R–fuzzy隶属度粗糙近似集的优势测度理论

李守军[1,2†], 马小平[2], 杨春雨[2]

(1. 宿迁学院 机电工程学院, 江苏 宿迁 223800; 2. 中国矿业大学 信息与控制工程学院, 江苏 徐州 221166)

摘要: 给出了一种R–fuzzy集隶属度的权重比较与量化方法, 提出了优势测度概念, 解决了粗糙近似集中隶属度的重要性难以确定的问题. 首先给出优势测度的定义, 然后, 研究了优势测度的性质, 指出了优势测度1型模糊集的本质属性. 优势测度不仅实现了R-fuzzy 集隶属度的量化, 而且成为R-fuzzy集与2型模糊集联系的纽带. 通过隶属度的优势测度, 实现了人类感知领域中的群体共识与个性认识的区分, 反过来通过优势测度的可视化, 可以对人类不同感知下的隶属度值给出合理的推断与比较. 最后, 通过声音感知实验研究给出了优势测度可视化的特点及操作方法, 讨论了不同职业测试组对于同一声音的理解在隶属度数值上的差异. 对于涉及人类感知与模式辨识的应用领域具有较易的操作性与较强的实用性.

关键词: R–fuzzy集; 粗糙集; 优势测度; 智能感知; 模式分类

引用格式: 李守军, 马小平, 杨春雨. R–fuzzy隶属度粗糙近似集的优势测度理论. 控制理论与应用, 2019, 36(2): 286 – 294

中图分类号: TP182　　**文献标识码**: A

DOI: 10.7641/CTA.2018.70746

Advantage measure theory of R–fuzzy rough membership set

LI Shou-jun[1,2†], MA Xiao-ping[2], YANG Chun-yu[2]

(1. School of Mechanical and Electrical Engineering, Suqian College, Suqian Jiangsu 223800, China;
2. School of Information and Control Engineering, China University of Mining and Technology, Xuzhou Jiangsu 221116, China)

Abstract: To solve the problem how to determine the importance of rough approximate membership, the concept of advantage measure is presented by bringing forward the weight comparison and quantitative method of R–fuzzy set membership degree. Firstly, the definition of the advantage measure is given, then, the properties of the advantage measure are investigated, and its essential attribute of type-1 fuzzy sets is pointed out. Advantage measure has not only realized the quantification of membership degree of R–fuzzy sets, but also becomes the tie between R–fuzzy sets and 2 type fuzzy sets. Through the advantage measure of membership degree, the distinction between group consensus and personality recognition in the field of human perception is realized. In turn, through the visualization of the advantage measure, reasonable inference and comparison to the degree of membership of different human perception can be given. Finally, the characteristics and operation methods of the advantage measure visualization are given by the sound sensing experiment. The differences in the membership degree of different profession groups for the same loudness were discussed, showing its operable and practicable characteristics in the application of human perception and pattern recognition.

Key words: R–fuzzy sets; rough sets; advantage measure; perceptual recognition; pattern visualization

Citation: LI Shoujun, MA Xiaoping, YANG Chunyu. Advantage measure theory of R–fuzzy rough membership set. *Control Theory & Applications*, 2019, 36(2): 286 – 294

1 引言

传统1型模糊集的隶属度由一个符合确定分布规律的隶属函数精确描述[1]. 这种所谓的精确性往往具有相当大的局限性, 首先表现为静态性, 其次表现为片面性[2]. 由于论域中每个对象的边界并不明晰, 采用静态的隶属函数描述并不现实, 而且对象所处环境不是一成不变的, 不同决策人员对同一问题的认识也不尽相同, 因此, 隶属函数应该随着所述问题环境的变化而变化, 应该全面反应每个决策人员的共同认识与个性理解. 而且隶属度应该能够客观而准确的反应共识与个识之间的差异性.

共识反应了决策人员对问题的相同理解, 个识反

收稿日期: 2017−10−16; 录用日期: 2018−04−24.
†通信作者. E-mail: lishoujunbox@126.com; Tel.: +86 13912014197.
本文责任编委: 詹宜巨.
国家自然科学基金项目(61374043, 61603392), 江苏高校品牌专业建设工程项目(PPZY2015C252)资助.
Supported by the National Natural Science Foundation of China (61374043, 61603392) and the University Brand Major Construction Project of Jiangsu Province (PPZY2015C252).

应了每个决策者对问题的不同理解. 而且理解会随着时间, 环境而发生变化. 隶属度应该准确的反应这种变化, 其值本身应该具有一定程度的模糊性. 基于以上考虑, Yang Yingjie与Hinde Chris提出了R–fuzzy集的概念[3], 采用粗糙集合来定义隶属度, 利用投票模型来定性描述隶属度的重要性, 并对隶属度相对于描述符的重要程度进行了划分. 与语言描述符有关的隶属度划归到上近似集, 而与语言描述符完全一致的隶属度划归到下近似集.

R–fuzzy集以描述信息粒度大小的粗糙集来定义隶属度, 符合客观世界的认识规律, 因为精确只是相对而不是绝对的. 如果信息粒度过大, 则不能辨识描述对象之间的细微差异. 区间值模糊集[4]虽然用一个区间作为隶属度的描述, 克服了1型模型集精确隶属度所产生的弊端, 但区间却掩盖了相似的隶属度. 而直觉模糊集[5]通过定义隶属度与非隶属度在一定程度上克服了1型模糊集的不足, 但两个隶属度的边界仍然是有争议的, 对信息的描述仍缺乏准确性[6]. 阴影模糊集[7]似乎并不关心隶属度, 根本没有办法辨析出阴影区域中每个隶属度之间的差异, 也只能实现近似的群体感知[8]. 2型模糊集采用1型模糊集作为其隶属度[9], n型模糊集采用$n-1$型模糊集作为其隶属度, 显然, 这种以精确描述模糊的递归陷井, 理论上可以无限逼近问题的精确描述, 但计算空间维度过大, 时间复杂性过高[10].

R–fuzzy集采用投票模型将隶属度按与自然语言描述符的相关程度进行划分, 完全反应了人们的共同认识与个性理解. 但是上近似集中的隶属度的重要性或优势仍需要给出合理的排序才能更好的反应人们的不同认识. Khmuan提出了显著性程度理论实现了R–fuzzy上近似集中的隶属度值对于语言描述符重要性程度的测量[11], 给出了量化的概念[12], 但对于群体认识与个体认识的对隶属度的影响程度没有深入讨论.

本文提出了一种隶属度的优势测度方法, 以对R–fuzzy集粗糙上近似集中各个隶属度的重要性进行排序. 通过投票策略与频率计数统计出评价群体与个体对于隶属度的共性认识与个性理解. 并通过优势测度可视化, 获得对不同隶属度更为直观的认识, 从而确定出与描述符相一致的最佳隶属度值. 通过隶属度的优势比较, 可以获得不确定系统更多的细节, 获得反应群体与个体不同认识的更准确的推理规则, 而这些信息对于模式分类, 智能感知, 诊断与决策具有重要意义.

2　理论体系

在给出粗糙集的近似概念与R–fuzzy集定义的基础上, 提出了优势测度概念. 给出了优势测度可以实现R–fuzzy集隶属度的1型模糊量化的性质, 以及以优势测度为隶属度的2型模糊集与R–fuzzy集等价的性质. 建立了优势测度的理论框架.

