eta - \alpha\delta_{2})\int_{0}^{l}z^{2}\mathrm{d}s - \alpha\gamma_{1}\int_{0}^{l}\dot{z}z\mathrm{d}s - \alpha T\int_{0}^{l}(z^{\prime})^{2}\mathrm{d}s + \alpha\rho A\int_{0}^{l}\dot{z}^{2}\mathrm{d}s - (\alpha \mathrm{EI} - \eta l^{4})\int_{0}^{l}(z^{\prime\prime})^{2}\mathrm{d}s + \frac{\alpha}{\delta_{2}}\int_{0}^{l}f^{2}\mathrm{d}s,$$
(32)

其中δ2为正常数.

对式(20)的右边第4项求导,代入式(16)-(17)并运用引理1可得

$$\mu \tilde{d}(t)\dot{\tilde{d}}(t) \leqslant -\tilde{d}(t)|u_{a}(t)| - \frac{\nu}{2}[\tilde{d}^{2}(t) - \bar{d}^{2}].$$
(33)

对式(20)的右边第5项求导,代入自适应律式(19) 可得

 $(\eta - \alpha \delta_2) \int_0^l z^2 \mathrm{d}s - \alpha T \int_0^l (z')^2 \mathrm{d}s + \frac{\nu}{2} d^2 + \frac{\varsigma}{2} ||\varPhi||^2 + \iota + (\frac{\beta}{\delta_1} + \frac{\alpha}{\delta_2}) \int_0^l f^2 \mathrm{d}s \leqslant -\lambda_4 [E_1(t) + E_2(t) + \tilde{d}^2(t) + ||\tilde{\varPhi}||^2] + \varepsilon, \quad (35)$   $\ddagger \oplus$ 

$$\varepsilon = \left(\frac{\beta}{\delta_1} + \frac{\alpha}{\delta_2}\right) l\bar{f}^2 + \frac{\nu}{2}\bar{d}^2 + \iota + \frac{\varsigma}{2}||\varPhi||^2 > 0.$$
(36)

适当选取参数 $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $k_1$ ,  $\delta_1$ ,  $\delta_2$ ,  $\kappa$ 和 $\eta$ 满足下列条件:

$$\frac{\beta EI}{2} - \frac{|\beta - \alpha|EI}{2} \ge 0,$$

$$\frac{\beta EI}{2} - \frac{|\beta EI - \kappa|}{2} \ge 0,$$

$$\lambda_{3} = 2 \min\left[\frac{\eta - \alpha\delta_{2}}{\alpha\gamma_{1}}, \frac{\beta\gamma_{1} - \beta\delta_{1} - \alpha\rho A}{\beta\rho A}, \frac{\alpha EI - \eta l^{4}}{\beta EI}, \frac{\alpha}{\beta}\right] > 0,$$

$$\lambda_{4} = \min\left[\frac{\zeta}{2}, \frac{\beta EI - 2\eta l - |\beta - \alpha|EI - |\beta EI - \kappa|}{\kappa}, \frac{\lambda_{3}, \frac{2k_{1} - \beta EI - 1}{m}\right] > 0.$$
(37)

由式(35)和引理6可得

$$\dot{V}(t) \leqslant -\lambda V(t) + \varepsilon,$$
 (38)

其中 $\lambda = \frac{\lambda_4}{\lambda_2} > 0.$  证毕.

### 4 适定问题(Well-posed problem)

在本节中,首先基于Sobolev空间对卫星闭环控制 系统解的存在性和唯一性进行证明,随后对解的收敛 性进行分析.

# **4.1** 解的存在性(The existence of the solution)

 $H^2(0,l)$ 为Hilbert空间,设

$$V_{\rm s} = \left\{ \psi \in H^2(0,l) | \psi'(0,t) = 0 \right\}, \qquad (39)$$

且 $||\psi||_{V_s} = ||\psi''||_2$ ,则有

$$W_{\rm s} = \left\{ \psi \in V_{\rm s} \cap H^4(0, l) | \psi''(l, t) = 0 \right\}, \quad (40)$$

且 $\|\psi\|_{W_s} = \|\psi''\|_2 + \|\psi''''\|_2$ ,其中 $\|\cdot\|_p$ 为 $L_p$ 范数.

