

基于量子系综分类的量子系统哈密顿量辨识

陈春林[†]

(南京大学 工程管理学院, 江苏 南京 210093)

摘要: 针对量子系统中的哈密顿量辨识问题, 提出了一种基于量子系综分类的量子系统参数辨识方法. 首先, 所采用的量子系综分类方法结合了基于采样的学习控制方法和梯度流算法, 可利用所设计的控制场有效区分具有不同哈密顿量参数的量子系统; 其次, 以交叉验证的方式对于所需估计的哈密顿量参数值进行区间判定, 提高估计可靠性; 再次, 采用逐次细化判定区间的方法, 辨识出最终的哈密顿量参数; 最后, 通过数值仿真验证了所提出的量子系统哈密顿量辨识方法的有效性和实用性.

关键词: 量子系综分类; 哈密顿量辨识; 基于采样的学习控制; 量子学习控制

中图分类号: O413 文献标识码: A

Hamiltonian identification for quantum systems via quantum ensemble classification

CHEN Chun-lin[†]

(School of Management and Engineering, Nanjing University, Nanjing Jiangsu 210093, China)

Abstract: In this paper, a hamiltonian identification approach is proposed for quantum systems using quantum ensemble classification. First, the quantum ensemble classification method is introduced by combining sampling-based learning control and gradient flow algorithms, which helps discriminate different quantum systems whose hamiltonian parameters falling in different intervals, respectively. Second, the intervals for the parameters to be identified are estimated via cross verification to achieve a reliable result. Third, the hamiltonian parameters are identified by successively refining the estimated intervals. Finally, the effectiveness and practicability of the proposed hamiltonian identification approach is verified using numerical simulation.

Key words: quantum ensemble classification; Hamiltonian identification; sampling-based learning control; quantum learning control

1 引言(Introduction)

量子控制是控制论与量子力学理论交叉形成的新兴学科, 主要是从控制论和系统论的观点研究量子系统的动力学演化及其调控机制^[1-2]. 目前随着量子通信、量子计算等量子信息技术的发展^[3-4], 越来越需要量子控制学科的发展来提供理论和技术支撑. 量子信息领域很多基本问题如量子比特初态的制备、量子逻辑门的构造、量子退相干抑制、纠缠态的制备和保持等都可以归结为量子控制问题^[5]. 因此系统地研究量子控制理论是量子调控的重要内容之一, 它将为量子通信和量子计算向实际应用方向的发展提供重要的理论支撑. 在量子控制问题中, 量子系统哈密顿量的参数辨识是一项核心任务, 具有重要且广泛的应用前

景, 目前在该领域已经有很多有益的尝试和结果^[6-8]. 然而, 已有的方法大部分都是基于大量的实验数据进行参数辨识方法的设计, 往往需要对所研究的量子系统进行连续测量, 在实际应用及辨识结果的改善等方面具有较多的限制. 另一方面, 量子学习控制方面的研究结果, 为量子系统的参数辨识问题提供了新的思路.

目前研究表明, 对于复杂的量子控制问题, 相比较于开环控制策略, 闭环控制策略具有特有的优势. 在量子系统的闭环控制方面, 研究者已经提出了两大类策略: 一是闭环学习控制^[9], 二是量子反馈控制^[10-12]. 在经典(非量子的)控制理论中, 反馈是最核心的概念. 然而, 在量子系统中引入反馈控制较为困难, 因为测

收稿日期: 2017-10-17; 录用日期: 2017-11-21.

[†]通信作者. E-mail: clchen@nju.edu.cn; Tel.: +86 25-83595118.

本文责任编辑: 席在荣.

国家重点研发计划(2016YFD0702100), 国家自然科学基金项目(61273327)资助.

Supported by National Key Research and Development Program of China (2016YFD0702100) and National Natural Science Foundation of China (61273327).