2.1　近似

近似是粗糙集与R–fuzzy集的理论基础, 它是基于信息粒度的大小及等价类定义出来的.

定义 1[13]　$\Lambda=(\mathcal{U},A)$为一知识系统且$X\subseteq\mathcal{U}$. 对于给定的集合$X\subseteq A$, 可通过下近似集合$\underline{M}(x)$和上近似集合$\bar{M}(x)$对X完成逼近. 下近似集定义为

$$\underline{M}(x)=\{x\mid x\in\mathcal{U},B(x)\subseteq X\},\tag{1}$$

上近似集定义为

$$\bar{M}(x)=\{x\mid x\in\mathcal{U},B(x)\cap X\neq\varnothing\},\tag{2}$$

其中$B(x)$指包含x的等价类.

2.2　R–fuzzy集

R–fuzzy集采用粗糙集表示隶属度, 与描述符完全一致的隶属度位于下近似集中, 与描述符有关的隶属度位于上近似集中, 而且下近似集是上近似集的子集. 由于粗糙集是定义在离散论域上的, 所以R-fuzzy集也是其于离散论域的.

定义 2[3]　给定隶属度可能值生成的离散集论域$J_x=[\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n]\subseteq[0,1]$及其近似空间$apr=(J_x,B)$, J_x/B为等价类集合. 设$(\underline{M}_A(x),\bar{M}_A(x))$为近似空间$apr$上的粗糙集, 下近似集为$\underline{M}_A(x)$, 上近似集为$\bar{M}_A(x)$, 则以$(\underline{M}_A(x),\bar{M}_A(x))$为隶属度的R-fuzzy集表示如下:

$$\begin{aligned}A=\{\langle x,(\underline{M}_A(x),\bar{M}_A(x))\rangle|\forall x\in\mathcal{U},\\ \underline{M}_A(x)\subseteq\bar{M}_A(x)\subseteq J_x\}=\\ \sum_{x\in\mathcal{U}}\left(\underline{M}_A(x),\bar{M}_A(x)\right)/x,\end{aligned}\tag{3}$$

其中$\sum$表示论域$\mathcal{U}$上所有x隶属度的并集. 任给元素$x_i\in\mathcal{U}$, 均对应一个在给定描述符$d(x_i)$下的隶属度.

隶属度值$\mu_i\in J_x$是否已由描述符$d(x_i)$描述, 需要通过评价标准集$C=\{c_1,c_2,\cdots,c_m\}$进行检验. 如果满足给定的标准c_j, 则评价值为YES:

$$\mu_i\xrightarrow{c_j,d(x_i)}\text{YES},\ j=1,2,\cdots,m;\tag{4}$$

否则, 评价值为NO:

$$\mu_i\xrightarrow{c_j,d(x_i)}\text{NO},\ j=1,2,\cdots,m.\tag{5}$$

则与x_i描述符$d(x_i)$相吻合的R–fuzzy集隶属度的粗糙集表示形式为

$$M\left(x\right)=\left(\underline{M}_A(x),\bar{M}_A(x)\right),\tag{6}$$

其中: $\underline{M}_A(x_i)=\bigcap\limits_j M_{cj}(x_i)$, $\bar{M}_A(x_i)=\bigcup\limits_j M_{cj}(x_i)$.

通过标准$c_j\in C$检验并与描述符相吻合的所有隶属度$\mu\in J_x$构成集合$M_{cj}(x_i)$, 即

$$M_{cj}(x_i)=\{\mu|\mu\in J_x,\mu_i\xrightarrow{c_j,d(x_i)}\text{YES}\}.\tag{7}$$

显然, $M_{cj} \subseteq J_x$且$\underline{M}_A(x_i) \subseteq \bar{M}_A(x_i)$.

2.3 优势测度

2.3.1 提出动机

R–fuzzy集采用投票模型给出了反应群体共识与个体认识相结合的隶属度表示方法, 即隶属度粗糙近似集表示法. 将隶属度按照得票频率计数进行归类, 全票通过的隶属度划归到粗糙集的下近似集, 得到至少一票的隶属度划归到粗糙集的上近似集. 如果能够得到上近似集中所有隶属度的重要性, 将具有重要的理论价值. 进一步讲, 如果能够建立一个度量标准, 并通过它得到反应群体共识与个体认识相结合特点的隶属度的量化值, 将实现更细致的信息分辨能力. 为此, 本文提出了隶属度的优势测度理论.

2.3.2 概念定义

本文优势测度概念是基于粗糙集理论中的确认性因子提出来的[14–15], 而确定性因素是与规则相关联的[16]. 在R–fuzzy集环境下需要消除规则并基于$M_{c_j} \subseteq J_x$定义优势测度.

定义 3 给定s个互不相关评价标准集$C_1, C_2, \cdots, C_s$, 对应的元素个数依次为$m_1, m_2, \cdots, m_s$. 则满足评价标准$c_{pj} \in C_p(p = 1, 2, \cdots, s; j = 1, 2, \cdots, m_p)$及描述符$d(x_i)$的隶属度集合为

$$M_{c_{pj}}(x_i) = \{\mu | \mu \in J_x, \mu_i \xrightarrow{c_{pj}, d(x_i)} \text{YES}\}. \tag{8}$$

标准集$C_p(p = 1, 2, \cdots, s)$中包含指定隶属度$\mu \in J_x$的集合$M_{c_{pj}}(x_i)$的个数为

$$f_p(\mu) = \text{COUNT}(\{M_{c_{pk}} \mid \mu \in M_{c_{pk}}, k = 1, 2, \cdots, m_p\}), \tag{9}$$

式中COUNT(·)表示计数函数. 则包含指定隶属度$\mu \in J_x$, 满足标准集$\{C_p \mid p = 1, 2, \cdots, s\}$中所有标准并与描述符$d(x_i)$相吻合的近似子集的个数为

$$n = \sum_{p=1}^{s} f_p(\mu). \tag{10}$$

将满足标准集中所有标准并与描述符$d(x_i)$相吻合的所有近似子集总数记作$|N|$, 即评价基数. 则定义优势测度

$$\gamma_{\bar{A}}(\mu) = \frac{n}{|N|} = \sum_{p=1}^{s} f_p(\mu)/|N|, \tag{11}$$

显然, $0 \leqslant n \leqslant |N| \leqslant \sum\limits_{p=1}^{s} m_p$.

根据式(11)知$0 \leqslant \gamma_{\bar{A}}(\mu) \leqslant 1$. 当$\gamma_{\bar{A}}(\mu) = 0$, 表示在给定描述符$d(x_i)$下, 隶属度$\mu$不符合标准集中的任意评价标准. 当$\gamma_{\bar{A}}(\mu) = 1$, 表示隶属度$\mu$与给定的描述符$d(x_i)$吻合并通过了所有评价标准的检验. 当$0 < \gamma_{\bar{A}}(\mu) < 1$, 表示在给定的描述符$d(x_i)$下, 隶属度$\mu$仅通过了部分评价标准的检验.