对控制方程式(5)两边关于 $\psi \in V_{s}$ 做内积, 然后对 其积分可得

$$\gamma_{1} \int_{0}^{l} \dot{z}\psi ds - \int_{0}^{l} f\psi ds + \text{EI} \int_{0}^{l} z^{(4)}\psi ds + \rho A \int_{0}^{l} \ddot{z}\psi ds - T \int_{0}^{l} z''\psi ds = 0.$$
(41)

根据Galerkin逼近法,则存在 $z \in W_s$ ,  $\forall \psi \in V_s$ 使 得方程(41)成立. 考虑 $W_s$ 的完全正交系中的一个元 素 $\psi^j$ ,其中{ $z(s,t_0), \dot{z}(s,t_0)$ }  $\in$  Span{ $\psi^1, \psi^2$ }. 定义  $W_{sn} =$  Span{ $\psi^1, \psi^2, ..., \psi^n$ },  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\partial \chi^j(t)$ 为一 个系数阵,构造函数

$$z^n(s,t) = \sum_{j=1}^n \chi^j(t)\psi^j, \ \forall \psi \in W_{\mathrm{sn}},$$

满足下列逼近方程:

$$\gamma_{1} \int_{0}^{l} \dot{z}^{n} \psi ds - \int_{0}^{l} f^{n} \psi ds + \text{EI} \int_{0}^{l} (z^{n})^{(4)} \psi ds + \rho A \int_{0}^{l} \ddot{z}^{n} \psi ds - T \int_{0}^{l} (z^{n})'' \psi ds = 0,$$
(42)

相应的初始条件为

$$z^{n}(s,t_{0}) = z(s,t_{0}), \ \dot{z}^{n}(s,t_{0}) = \dot{z}(s,t_{0}).$$
 (43)

常微分方程(42)–(43)在 $[0, t_n)$ 上存在局部解.运用 下列引理,逼近解可以延伸到区间 $[0, T], \forall T > 0.$ 

**引理 8** 
$$\int_0^l \dot{z}^{n^2} ds \pi \int_0^l [(z^n)'']^2 ds$$
存在上界.  
证 选取 $\psi^n = \dot{z}^n$ ,考虑如下Lyapunov函数

$$V_{n}(t) = V_{1n}(t) + V_{2n}(t) + V_{3n}(t) + \frac{\mu}{2} \tilde{d}_{n}^{2}(t) + \frac{1}{2} \tilde{\varPhi}_{n}^{T} \Gamma^{-1} \tilde{\varPhi}_{n}, \qquad (44)$$

其中:

$$\begin{cases} V_{1n}(t) = \frac{\alpha \gamma_1}{2} \int_0^l z^{n^2} ds + \frac{\beta \text{EI}}{2} \int_0^l [(z^n)'']^2 ds + \frac{\beta \rho A}{2} \int_0^l \dot{z}^{n^2} ds + \frac{\beta T}{2} \int_0^l [(z^n)']^2 ds, \\ V_{2n}(t) = \frac{1}{2} m u_a^{n^2}(t) + \frac{\kappa}{2} z^{n^2}(0, t), \\ V_{3n}(t) = \alpha \rho A \int_0^l z^n \dot{z}^n ds. \end{cases}$$
(45)

直接应用引理7的证明方法可得

$$\dot{V}_n(t) < -\lambda V_n(t) + \varepsilon.$$
 (46)

将上式两边同时乘以e<sup>λt</sup>,随后对其积分可得

$$V_n(t) \leqslant [V_n(t_0) - \frac{\varepsilon}{\lambda}]e^{-\lambda(t-t_0)} + \frac{\varepsilon}{\lambda}.$$
 (47)

由上式可知,存在正常数M使得

引理9 
$$\int_0^l \ddot{z}^{n2}(s,t_0) \mathrm{d}s$$
具有上界.

证 取 $t = t_0$ 和 $\psi = \ddot{z}^n(s, t_0)$ , 并将它们代入式 (42)可得

$$\rho A \int_0^l \ddot{z}^{n^2}(s, t_0) ds = - \operatorname{EI} \int_0^l [z^{(4)}(s, t_0)]^n \ddot{z}^n(s, t_0) ds - \gamma_1 \int_0^l \dot{z}^n(s, t_0) \ddot{z}^n(s, t_0) ds + T \int_0^l (z^n)''(s, t_0) \ddot{z}^n(s, t_0) ds +$$

$$\int_0^l f^n(s,t_o)\ddot{z}^n(s,t_0)\mathrm{d}s.$$
(49)