量会造成量子态的塌缩, 而相干反馈控制可以不必涉及测量, 但控制器也需要是量子系统, 设计难度大. 在闭环学习控制中, 学习开始时, 实验者可以用一个估计的控制场作为初始条件, 作用于样品, 观测和评估控制的影响, 将其结果反馈到学习算法来为下一次循环建议一个改进的控制场, 如此循环, 直至满足控制要求为止^[9]. 普林斯顿大学的Herschel Rabitz教授的研究组发表于1992年Physical Review Letters的论文^[9]被认为是提出闭环学习控制方法的经典论文, 这篇论文明确给出了实验室环境下让量子控制系统通过一个性能指标信息, 利用遗传算法选择最佳的控制策略. 在闭环学习控制理论和方法中, 基于采样的学习控制(sampling-based learning control, SLC)方法^[13-14]可有效用于量子鲁棒控制和量子系统控制的设计, 并成功解决了量子系统分类问题^[15]. 量子系统分类是通过设计最优控制场, 以最大程度的把两类相似量子系统分别控制到易于区分的状态(如特征态), 在如同位素区分和量子信息提取等领域都具有潜在的应用价值.

本文将利用量子系统分类的方法设计量子系统哈密顿量参数识别算法, 具体算法思想包括以下两个方面: 1) 对于所要辨识的参数给出一个猜测值, 假如根据此猜测值基于SLC算法设计最优控制场将该系统从初始状态控制到一个目标状态, 如果系统的平均保真度趋近于1, 则可认为该哈密顿量参数的猜测值是准确的; 2) 由于不可能在连续参数空间上尝试所有猜测值, 因此本文利用二分法在参数空间上连续使用基于SLC的量子系统分类控制方法, 使猜测值逐步逼近最优估计值. 根据二分法的特性可知, 哈密顿量参数估计的误差范围为 $[\pm \frac{d}{2}]$, 其中 d 为最后一次量子系统分类算法中的参数区间长度.

2 问题描述(Problem description)

本文考虑一个有限维封闭量子系统, 其状态演化薛定谔方程可描述为(设定约化普朗克常数 $\hbar = 1$):

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = -iH(t)|\psi(t)\rangle, \\ t \in [0, T], |\psi(0)\rangle = |\psi_0\rangle, \end{cases} \quad (1)$$

其中: $i = \sqrt{-1}$, 量子态 $|\psi(t)\rangle$ 是希尔伯特空间上的一个单位复向量, $H(t)$ 是系统哈密顿量, 一般由系统的自由哈密顿量和外加控制场的控制哈密顿量构成, 即

$$H(t) = H_0 + H_c(t) = H_0 + \sum_{m=1}^M u_m(t)H_m, \quad (2)$$

其中: H_0 为系统的自由哈密顿量, 控制哈密顿量 $H_c(t) = \sum_{m=1}^M u_m(t)H_m$ 表示了系统与外部控制场 $u_m(t)$ (实值且平方可积函数)的作用, H_m 为系统与控制场 $u_m(t)$ 耦合的哈密顿操作符.

方程式(1)的解为 $|\psi(t)\rangle = U(t)|\psi_0\rangle$, 其中 $U(t)$ 满

足如下方程(I 为单位矩阵):

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}U(t) = -iH(t)U(t), \\ t \in [0, T], U(0) = I. \end{cases} \quad (3)$$

不失一般性, 设系统的自由哈密顿量和控制哈密顿量中待辨识的参数分别为 ε_0 和 ε_u , 即

$$H(t) = \varepsilon_0 H_0 + \varepsilon_u \sum_{m=1}^M u_m(t)H_m \quad (4)$$

其中 $\varepsilon_0 \in (0, 1]$ 和 $\varepsilon_u \in (0, 1]$ 均为归一化的待辨识参数. 本文将利用量子系统分类的思想, 以二分查找的方式进行量子系统哈密顿量的参数辨识.