影响认识的因素涉及到多个方面, 如年龄、性别、智力、环境、情感、阅历、价值观等. 因此, 优势测度需要综合考虑这些因素以构建合理的评价标准集, 更要考虑不同标准集对评价主体的综合影响, 并根据需要改变标准集内容以适应评价主体的变化. 故而, 隶属度的重要性是随着标准集动态变化的, 反应隶属度重要性的优势测度值亦应动态变化.

2.4 优势测度的性质

以定理形式给出优势测度的2条重要性质.

定理 1 优势测度可实现R–fuzzy集隶属度的1型模糊量化.

证 1) 完备性证明.

需要证明优势测度对R–fuzzy集中的任意隶属度均能实现量化.

设R–fuzzy集 $A = \sum\limits_{x \in \mathcal{U}} (\underline{M}_A(x), \bar{M}_A(x))/x$. 其中为离散有限实数集, 将其规范化为数值集合 $J_x \subseteq [0, 1]$. 规范函数记作$\mu = f(x)$, 其中: $x \in \mathcal{U}$, $\mu \in J_x$.

a) $\forall\, \mu \in J_x$, 若$\sum\limits_{p=1}^{s} f_p(\mu) = |N|$, 则$\gamma_{\bar{A}}(\mu) = 1$. 则对于任意标准$c_j \in C$, 均有$\mu \xrightarrow{(d(x_i), c_j)}$YES成立. 由R–fuzzy集定义知, μ绝对属于下近似$\underline{M}_A(x) = \{\mu | \gamma_{\bar{A}}(\mu) = 1, \mu \in J_x \subseteq [0, 1]\}$.

b) $\forall\, \mu \in J_x$, 若$\sum\limits_{p=1}^{s} f_p(\mu) = 0$, 则$\gamma_{\bar{A}}(\mu) = 0$. 则对于任意给定的标准$c_j \in C$, 均有$\mu \xrightarrow{(d(x_i), c_j)}$NO成立. 由R–fuzzy集定义知, μ不属于R–fuzzy集.

c) $\forall\, \mu \in J_x$, 若$0 < \sum\limits_{p=1}^{s} f_p(\mu) < |N|$, 则$0 < \gamma_{\bar{A}}(\mu) < 1$. 则容易知道至少存在1个标准$c_s \in C$, 满足$\mu \xrightarrow{(d(x_i), c_s)}$YES, 同时至少存在1个标准$c_t \in C$, 满足$\mu \xrightarrow{(d(x_i), c_t)}$ NO. 由R–fuzzy集知, μ绝对属于上近似$\bar{M}_A(x) = \{\mu | 0 < \gamma_{\bar{A}}(\mu) < 1, \mu \in J_x \subseteq [0, 1]\}$.

完备性得证.

2) 1型模糊证明.

由“1) 完备性证明”知, 优势测度可实现R–fuzzy集隶属度重要性的度量, 且有$\gamma_{\bar{A}}(\mu) : J_x \to [0,1]$. 与隶属度$\mu$结合成序偶$\langle \mu, \gamma_{\bar{A}}(\mu) \rangle$, 进一步表示成

$$\bar{A} = \{\langle \mu, \gamma_{\bar{A}}(\mu) \mid \mu \in J_x \subseteq [0, 1] \rangle\}. \tag{12}$$

对照1型模糊集定义式

$$\tilde{A} = \{\langle x, \mu_{\tilde{A}}(x) \rangle | x \in \mathcal{U}\}, \tag{13}$$

知式(12)为1型模糊集, $\gamma_{\bar{A}}(\mu)$为1型模糊集的隶属度.

证毕.

定理 2　以所提优势测度为隶属度的2型模糊集与R–fuzzy集等价.

证　充分性(⇐). 由定理1知R–fuzzy集下近似集中隶属度的优势测度全部为1, 而上近似集中隶属度的优势测度大于0小于1. 隶属度为0的元素不属于R-fuzzy集, 对应的优势测度必然为0. 因此, 优势测度与R–fuzzy集是完全一致的.

根据定理1的证明过程知, $\gamma_{\bar{A}}(\mu)$为1型模糊集$\bar{A} = \{\langle\, \mu, \gamma_{\bar{A}}(\mu)\,\rangle \mid \mu \in J_x \subseteq [0, 1]\}$的隶属度. 令$\gamma_{\bar{A}} \in \Gamma \subseteq [0, 1]$, 取$\mu_{\tilde{A}} : J_x \times \Gamma \to [0, 1]$, 则得2型模糊集$\tilde{A} = \{\langle\, (\mu, \gamma), \mu_{\tilde{A}}(x, \gamma)\,\rangle | \forall\, \mu \in J_x, \forall\, \gamma \in \Gamma \subseteq [0, 1]\}$, 因为论域$J_x$为离散数值集, 故2型模糊集可以表示为

$$\tilde{A} = \sum_{\mu \in J_x} \sum_{\gamma \in \Gamma} \mu_{\tilde{A}}(\mu, \gamma)/(\mu, \gamma).$$

必要性(⇒). 根据定理前件给出的条件, 可以构造出2型模糊集合: $\tilde{A} = \{\langle\, (\mu, \gamma_{\bar{A}}), \mu_{\tilde{A}}(\mu, \gamma_{\bar{A}})\,\rangle \mid \forall\, \mu \in J_x, \forall\, \gamma_{\bar{A}} \in \Gamma \in [0,1]\}$, 隶属度为1型模糊集$\bar{A} = \{\langle\, \mu, \gamma_{\bar{A}}(\mu)\,\rangle \mid \mu \in J_x \subseteq [0, 1]\}$, 反应了优势测度在给定描述符$d(x_i)$下的条件分布. 而由定理的充分性证明知, 优势测度与R–fuzzy集是完全一致的. 必要性得证.

证毕.

对于2型模糊集“不确定足迹”$\mu_{\tilde{A}}(\mu, \gamma_{\bar{A}}(\mu))$的大小可以采用优势测度度量, 同时, 对R–fuzzy集粗糙近似集$M = (\underline{M}_A, \bar{M}_A)$也可以采用优势测度进行量化. 两种方法均使用了与1型模糊集相一致的优势测度.

因此, 优势测度不仅实现了R–fuzzy集隶属度的量化, 而且成为R–fuzzy集与2型模糊集联系的纽带.

3　感知实验

适中的声音响度对人们的生活、工作、学习至关重要. 响度的大小取决于声强、声高、音色、音频等参数[17], 还与人们的心理感受有关, 与年龄、性别、职业环境等因素有关. 为提高操作性, 选取15位大学生, 10位教师构成25人测试组, 组成评价标准集$C = \{p_1, p_2, \cdots, p_{25}\}$开展声音感知与评价实验. 他们对声音的感知与评价通过4个描述符表示, 即NN(not noisy)为“不吵”、AC(acceptable)为“可以接受”、BN(bit noisy)为“有点吵”、VN(vast noisy)为“很吵”. 精细调节功放产生21个响度数据$X = \{x_1, x_2, \cdots, x_{21}\} = \{10, 14, 18, 22, 26, 30, 34, 38, 42, 46, 50, 54, 58, 62, 66, 70, 74, 78, 82, 86, 90\}$, 单位为dB. 将测试组中每个评价主体对声音大小的感知结果列于表1.