运用Young's不等式得

$$(\rho A - 2\sigma) \int_{0}^{l} \ddot{z}^{n2}(s, t_{0}) ds \leq \frac{\mathrm{EI}^{2}}{2\sigma} \int_{0}^{l} [z^{(4)}(s, t_{0})]^{n2} ds + \frac{\gamma_{1}^{2}}{2\sigma} \int_{0}^{l} \dot{z}^{n2}(s, t_{0}) ds + \frac{T^{2}}{2\sigma} \int_{0}^{l} [(z^{n})'']^{2}(s, t_{0}) ds + \frac{1}{2\sigma} \int_{0}^{l} f^{n2}(s, t_{o}) ds,$$
(50)  
 其中  $\sigma$  是正常数.

选择适当的 $\rho A$ 使得 $\rho A - 2\sigma > 0$ . 由引理8可知  $\int_0^l \dot{z}^{n^2}(s, t_0) ds \, \pi \int_0^l [(z^n)'']^2(s, t_0) ds \, \eta L$ 界,又因初 始值 $z(s, t_0) \pi \dot{z}(s, t_0)$ 是充分光滑的,则存在非负常 数 $M_1$ 使得

$$\int_0^l \ddot{z}^{n^2}(s,t_0) \mathrm{d}s \leqslant M_1, \ \forall t \in [0,T].$$
(51)  

$$\breve{\mathrm{E}} \overset{\mathrm{F}}{=} .$$

**引理 10** 
$$\int_0^l \ddot{z}^{n^2}(s,t) ds$$
和 $\int_0^l [\dot{z}''(s,t)]^{n^2} ds$ 具有上界.

证 定义 $\tau = T - t$ . 将 $t = t + \tau$ 和t = t分别代入 式(42), 随后作差, 应用引理1和引理5可得

$$\frac{\mathrm{El}}{2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{0}^{l} [(z^{n}(s,t+\tau))'' - (z^{n}(s,t))'']^{2} \mathrm{d}s + \frac{\rho A}{2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{0}^{l} [\dot{z}^{n}(s,t+\tau) - \dot{z}^{n}(s,t)]^{2} \mathrm{d}s \leqslant \\
\vartheta_{2} \int_{0}^{l} [(z^{n}(s,t+\tau))'' - (z^{n}(s,t))'']^{2} \mathrm{d}s + \\
\vartheta_{1} \int_{0}^{l} [\dot{z}^{n}(s,t+\tau) - \dot{z}^{n}(s,t)]^{2} \mathrm{d}s,$$
(52)

其中 $\vartheta_1$ 和 $\vartheta_2$ 为两个正常数. 由式(52)可得

$$\dot{\Psi}^{n}(t,\tau) \leqslant \vartheta_{3}\Psi^{n}(t,\tau) \Rightarrow 
\Psi^{n}(t,\tau) \leqslant \Psi^{n}(t_{0},\tau)e^{q_{3}(t-t_{0})},$$
(53)

其中:

$$\begin{cases} \vartheta_{3} = \max[\frac{\vartheta_{1}}{\rho A}, \frac{\vartheta_{2}}{\mathrm{EI}}], \\ \Psi^{n}(t,\tau) = \\ \rho A \int_{0}^{l} [\dot{z}^{n}(s,t+\tau) - \dot{z}^{n}(s,t)]^{2} \mathrm{d}s + \\ \mathrm{EI} \int_{0}^{l} \{ [z^{n}(s,t+\tau)]'' - [z^{n}(s,t)]'' \}^{2} \mathrm{d}s. \\ \vec{x}(53) \square \mathfrak{P} \mathfrak{K} \bowtie \tau^{2} \mathring{\mathcal{H}} \square \mathfrak{L} \mathfrak{R} \mathfrak{K} \R \tau \to 0, \mathring{\mathcal{A}} \\ \rho A \int_{0}^{l} \ddot{z}^{n2}(s,t) \mathrm{d}s + \mathrm{EI} \int_{0}^{l} [\dot{z}''(s,t)]^{n2} \mathrm{d}s \leqslant \\ [\mathrm{EI} \int_{0}^{l} [\dot{z}''(s,t_{0})]^{n2} \mathrm{d}s + \\ \rho A \int_{0}^{l} \ddot{z}^{n2}(s,t_{0}) \mathrm{d}s] \mathrm{e}^{q_{3}(t-t_{0})}. \end{cases}$$
(55)

由引理8–9, 并结合式(55), 可得  

$$\rho A \int_0^l \ddot{z}^{n^2} ds + \operatorname{EI} \int_0^l (\dot{z}'')^{n^2} ds \leqslant M_3,$$
 (56)

其中M3为仅依赖T的非负常数.