3 量子系统分类方法(Quantum ensemble classification, QEC)

量子系统分类问题在文献[15]中被系统性的提出并给出了一种有效的解决方案. 在该解决方案中, 利用采样学习的方式构建训练数据集, 并由此训练数据集给出最优控制, 将此最优控制作用于待分类的异质量子系统, 即可较为方便的得到分类结果. 假设从量子系统 $\mathcal{S}$ 中选取的训练数据集 D_N 包括 N 个量子系统(分别被标记为相应的类), 有

$$D_N = \{(H^1(t), y_1), (H^2(t), y_2), \dots, (H^N(t), y_N)\}, \quad (5)$$

其中 $H^n(t)$ ($n = 1, 2, \dots, N$)表示训练集中的第 n 个量子系统, 并被标记为类 y_n .

不失一般性, 本文考虑一个包含两类成员(即A类和B类)的待分类异质量子系统, 针对该二分类量子系统分类问题, 各量子系统个体的哈密顿量可写成以下形式:

$$\begin{cases} H_{\varepsilon_0, \varepsilon_u}^A(t) = g_0^A(\varepsilon_0)H_0 + g_u^A(\varepsilon_u) \sum_{m=1}^M u_m(t)H_m, \\ H_{\varepsilon_0, \varepsilon_u}^B(t) = g_0^B(\varepsilon_0)H_0 + g_u^B(\varepsilon_u) \sum_{m=1}^M u_m(t)H_m, \end{cases} \quad (6)$$

其中: $g_0^A(\cdot)$ 和 $g_u^A(\cdot)$ 均为已知函数, 分类A的哈密顿量 $H_{\varepsilon_0, \varepsilon_u}^A(t)$ 中的参数 ε_0 和 ε_u 分别服从分布 $d_0^A(\varepsilon_0)$ 和 $d_u^A(\varepsilon_u)$. 同理也适合针对分类B中的参数.

针对一个二分类量子系统分类任务, 本文的目标是设计一个控制策略 $u(t) = \{u_m(t), m = 1, 2, \dots, M\}$ 并作用于该量子系统, 使得量子系统 $\mathcal{S}$ 中A类和B类两类系统在同一控制场作用下从相同的初态 $|\psi_0\rangle$ 分别被驱动到两个不同的终态 $|\psi_{\text{targetA}}\rangle$ 和 $|\psi_{\text{targetB}}\rangle$, 且 $|\psi_{\text{targetA}}\rangle$ 和 $|\psi_{\text{targetB}}\rangle$ 通过量子测量等手段易区分. 由此可见, 一个二分类量子系统分类任务可通过构建一个分类准确性高的量子分类器来实现, 该量子分类器包括以下3个步骤: 1) 构建训练数据集 $D_N = \{(H^n(t), y_n), n = 1, \dots, N\}$, 其中 $y_n \in \{A, B\}$ (A和B为符号常量, 代表A类和B类), 并根据训练数据集通过学习算

法求取最优控制策略 $u(t)$; 2) 将最优控制策略 $u(t)$ 作用于量子系统; 3) 实施量子测量, 根据测量结果预测量子系统综中未知量子系统的类别。

在分类器设计中, 核心任务是如何通过训练数据集学习最优控制策略, 在量子系统分类方法中本文设计了一个性能函数 $J(u)$ 用以学习控制策略 $u = \{u_m(t), m = 1, 2, \dots, M\}$, 由此二分类量子系统分类问题可以描述为如下优化问题^[15]:

$$\begin{aligned} \max_u J(u) := \\ \max_u \{w_A \mathbf{AV}[J_{\varepsilon_0, \varepsilon_u}^A(u)] + w_B \mathbf{AV}[J_{\varepsilon_0, \varepsilon_u}^B(u)]\}, \\ \text{s.t.} \\ t \in [0, T], \\ |\psi_{\varepsilon_0, \varepsilon_u}^A(0)\rangle = |\psi_{\varepsilon_0, \varepsilon_u}^B(0)\rangle = |\psi_0\rangle, \\ \begin{cases} \frac{d}{dt} |\psi_{\varepsilon_0, \varepsilon_u}^A(t)\rangle = -iH_{\varepsilon_0, \varepsilon_u}^A(t) |\psi_{\varepsilon_0, \varepsilon_u}^A(t)\rangle, \\ H_{\varepsilon_0, \varepsilon_u}^A(t) = g_0^A(\varepsilon_0)H_0 + g_u^A(\varepsilon_u) \sum_{m=1}^M u_m(t)H_m, \\ J_{\varepsilon_0, \varepsilon_u}^A(u) = |\langle \psi_{\varepsilon_0, \varepsilon_u}^A(T) | \psi_{\text{targetA}} \rangle|^2, \\ \frac{d}{dt} |\psi_{\varepsilon_0, \varepsilon_u}^B(t)\rangle = -iH_{\varepsilon_0, \varepsilon_u}^B(t) |\psi_{\varepsilon_0, \varepsilon_u}^B(t)\rangle, \\ H_{\varepsilon_0, \varepsilon_u}^B(t) = g_0^B(\varepsilon_0)H_0 + g_u^B(\varepsilon_u) \sum_{m=1}^M u_m(t)H_m, \\ J_{\varepsilon_0, \varepsilon_u}^B(u) = |\langle \psi_{\varepsilon_0, \varepsilon_u}^B(T) | \psi_{\text{targetB}} \rangle|^2, \end{cases} \end{aligned} \quad (7)$$

其中: $w_A, w_B \in [0, 1]$ 满足 $w_A + w_B = 1$, 为针对分类A和B的权重, $J_{\varepsilon_0, \varepsilon_u}^A(u)$ 表示A类中根据目标态 $|\psi_{\text{targetA}}\rangle$ 衡量的分类性能指标, $\mathbf{AV}[J_{\varepsilon_0, \varepsilon_u}^A(u)]$ 表示A类整体的平均分类性能. 针对分类B的相关定义和参数同分类A. 该二分类量子系统分类(quantum ensemble classification, QEC)算法流程可描述如下, 其中具体梯度计算可进一步参考文献[15–16].

Step 1 初始化迭代次数 $k = 0$, 初始化控制策略 $u^{k=0}(t) = \{u_m^0(t), m = 1, 2, \dots, M\}$, $t \in [0, T]$, 训练数据集 $D_N = D_{N_A} \cup D_{N_B}$, $D_{N_A} = \{(H^p(t), A), p = 1, \dots, N_A\}$, $D_{N_B} = \{(H^q(t), B), q = N_A + 1, N_A + 2, \dots, N\}$;

Step 2 循环(对于每一次迭代):

Step 2.1 针对A类训练数据集 D_{N_A} 中每一个成员, 利用当前控制策略 $u^k(t)$ 计算演化矩阵 $U_{\varepsilon_0^p, \varepsilon_u^p}^k(t)$, $p = 1, 2, \dots, N_A$;

Step 2.2 针对B类训练数据集 D_{N_B} 中每一个成员, 利用当前控制策略 $u^k(t)$ 计算演化矩阵 $U_{\varepsilon_0^q, \varepsilon_u^q}^k(t)$, $q = N_A + 1, N_A + 2, \dots, N$;

Step 2.3 针对控制向量中每个分量 $u_m(t)$, $m = 1, 2, \dots, M$, 计算其梯度 $\delta_m^k(t) := \nabla J_N(u_m^k)$, 更新 $u_m^{k+1}(t) = u_m^k(t) + \eta_k \delta_m^k(t)$, 其中 η_k 为学习速率;

Step 2.4 $k = k + 1$;

Step 3 直至训练过程结束;

Step 4 输出QEC训练学习所获得的最优控制策略 $u^*(t) = \{u_m^*(t)\} = \{u_m^k(t)\}$, $m = 1, 2, \dots, M$.