为构造模糊集, 取集合X中的响度值, 代入下面的规范化函数中:

$$\mu(x_i) = \frac{x_i - x_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}}, \tag{14}$$

其中: x_i代表响度, $x_{\min}$代表响度的最小值, $x_{\max}$代表响度的最大值. 得到模糊隶属度集$J_x = \{\mu(x_i) \mid i = 1,2, \cdots, 21\}$, 即

$$\begin{aligned}
&\mu(x_1) = 0.00, \mu(x_2) = 0.05, \mu(x_3) = 0.10,\\
&\mu(x_4) = 0.15, \mu(x_5) = 0.20, \mu(x_6) = 0.25,\\
&\mu(x_7) = 0.30, \mu(x_8) = 0.35, \mu(x_9) = 0.40,\\
&\mu(x_{10}) = 0.45, \mu(x_{11}) = 0.50, \mu(x_{12}) = 0.55,\\
&\mu(x_{13}) = 0.60, \mu(x_{14}) = 0.65, \mu(x_{15}) = 0.70,\\
&\mu(x_{16}) = 0.75, \mu(x_{17}) = 0.80, \mu(x_{18}) = 0.85,\\
&\mu(x_{19}) = 0.90, \mu(x_{20}) = 0.95, \mu(x_{21}) = 1.00.
\end{aligned}$$

则隶属度集为$J_x = \{0.00, 0.05, 0.10, 0.15, 0.20, 0.25, 0.30, 0.35, 0.40, 0.45, 0.50, 0.55, 0.60, 0.65, 0.70, 0.75, 0.80, 0.85, 0.90, 0.95, 1.00\}$. 仅以对响度感知的描述符AC为例介绍计算过程.

首先, 利用评价条件$\mu_i \xrightarrow{p_j, d(x_i)=\mathrm{AC}}$ YES和公式(7)进行评价, 得

$$\begin{aligned}
&M_{p_1} = \{0.35, 0.40, 0.45\},\\
&M_{p_2} = \{0.15, 0.20, 0.25, 0.30, 0.35\},\\
&M_{p_3} = \{0.35, 0.40, 0.45, 0.50\},\\
&M_{p_4} = \{0.30, 0.35, 0.40, 0.45\},\\
&M_{p_5} = \{0.30, 0.35, 0.40, 0.45\},\\
&M_{p_6} = \{0.25, 0.30, 0.35, 0.40, 0.45\},\\
&M_{p_7} = \{0.15, 0.20, 0.25, 0.30, 0.35\},\\
&M_{p_8} = \{0.25, 0.30, 0.35, 0.40, 0.45\},\\
&M_{p_9} = \{0.20, 0.25, 0.30, 0.35, 0.40, 0.45\},\\
&M_{p_{10}} = \{0.20, 0.25, 0.30, 0.35, 0.40\},\\
&M_{p_{11}} = \{0.15, 0.20, 0.25, 0.30, 0.35\},\\
&M_{p_{12}} = \{0.35, 0.40, 0.45, 0.50, 0.55\},\\
&M_{p_{13}} = \{0.15, 0.20, 0.25, 0.30, 0.35\},\\
&M_{p_{14}} = \{0.20, 0.25, 0.30, 0.35\},\\
&M_{p_{15}} = \{0.35, 0.40, 0.45, 0.50\},\\
&M_{p_{16}} = \{0.10, 0.15, 0.20, 0.25, 0.30, 0.35, 0.45\},\\
&M_{p_{17}} = \{0.10, 0.15, 0.20, 0.25, 0.30, 0.35, 0.50\},\\
&M_{p_{18}} = \{0.30, 0.35, 0.40, 0.45, 0.50, 0.55\},\\
&M_{p_{19}} = \{0.10, 0.15, 0.20, 0.25, 0.30, 0.35\},\\
&M_{p_{20}} = \{0.25, 0.30, 0.35, 0.40, 0.45\},\\
&M_{p_{21}} = \{0.10, 0.15, 0.20, 0.25, 0.30, 0.35\},\\
&M_{p_{22}} = \{0.10, 0.15, 0.20, 0.25, 0.30, 0.35\},\\
&M_{p_{23}} = \{0.25, 0.30, 0.35, 0.40\},\\
&M_{p_{24}} = \{0.05, 0.10, 0.15, 0.20, 0.25, 0.30, 0.35\},
\end{aligned}$$