证毕.

综合上面3个引理,运用Lions-Aubin定理,由式(5) -(6)描述的卫星系统是有限的,因此在区间[0,T]上存 在全局解.

#### **4.2** 解的唯一性(The uniqueness of the solution)

假设z(s,t)和 $z^*(s,t)$ 为卫星闭环控制系统的两个 不同解. 定义 $\tilde{z}(s,t) = z(s,t) - z^*(s,t)$ ,则有 $\tilde{z}(s,t_0)$ =  $\dot{\tilde{z}}(s,t_0) = 0$ .由式(41)得

$$\gamma_1 \int_0^l \dot{\tilde{z}} \psi ds - \int_0^l f \psi ds + \operatorname{EI} \int_0^l \tilde{z}^{(4)} \psi ds + \rho A \int_0^l \ddot{\tilde{z}} \psi ds - T \int_0^l \tilde{z}'' \psi ds = 0.$$
(57)

将 $\psi = \tilde{z}(s,t)$ 代入上式,运用与引理10一样的方法可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[ \int_{0}^{l} \dot{\tilde{z}}_{\mathrm{L}}^{2} \mathrm{d}s + \int_{0}^{l} (\tilde{z}_{\mathrm{L}}^{\prime\prime})^{2} \mathrm{d}s \right] \leqslant 
M_{4} \left[ \int_{0}^{l} \dot{\tilde{z}}_{\mathrm{L}}^{2} \mathrm{d}s + \int_{0}^{l} (\tilde{z}_{\mathrm{L}}^{\prime\prime})^{2} \mathrm{d}s \right],$$
(58)

其中 $M_4$ 为正常数. 又因 $\tilde{z}(s,t_0) = \dot{\tilde{z}}(s,t_0) = 0$ , 运用 Gronwall引理则有 $\tilde{z}(s,t) = 0$ , 即为:  $z(s,t) = z^*(s,t)$ ,  $\forall (s,t) \in [0,l] \times [0,+\infty)$ , 因此解的唯一性得以证明.

# 4.3 解的收敛性(The convergence of the solution)

**定理1** 对由式(5)--(6)所描述的卫星系统,基于 本文设计的自适应边界控制式(12)和假设1,若初始条 件有界,则闭环卫星系统的状态量*z*(*s*,*t*)是一致有界.

证 将不等式(28)两边同时乘以e<sup>λt</sup>得

$$\frac{\partial [V(t) e^{\lambda t}]}{\partial t} \leqslant \varepsilon e^{\lambda t}.$$
(59)

对上式积分可得

$$V(t) \leqslant \frac{[V(0) - \frac{\varepsilon}{\lambda}]}{\mathrm{e}^{\lambda t}} + \frac{\varepsilon}{\lambda} \leqslant \frac{V(0)}{\mathrm{e}^{\lambda t}} + \frac{\varepsilon}{\lambda}.$$
 (60)

结合引埋2和式(21)-(22)可待  

$$z^{2}(s,t) \leq w^{2}(0,t) + \int_{0}^{l} z^{2} ds + \int_{0}^{l} (z')^{2} ds \leq \varrho[E_{1}(t) + E_{2}(t)] \leq \frac{\varrho}{\lambda_{1}} V(t),$$
(61)

其中
$$\varrho = \max[\frac{\kappa}{2}, \frac{\alpha\gamma_1}{2}, \frac{\beta T}{2}] > 0.$$
  
将式(60)代入式(61), 有  
 $|z(s,t)| \leq \sqrt{\frac{\varrho}{2} [V(0)e^{-\lambda t} + \frac{\varepsilon}{\lambda}]} \leq$ 

$$\sqrt{\frac{\varrho}{\lambda_1}[V(0) + \frac{\varepsilon}{\lambda}]}.$$
(62)

进一步有

$$\lim_{t \to \infty} |z(s,t)| \leqslant \sqrt{\frac{\varrho \varepsilon}{\lambda_1 \lambda}}.$$
(63)

证毕.