表 1 25人测试组对声音响度的感知与评价信息

Table 1 Perception information about loudness perceived by 25-people test group

响度/dB		$x_1 =$ 10	$x_2 =$ 14	$x_3 =$ 18	$x_4 =$ 22	$x_5 =$ 26	$x_6 =$ 30	$x_7 =$ 34	$x_8 =$ 38	$x_9 =$ 42	$x_{10} =$ 46	$x_{11} =$ 50	$x_{12} =$ 54	$x_{13} =$ 58	$x_{14} =$ 62	$x_{15} =$ 66	$x_{16} =$ 70	$x_{17} =$ 74	$x_{18} =$ 78	$x_{19} =$ 82	$x_{20} =$ 86	$x_{21} =$ 90
隶属度		$\mu_1 =$ 0.00	$\mu_2 =$ 0.05	$\mu_3 =$ 0.10	$\mu_4 =$ 0.15	$\mu_5 =$ 0.20	$\mu_6 =$ 0.25	$\mu_7 =$ 0.30	$\mu_8 =$ 0.35	$\mu_9 =$ 0.40	$\mu_{10} =$ 0.45	$\mu_{11} =$ 0.50	$\mu_{12} =$ 0.55	$\mu_{13} =$ 0.60	$\mu_{14} =$ 0.65	$\mu_{15} =$ 0.70	$\mu_{16} =$ 0.75	$\mu_{17} =$ 0.80	$\mu_{18} =$ 0.85	$\mu_{19} =$ 0.90	$\mu_{20} =$ 0.95	$\mu_{21} =$ 1.00
标准	职业																					
p_1	学生	NN	NN	NN	NN	NN	NN	NN	AC	AC	AC	BN	BN	BN	BN	BN	VN	VN	VN	VN	VN	VN
p_2	教师	NN	NN	NN	AC	AC	AC	AC	AC	BN	BN	BN	BN	BN	VN	VN	VN	VN	VN	VN	VN	VN
p_3	教师	NN	NN	NN	NN	NN	NN	NN	AC	AC	AC	AC	BN	BN	BN	BN	BN	VN	VN	VN	VN	VN
p_4	学生	NN	NN	NN	NN	NN	NN	AC	AC	AC	AC	BN	BN	BN	BN	BN	VN	VN	VN	VN	VN	VN
p_5	学生	NN	NN	NN	NN	NN	NN	AC	AC	AC	AC	BN	BN	BN	BN	BN	VN	VN	VN	VN	VN	VN
p_6	学生	NN	NN	NN	NN	NN	AC	AC	AC	AC	AC	BN	BN	BN	BN	VN	VN	VN	VN	VN	VN	VN
p_7	教师	NN	NN	NN	AC	AC	AC	AC	AC	BN	BN	BN	BN	BN	VN	VN	VN	VN	VN	VN	VN	VN
p_8	学生	NN	NN	NN	NN	NN	AC	AC	AC	AC	AC	BN	BN	BN	BN	VN	VN	VN	VN	VN	VN	VN
p_9	学生	NN	NN	NN	NN	AC	AC	AC	AC	AC	AC	BN	BN	BN	BN	VN	VN	VN	VN	VN	VN	VN
p_{10}	学生	NN	NN	NN	NN	AC	AC	AC	AC	AC	BN	BN	BN	BN	VN	VN	VN	VN	VN	VN	VN	VN
p_{11}	学生	NN	NN	NN	AC	AC	AC	AC	AC	BN	BN	BN	BN	BN	VN	VN	VN	VN	VN	VN	VN	VN
p_{12}	教师	NN	NN	NN	NN	NN	NN	NN	AC	AC	AC	AC	AC	BN	BN	BN	BN	VN	VN	VN	VN	VN
p_{13}	学生	NN	NN	NN	AC	AC	AC	AC	AC	BN	BN	BN	BN	BN	VN	VN	VN	VN	VN	VN	VN	VN
p_{14}	教师	NN	NN	NN	NN	AC	AC	AC	AC	BN	BN	BN	BN	BN	VN	VN	VN	VN	VN	VN	VN	VN
p_{15}	教师	NN	NN	NN	NN	NN	NN	NN	AC	AC	AC	AC	BN	BN	BN	BN	VN	VN	VN	VN	VN	VN
p_{16}	学生	NN	NN	AC	AC	AC	AC	AC	AC	BN	AC	BN	BN	BN	VN	VN	VN	VN	VN	VN	VN	VN
p_{17}	学生	NN	NN	AC	AC	AC	AC	AC	AC	BN	BN	AC	BN	BN	VN	VN	VN	VN	VN	VN	VN	VN
p_{18}	教师	NN	NN	NN	NN	NN	NN	AC	AC	AC	AC	AC	AC	BN	BN	BN	VN	VN	VN	VN	VN	VN
p_{19}	学生	NN	NN	AC	AC	AC	AC	AC	AC	BN	BN	BN	BN	BN	VN	VN	VN	VN	VN	VN	VN	VN
p_{20}	教师	NN	NN	NN	NN	NN	AC	AC	AC	AC	AC	BN	BN	BN	BN	VN	VN	VN	VN	VN	VN	VN
p_{21}	学生	NN	NN	AC	AC	AC	AC	AC	AC	BN	BN	BN	BN	BN	VN	VN	VN	VN	VN	VN	VN	VN
p_{22}	学生	NN	NN	AC	AC	AC	AC	AC	AC	BN	BN	BN	BN	BN	VN	VN	VN	VN	VN	VN	VN	VN
p_{23}	教师	NN	NN	NN	NN	NN	AC	AC	AC	AC	BN	BN	BN	BN	BN	VN	VN	VN	VN	VN	VN	VN
p_{24}	学生	NN	AC	AC	AC	AC	AC	AC	AC	BN	BN	BN	BN	BN	VN	VN	VN	VN	VN	VN	VN	VN
p_{25}	教师	NN	NN	NN	NN	AC	AC	AC	AC	BN	BN	BN	AC	BN	VN	VN	VN	VN	VN	VN	VN	VN

NN—不吵; AC—可以接受; BN—有点吵; VN—很吵.

$M_{p_{25}} = \{0.20, 0.25, 0.30, 0.35\}$.

根据式(6)得到描述符AC R–fuzzy集的下近似集

$$\bigcap_{j=1}^{25} M_{p_j} = \{0.35\}, \tag{15}$$

以及描述符AC R–fuzzy集的上近似集

$$\bigcup_{j=1}^{25} M_{p_j} = \{0.05, 0.10, 0.15, 0.20, 0.25, 0.30\ 0.35, 0.40, 0.45, 0.50, 0.55\}. \tag{16}$$

根据式(6), 得到AC的R–fuzzy集

$$AC = (\bigcap_{j=1}^{25} M_{p_j}, \bigcup_{j=1}^{25} M_{p_j}) = (\{0.35\}, \{0.05, 0.10, 0.15, 0.20, 0.25, 0.30, 0.35, 0.40, 0.45, 0.50, 0.55\}). \tag{17}$$

同理, 可求得NN, BN, VN等描述符对应的R–fuzzy集, 连同AC一并给出:

1) NN:

$$\text{NN} = (\{0.00\}, \{0.00, 0.05, 0.10, 0.15, 0.20, 0.25, 0.30\});$$

2) AC:

$$\text{AC} = (\{0.35\}, \{0.05, 0.10, 0.15, 0.20, 0.25, 0.30, 0.35, 0.40, 0.45, 0.50, 0.55\});$$

3) BN:

$$\text{BN} = (\{0.60\}, \{0.30, 0.40, 0.45, 0.50, 0.55, 0.60, 0.65, 0.70, 0.75\});$$

4) VN:

$$\text{VN} = (\{0.80, 0.85, 0.90, 0.95, 1.00\}, \{0.65, 0.70, 0.75, 0.80, 0.85, 0.90, 0.95, 1.00\}).$$

可见, $\underline{M}_A(x) \subseteq \bar{M}_A(x)$. 根据式(11)计算优势测度, 现以R–fuzzy集AC为例, 计算每一个隶属度对应的优势测度.

$$\gamma_{\overline{\text{AC}}}(0.00) = \frac{0}{25} = 0.00, \gamma_{\overline{\text{AC}}}(0.05) = \frac{1}{25} = 0.04,$$
$$\gamma_{\overline{\text{AC}}}(0.10) = \frac{6}{25} = 0.24, \gamma_{\overline{\text{AC}}}(0.15) = \frac{10}{25} = 0.40,$$
$$\gamma_{\overline{\text{AC}}}(0.20) = \frac{14}{25} = 0.56, \gamma_{\overline{\text{AC}}}(0.25) = \frac{18}{25} = 0.72,$$
$$\gamma_{\overline{\text{AC}}}(0.30) = \frac{20}{25} = 0.76, \gamma_{\overline{\text{AC}}}(0.35) = \frac{25}{25} = 1.00,$$
$$\gamma_{\overline{\text{AC}}}(0.40) = \frac{13}{25} = 0.52, \gamma_{\overline{\text{AC}}}(0.45) = \frac{12}{25} = 0.48,$$
$$\gamma_{\overline{\text{AC}}}(0.50) = \frac{5}{25} = 0.20, \gamma_{\overline{\text{AC}}}(0.55) = \frac{3}{25} = 0.12,$$
$$\gamma_{\overline{\text{AC}}}(0.60) = \frac{0}{25} = 0.00, \gamma_{\overline{\text{AC}}}(0.65) = \frac{0}{25} = 0.00,$$
$$\gamma_{\overline{\text{AC}}}(0.70) = \frac{0}{25} = 0.00, \gamma_{\overline{\text{AC}}}(0.75) = \frac{0}{25} = 0.00,$$
$$\gamma_{\overline{\text{AC}}}(0.80) = \frac{0}{25} = 0.00, \gamma_{\overline{\text{AC}}}(0.85) = \frac{0}{25} = 0.00,$$
$$\gamma_{\overline{\text{AC}}}(0.90) = \frac{0}{25} = 0.00, \gamma_{\overline{\text{AC}}}(0.95) = \frac{0}{25} = 0.00,$$
$$\gamma_{\overline{\text{AC}}}(1.00) = \frac{0}{25} = 0.00.$$

需要说明的是此例中, 优势测度计算的评价基数是25, 不是因为测试组包含25个评价主体, 而是因为每个$M_{p_j}(j = 1, 2, \cdots, 25)$均包含有与描述符AC相吻合的隶属度, 共计25个.

然后, 将计算结果绘制于图1. 这是R–fuzzy集粗糙上近似集中所有隶属度 $J_x = \{\mu_i \mid i = 1, 2, \cdots, 21\}$ 对应优势测度的离散化表示. 从表1可以看出, 隶属度是在[0, 1]区间内均匀取值的, 当然, 也可以取得更密, 总有一个密度可以满足实际要求. 离散的可视化表示也可转变为连续的表示形式, 如图2所示. 将图中已知点采用直线连接起来, 通过线性插值便可得到中间各隶属度值对应的优势测度值了.

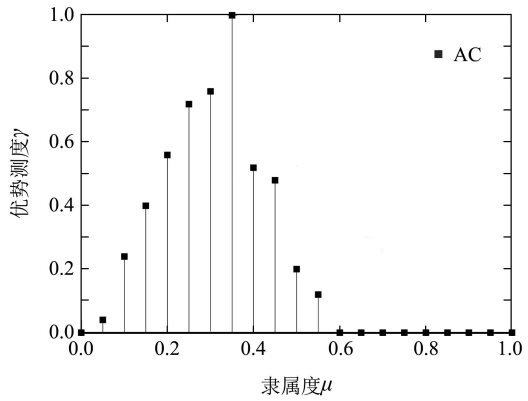

图 1　AC描述符生成R–fuzzy集隶属度的优势测度离散可视化

Fig. 1　Discrete visualization of the advantage measure by R–fuzzy sets generated on the description AC

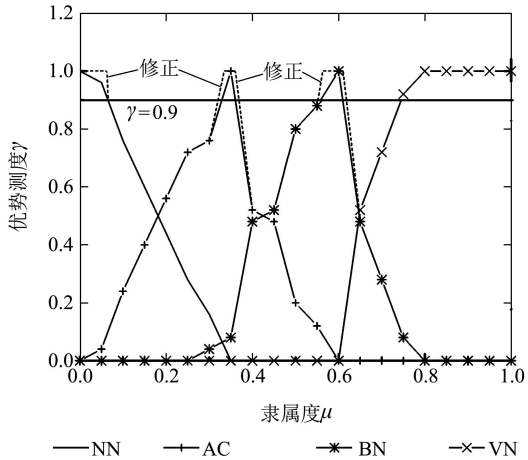

图 2　NN, AC, BN, VN描述符生成R–fuzzy集隶属度的优势测度连续可视化

Fig. 2　Continuous visualization of the advantage measure by R–fuzzy sets generated on NN, AC, BN, VN

采用与描述符AC相同的方法将其他描述符NN, BN, VN对应的优势测度计算出来, 连同AC描述符优势测度的计算结果一并填于表2中, 然后进行可视化连续化. 为便于比较, 将结果绘于同一图中, 如图2所示. 这为理解论域上所有描述符所涉及的评价主体对隶属度重要性的认识提供了一种手段.

表 2 NN, AC, BN和VN生成R–fuzzy集的优势测度

Table 2 Advantage measure of R–fuzzy sets generated on the descriptions NN, AC, BN and VN

J_x	NN	AC	BN	VN
	$\gamma_{\overline{\mathrm{NN}}}(\mu)$	$\gamma_{\overline{\mathrm{AC}}}(\mu)$	$\gamma_{\overline{\mathrm{BN}}}(\mu)$	$\gamma_{\overline{\mathrm{VN}}}(\mu)$
0.00	**1.00**	0.00	0.00	0.00
0.05	**0.96**	**0.04**	0.00	0.00
0.10	**0.76**	**0.24**	0.00	0.00
0.15	**0.60**	**0.40**	0.00	0.00
0.20	**0.44**	**0.56**	0.00	0.00
0.25	**0.28**	**0.72**	0.00	0.00
0.30	**0.16**	**0.76**	**0.04**	0.00
0.35	0.00	**1.00**	**0.08**	0.00
0.40	0.00	**0.52**	**0.48**	0.00
0.45	0.00	**0.48**	**0.52**	0.00
0.50	0.00	**0.20**	**0.80**	0.00
0.55	0.00	**0.12**	**0.88**	0.00
0.60	0.00	0.00	**1.00**	0.00
0.65	0.00	0.00	**0.48**	**0.52**
0.70	0.00	0.00	**0.28**	**0.72**
0.75	0.00	0.00	**0.08**	**0.92**
0.80	0.00	0.00	0.00	**1.00**
0.85	0.00	0.00	0.00	**1.00**
0.90	0.00	0.00	0.00	**1.00**
0.95	0.00	0.00	0.00	**1.00**
1.00	0.00	0.00	0.00	**1.00**

从图2可以看到, 每个描述符均不遵循统一的对称性, 和1型模糊集有着显著的区别, 尤其体现在分布和面积方面. 对于AC描述符, 隶属度0.35对应的优势测度为1, 表示该隶属度是所有评价主体均认可的与AC描述符完全吻合的隶属度. 隶属度0.30对应的优势测度为0.76, 说明存在76%的评价主体认为隶属度0.30与AC描述符吻合. 但对于与之对称的隶属度0.40, 优势测度为0.52, 说明仅有52%的评价主体认为隶属度0.40与AC描述符吻合. 这种完全不对称的特点既反应了多评价主体的共性认识, 又反应了个性认识的影响. 而传统的1型模糊集没有考虑群体认识与个体认识之间的差异, 因此, 不可能得到这样的结论.

观察图2可知, 与描述符NN, AC, BN完全吻合即优势测度为1的隶属度, 各仅存在1个值. 因此, 获得为所有人均认可的隶属度并不太容易. 譬如, 隶属度0.05对应的响度值为14 dB, 这种声音太小了, 对学习和办公不会构成干扰, 但却有1位学生(p_{24})并不这样认为. 结果导致96%而不是100%的评价主体认为隶属度0.05符合描述符NN. 可见优势测度充分体现了群体的共性认识(占96%), 但并没有忽略个体的不同理解(占4%).