#### 5 数字仿真(Numerical simulations)

本节将运用有限差分法对式(5)-(6)所描述的柔性 卫星进行数值仿真研究,验证所设计的自适应边界控 制式(12)的有效性,并研究其的动力学响应.卫星系统 结构参数为

$$\rho = 2700 \text{ kg/m}^3, A = 0.002 \text{ m}^2, m = 100 \text{ kg},$$
EI = 1.2×10<sup>3</sup> Nm<sup>2</sup>,  $\gamma_1 = 10 \text{ kg/ms}, T = 10 \text{ N},$ 
 $d_s = 1 \text{ Ns/m}, l = 10 \text{ m}.$ 

卫星系统的初始条件为 $z(s,0) = 0.1 \operatorname{s} \pi \dot{z}(s,0) = 0.$ 外部边界干扰为 $d(t) = 2 + \sin t + 3\sin(3t)$ ,外部分 布干扰为 $f(s,t) = [3 + \sin(\pi s t) + 2\sin(2\pi s t)]\frac{s}{10}.$ 

为进一步验证所设计自适应边界控制式(12)的优 越性,将与如下传统PD边界控制进行仿真比较研究.

$$u_k(t) = k_p w(0, t) + k_d \dot{w}(0, t).$$
 (64)

当选择控制器参数 $k_1 = 200$ ,  $\iota = 10$ ,  $k_p = 400$ ,  $k_d = 0.01$ , 仿真结果图2给出了卫星系统在无控制作 用时的三维振动图和控制作用下的三维振动图, 图3和图4分别给出了卫星系统的中心处(l = 0 m)和 边界处(l = 10 m)振动偏移量,图5则给出了与之对应 的控制输入.根据仿真结果可得:

1) 由图2-4可知, 无论是本文所设计的自适应边 界控制(12)还是传统PD边界控制(64), 它们都能有效 的抑制卫星系统振动偏移量.

2) 由图2-4可知,虽然仅在卫星系统中心处(*l* = 0 m)布置了控制器/执行器,但整个卫星系统的帆板振动也都得到了显著抑制,体现了本文所采用边界控制策略的独特优势.

3) 分别将图2(b)与图2(c)、图3(b)与图3(c)、图4(b) 与图4(c)、图5(a)与图5(b)进行对比可知,相比于传统 PD边界控制(64),本文所设计的自适应边界控制(12) 明显具有更好的抑制效果,即当控制作用约10 s后,卫 星系统的振动偏移量几乎接近于零,而传统PD边界控 制达不到这样的抑制效果.同时,自适应边界控制输 入也在约10 s后趋于平稳,进一步验证了所设计自适 应边界控制的优越性.

4) 对比图3和图4可知,卫星中心处(*l* = 0 m)振动的抑制效果显著好于边界处(*l* = 10 m)振动的抑制效果,而卫星本体正好位于中心处,其附带设备如摄像头等都是安装在卫星本体上,因此卫星本体处振动抑制效果好将直接提升其附带设备的工作性能,如卫星本体运行平稳将使摄像图像更清晰.



(a) 无控制



## 6 结论(Conclusions)

本文研究了受外部干扰和具有系统结构参数不确 定性的柔性卫星系统振动主动控制问题.基于卫星系 统无穷维PDE模型设计了一个带有干扰自适应律的 自适应边界控制器用以抵消外部干扰和卫星振动主 动控制,避免了基于降阶模型设计而导致的控制溢出 不稳定问题,并且所设计的自适应边界控制器无需知 道外部干扰的精确模型,因此给出的控制器具有很强 的鲁棒性.随后,证明了闭环卫星控制系统解的存在 性、唯一性、收敛性.最后对本文所设计的控制器进 行数值了模拟仿真研究,验证了控制器的有效性.

#### 参考文献(References):

- HU Q L. Input shaping and variable structure control for simultaneous precision positioning and vibration reduction of flexible spacecraft with saturation compensation [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2008, 318(1/2): 18 – 35.
- [2] ZHOU Yanru, HUANG Wenchao, ZENG Jianping. Nonlinear local stabilization control of flexible satellite attitude system [J]. Control

*Theory & Applications*, 2014, 31(3): 279 – 284.

(周燕茹,黄文超,曾建平. 挠性卫星姿态非线性局部镇定控制 [J]. 控制理论与应用, 2014, 31(3): 279 – 284.)