表 3 学生针对NN, AC, BN和VN生成R–fuzzy集的优势测度

Table 3 Aiming at student test group, the advantage measure of R–fuzzy sets generated on the descriptions NN, AC, BN and VN

J_x	NN	AC	BN	VN
	$\gamma_{\overline{\mathrm{NN}}}(v)$	$\gamma_{\overline{\mathrm{AC}}}(\mu)$	$\gamma_{\overline{\mathrm{BN}}}(\mu)$	$\gamma_{\overline{\mathrm{VN}}}(\mu)$
0.00	**1.00**	0.00	0.00	0.00
0.05	**0.93**	**0.07**	0.00	0.00
0.10	**0.60**	**0.40**	0.00	0.00
0.15	**0.47**	**0.53**	0.00	0.00
0.20	**0.33**	**0.67**	0.00	0.00
0.25	**0.20**	**0.80**	0.00	0.00
0.30	**0.07**	**0.93**	0.00	0.00
0.35	0.00	**1.00**	0.00	0.00
0.40	0.00	**0.47**	**0.53**	0.00
0.45	0.00	**0.47**	**0.53**	0.00
0.50	0.00	**0.07**	**0.93**	0.00
0.55	0.00	0.00	**1.00**	0.00
0.60	0.00	0.00	**1.00**	0.00
0.65	0.00	0.00	**0.40**	**0.36**
0.70	0.00	0.00	**0.20**	**0.48**
0.75	0.00	0.00	0.00	**1.00**
0.80	0.00	0.00	0.00	**1.00**
0.85	0.00	0.00	0.00	**1.00**
0.90	0.00	0.00	0.00	**1.00**
0.95	0.00	0.00	0.00	**1.00**
1.00	0.00	0.00	0.00	**1.00**

如果个性认识所占的比重远远小于共性认识, 可以将这种个性认识视为干扰予以排除. 不妨设定一个阈值$\gamma = 0.9$, 如图2中的阈值水平线. 所有优势测度大于0.9的隶属度均可置于R–fuzzy集粗糙近似集的下近似集中, 这些隶属度为所有评价主体认可与描述符完全吻合. 这样, 对于上述的NN描述符, 排除评价主体p_{24}的干扰评价, 隶属度0.05对应的优势测度值将成为1.00, 为其余24位评价主体一致认可. 因此, 可以将隶属度0.05划归到描述符NN对应R–fuzzy集隶属度粗糙集的下近似集中.

学生和教师由于年龄不同, 学习或办公环境不同, 对声音的适应性和敏感性必然存在差异, 研究两者之间的共性和差异对于增强感知辨识能力具有重要意义. 现在给出学生与教师两个评价群体对NN, AC, BN, VN 等描述符下的声音感知对比. 表3和表4分别给出了学生与教师群体的感知数据, 可视化后得到图3–6.

表 4 教师针对NN, AC, BN和VN生成R–fuzzy集的优势测度

Table 4 Aiming at teacher test group, the advantage measure of R–fuzzy sets generated on the descriptions NN, AC, BN and VN

J_x	NN	AC	BN	VN
	$\gamma_{\overline{\mathrm{NN}}}(\mu)$	$\gamma_{\overline{\mathrm{AC}}}(\mu)$	$\gamma_{\overline{\mathrm{BN}}}(\mu)$	$\gamma_{\overline{\mathrm{VN}}}(\mu)$
0.00	**1.00**	0.00	0.00	0.00
0.05	**1.00**	0.00	0.00	0.00
0.10	**1.00**	0.00	0.00	0.00
0.15	**0.80**	**0.20**	0.00	0.00
0.20	**0.60**	**0.40**	0.00	0.00
0.25	**0.40**	**0.60**	0.00	0.00
0.30	**0.30**	**0.70**	0.00	0.00
0.35	0.00	**1.00**	0.00	0.00
0.40	0.00	**0.60**	**0.40**	0.00
0.45	0.00	**0.50**	**0.50**	0.00
0.50	0.00	**0.40**	**0.60**	0.00
0.55	0.00	**0.30**	**0.70**	0.00
0.60	0.00	0.00	**1.00**	0.00
0.65	0.00	0.00	**0.60**	**0.40**
0.70	0.00	0.00	**0.40**	**0.60**
0.75	0.00	0.00	**0.20**	**0.80**
0.80	0.00	0.00	0.00	**1.00**
0.85	0.00	0.00	0.00	**1.00**
0.90	0.00	0.00	0.00	**1.00**
0.95	0.00	0.00	0.00	**1.00**
1.00	0.00	0.00	0.00	**1.00**

图3给出了NN描述符下的感知对比. 所有的学生一致认为10 dB不会产生任何吵闹, 恐怕只能听到笔尖在纸上的摩擦声了. 而教师群体一致认为18 dB以下的声音均不会产生任何吵闹. 对比发现, 学生对声音较为敏感, 更需要安静的学习环境. 对于同一隶属度值, 教师群体对应的优势测度值明显大于学生群体, 说明教师对声音的适应性更强. 但两个评价主体对于NN却存在相同的感知上限, 即34 dB. 而所有大于等于38 dB的响度不再归于NN描述符所定义的范围.

图4给出了AC描述符下的感知对比. 尽管形状像一个倒立的大写字母**V**, 但无论对于教师还是学生, 优势测度曲线的两支并不具有完全对称的结构, 说明了每个隶属度值的重要性并不完全相同. 与NN类似, 仅有1个隶属度($\mu = 0.30$)对应的优势测度值为1.0, 而且除了10 dB($\mu = 0.00$)外, 响度值大于10 dB而小于60 dB的声音均有可能被理解为AC的声音. 对学生来讲, AC的响度位于(10 dB, 54 dB)所定义的开区间内. 对于教师来讲, AC的声音位于(18 dB, 58 dB)所定义的开区间内. 同样, 对于任意给定的隶属度值, 教师的优势测度值大于学生, 表现出对AC声音响度的较强适应性, 或说学生对声音具有较强的敏感性.

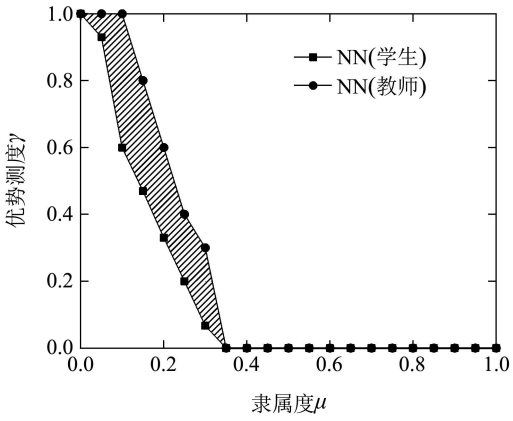

图 3 25人测试组针对NN描述符的R–fuzzy集隶属度的优势测度的比

Fig. 3 Comparison of advantage measures on the description NN aiming at 25-people test group

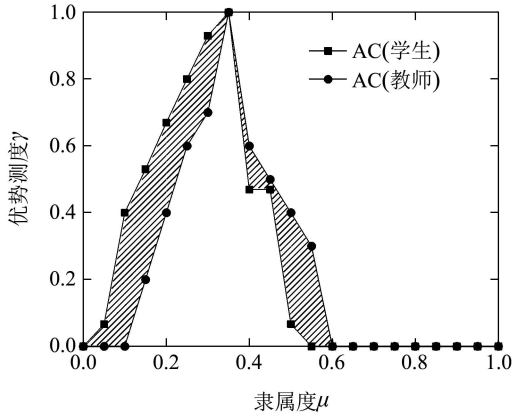

图 4 25人测试组针对AC描述符的R–fuzzy集隶属度的优势测度对比

Fig. 4 Comparison of advantage measures on the description AC aiming at 25-people test group

图5给出了BN描述符下的感知对比. 学生群体与教师群体优势测度所夹阴影部分的面积比图4小得多, 说明两个群体对于AC描述符下的感知理解基本一致. 与图3–5不同, 此处存在2个隶属度($\mu = 0.55, 0.60$)被所有的学生一致认可. 声音稍大一点便会对学生正常学习生活产生较大的影响.