- [3] BALAS M J. Active control of flexible systems [J]. Joural of Optimization Theory and Application, 1978, 25(3): 415 – 436.
- [4] MEIROVITCH L, BARUH H. On the problem of observation spillover in self-adjoint distributed-parameter systems [J]. *Journal of Optimization Theory and Application*, 1983, 39(2): 269 – 291.
- [5] PARANJAPE A A, GUAN J Y, CHUNG S J, et al. PDE boundary control for flexible articulated wings on a robotic aircraft [J]. *IEEE Transactions on Robotics*, 2013, 29(3): 625 – 640.
- [6] WU Xinsheng, DENG Jun. Robust boundary control of a distributed-parameter flexible manipulator with tip unknown disturbance [J]. Control Theory & Applications, 2011, 28(4): 511 518.
  (吴忻生, 邓军. 末端有未知扰动的分布参数柔性机械臂的鲁棒边界 控制 [J]. 控制理论与应用, 2011, 28(4): 511 518.)
- [7] ZHAO Zhijia, LIU Yu, GUO Fang, et al. Boundary output feedback control for a flexible marine riser [J]. *Control Theory & Applications*, 2017, 34(2): 205 214.
  (赵志甲, 刘屿, 郭芳, 等. 海洋柔性立管输出反馈边界控制 [J]. 控制 理论与应用, 2017, 34(2): 205 214.)
- [8] LIU Y, ZHAO Z J, GUO F. Adaptive Lyapunov-based backstepping control for an axially moving system with input saturation [J]. *IET Control Theory and Applications*, 2016, 10(16): 2083 – 2092.
- [9] LIU Y, ZHAO Z J, HE W. Stabilization of an axially moving accelerated/decelerated system via an adaptive boundary control [J]. *ISA Transactions*, 2016, 64: 394 – 404.
- [10] GUO B Z, JIN F F. Output feedback stabilization for one-dimensional wave equation subject to boundary disturbance [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2015, 60(3): 824 – 830.
- [11] WANG J M, LIU J J, REN B B, et al. Sliding mode control to stabilization of cascaded heat PDE-ODE systems subject to boundary control matched disturbance [J]. Automatica, 2015, 52: 23 – 34
- [12] QUEIROZ M S, RAHN C D. Boundary control of vibration and noise in distributed parameter systems: an overview [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2002, 16(1): 19 – 38.

- [13] ZHOU Difan, JU Xiang. Boundary control in the attitude maneuvering of tethered space solar power satellite [J]. Journal of Vibration Engineering, 2013, 26(1): 41 – 47. (周荻范, 继祥. 绳系太阳能发电卫星姿态机动的边界控制 [J]. 振动 工程学报, 2013, 26(1): 41 – 47.)
- [14] GUAN P, LIU X J, LIU J Z. Adaptive fuzzy sliding mode control for flexible satellite [J]. *Engineering Applications of Artificial Intelli*gence, 2005, 18(4): 451 – 459.
- [15] XIAO B, YIN S, KAYNAK O. Attitude stabilization control of flexible satellites with high accuracy: an estimator-based approach [J]. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 2017, 22(1): 349 – 358.
- [16] HE W, GE S S. Dynamic modeling and vibration control of a flexible satellite [J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic System*, 2015, 51(2): 1422 – 1431.
- [17] MENG T T, HE W, YANG H, et al. Vibration control for a flexible satellite system with output constraints [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2016, 85(4): 2673 – 2686.
- [18] HORN R A, JOHNSON C R. *Matrix Analysis* [M]. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1990.
- [19] RAHN C. Mecatronic Control of Distributed Noise and Vibration [M]. New York, USA: Springer-Verlag, 2001.

作者简介:

**刘 屿** (1977–), 男, 副研究员, 主要研究方向为分布参数系统控制、机器视觉和智能控制, E-mail: auylau@scut.edu.cn;

**付** 云 (1993--), 男, 博士研究生, 主要研究方向为分布参数系统 控制、航天器建模及振动控制, E-mail: mafuyun@mail.scut.edu.cn;

**刘伟东** (1984--), 男, 助理研究员, 主要研究方向为智能制造、振 动控制与分析, E-mail: aulwd@scut.edu.cn;

**吴忻生** (1961-), 男, 副教授, 主要研究方向为智能检测与智能控制、自动化技术和智能系统的研究及其工程应用以及电子产品开发, E-mail: auxswu@scut.edu.cn.