图6给出了VN描述符下的感知对比. 学生与教师对于隶属度重要性评价的优势测度值基本一致. 虽然存在一些个体的不同理解, 但群体认识层面却表现出高度的一致性. 从两者分布曲线的走势及其所夹的阴影面积, 可以直观地得到以上结论.

4 结论

研究成果主要包括4个方面,总结如下:

1) 对R–fuzzy集进行了理论拓展, 提出了隶属度的优势测度理论, 实现了R–fuzzy粗糙近似集隶属度的优势比较.

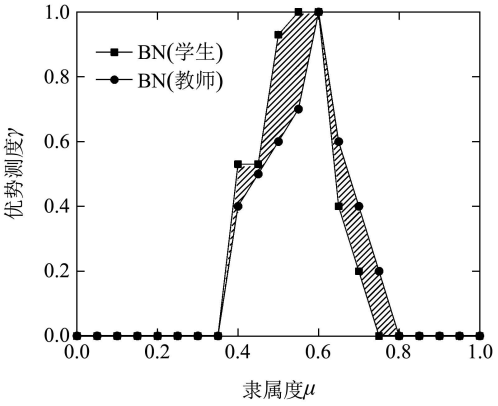

图 5 25人测试组针对BN描述符的R–fuzzy集隶属度的优势测度对比

Fig. 5 Comparison of advantage measures on the description BN aiming at 25-people test group

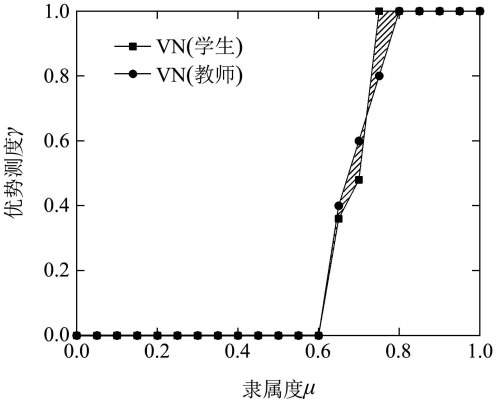

图 6 25人测试组针对VN描述符的R–fuzzy集隶属度的优势测度对比

Fig. 6 Comparison of advantage measures on the description VN aiming at 25-people test group

2) 研究了优势测度的性质, 指出了优势测度本质上属于1型模糊集. 证明了以优势测度为隶属度的2型模糊集与R–fuzzy集等价的基本属性.

3) 优势测度实现了人类感知领域中群体共识与个性认识的区分. 通过优势测度的可视化, 可以对人类不同感知下的隶属度值给出合理的推断与直观的比较.

4) 通过声音感知实验, 给出了优势测度的实际应用. 讨论了不同职业群体对于同一声音的理解在隶属度数值上的差异, 对于涉及人类感知与模式辨识的应用具有较强的示范作用.

参考文献:

[1] ZADEH L A. Fuzzy sets. *Information & Control*, 1965, 8(3): 338 – 353.

[2] CHIANG D A, CHOW L R, HSIEN N C. Fuzzy information in extended fuzzy relational databases. *Fuzzy Sets & Systems*, 1997, 92(1): 1 – 20.

[3] YANG Y, HINDE C. A new extension of fuzzy sets using rough sets: R–fuzzy sets. *Information Sciences*, 2010, 180(3): 354 – 365.

[4] TURKSEN L B. Interval valued fuzzy sets based on normal forms. *Fuzzy Sets & Systems*, 1986, 20(2): 191 – 210.

[5] ZHAO Tao, XIAO Jian. Type–2 intuitionistic fuzzy sets. *Control Theory & Applications*, 2012, 29(9): 1215 – 1222.
(赵涛, 肖建. 二型直觉模糊集. 控制理论与应用, 2012, 29(9): 1215 –1222.)

[6] ATANASSOV K T. Intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy Sets & Systems*, 1986, 20(1): 87 – 96.

[7] MENG Zuqiang, HU Yulan, JIANG Liang, et al. Shuffled frog leaping algorithm and shadowed sets-based rough fuzzy clustering algorithm. *Control & Decision*, 2015, 30(10): 1766 – 1772.
(蒙祖强, 胡玉兰, 蒋亮, 等. 基于混合蛙跳与阴影集优化的粗糙模糊聚类算法. 控制与决策, 2015, 30(10): 1766 – 1772.)

[8] PEDRYCZ W. Shadowed sets: representing and processing fuzzy sets. *IEEE Transactions on Systems Man & Cybernetics, Part B Cybernetics —A Publication of the IEEE Systems Man & Cybernetics Society*, 1998, 28(1): 103 – 109.

[9] MENDEL J M, JOHN R I, LIU F. Interval type–2 fuzzy logic systems made simple. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2006, 14(6): 808 – 821.

[10] MO Hong, WANG Tao. Computing with words in generalized interval type-2 Fuzzy sets. *Acta Automatica Sinica*, 2012, 38(5): 707 – 715.
(莫红, 王涛. 广义区间二型模糊集合的词计算. 自动化学报, 2012, 38(5): 707 – 715.)

[11] KHUMAN A S, YANG Y, JOHN R. A significance measure for R–fuzzy sets. *IEEE International Conference on Fuzzy Systems*. Istanbul, Turkey: IEEE, 2015: 1 – 6.

[12] KHUMAN A S, YANG Y, JOHN R. Quantification of R–fuzzy sets. *Expert Systems with Applications*, 2016, 55(15): 374 – 387.

[13] XIA Yujia, LI Shaoyuan, XI Yugeng. A method of inducing decision rules based on rough set theory. *Control & Decision*, 2001, 16(5): 577 – 580.
(夏雨佳, 李少远, 席裕庚. 一种基于粗糙集的信息系统决策规则提取方法. 控制与决策, 2001, 16(5): 577 – 580.)

[14] ZDZISLAW P. Rough set theory and its applications to data analysis. *Cybernetics & Systems*, 1998, 29(7): 661 – 688.

[15] HUANG Guoshun, ZENG Fanzhi, WEN Han. Uncertainty measurement based on conditional probability of the rough set. *Control and Decision*, 2015, 30(6): 1099 – 1105.
(黄国顺, 曾凡智, 文翰. 基于条件概率的粗糙集不确定性度量. 控制与决策, 2015, 30(6): 1099 – 1105.)

[16] JIA Fan. *Research on decision-making methods of multi-criteria in the information environment*. Jinan: Shandong University, 2017.
(贾凡. 不确定信息环境下多准则群决策方法研究. 济南: 山东大学, 2017.)

[17] CHEN Zhanghong. *Research and implementation of audio loudness test and control system*. Changsha: Central South University, 2014.
(陈章虹. 音频响度测试与控制系统的研究与实现. 长沙: 中南大学, 2014.)

作者简介:

李守军 博士研究生, 主要从事人工智能、模式识别与预测决策研究, E-mail: lishoujunbox@126.com;

马小平 博士, 教授, 博士生导师, 主要从事人工智能、信息融合研究, Email: xpma@cumt.edu.cn;

杨春雨 博士, 教授, 主要从事控制系统建模、分析与设计研究, E-mail: chunyuyang@cumt.edu.cn.