4 基于QEC的哈密顿量辨识(QEC based hamiltonian identification)

本文提出了一种基于量子系统分类的哈密顿量参数辨识方法, 该方法的基本思想及出发点是, 对于待辨识的参数给出一个猜测并根据此猜测设计最优控制策略, 主动控制该系统从已知的初态到某一易于通过量子测量进行识别的目标态, 若将最优控制策略作用于待辨识系统后, 能够以较高的保真度控制到目标态, 则该猜测符合该参数真实值, 否则该猜测不符合该参数真实值. 为了保证参数辨识的可靠性和准确度, 本文以交叉验证的方式对于所需估计的哈密顿量参数值进行区间判定, 并采用二分查找的方法逐次细化判定区间, 辨识出最终的哈密顿量参数.

如图1所示基于QEC的哈密顿量参数辨识示意图, 在第 i 次利用二分类法进行参数辨识阶段, 本文把待辨识的参数空间拆分为互斥的两份($E_{(i)}$ 与 $E_{(i)}^\perp$), 将利用QEC方法所求的最优控制 $u^*(i, t)$ 作用于待测试的该量子系统, 并根据测量结果判定待识别系统的参数是属于 $E_{(i)}$ 还是属于 $E_{(i)}^\perp$, 迭代该过程直至算法结束.

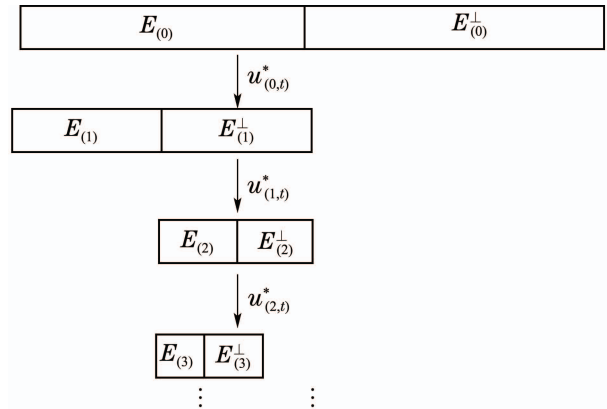


图1 基于QEC的哈密顿量参数辨识示意图

Fig. 1 Schematic of QEC based Hamiltonian identification

基于QEC的哈密顿量参数辨识算法流程如下:

Step 1 设待辨识的哈密顿量参数 $\varepsilon_0 \in [E_{\min}^0, E_{\max}^0]$, $\varepsilon_u \in [E_{\min}^u, E_{\max}^u]$, $\varepsilon_0 \neq 0$, $\varepsilon_u \neq 0$, 初始化 $[E_{\min}^0, E_{\max}^0] = (0, 1]$, $[E_{\min}^u, E_{\max}^u] = (0, 1]$.

Step 2 假设

$$\varepsilon_0 \in [E_{\min}^0, E_{\max}^0], \varepsilon_u \in [E_{\min}^u, \frac{E_{\min}^u + E_{\max}^u}{2}],$$

利用QEC算法求取最优控制并作用于待辨识系统, 得针对目标态的保真度 f_1 ; 假设

$$\varepsilon_0 \in [E_{\min}^0, E_{\max}^0], \varepsilon_u \in [\frac{E_{\min}^u + E_{\max}^u}{2}, E_{\max}^u],$$

同理, 得针对目标态的保真度 f_2 ; 若 $f_1 > f_2$, 则令 $E_{\max}^u = \frac{E_{\min}^u + E_{\max}^u}{2}$, 否则令 $E_{\min}^u = \frac{E_{\min}^u + E_{\max}^u}{2}$.

Step 3 假设

$$\varepsilon_u \in [E_{\min}^u, E_{\max}^u], \varepsilon_0 \in [E_{\min}^0, \frac{E_{\min}^0 + E_{\max}^0}{2}].$$

利用QEC算法求取最优控制并作用于待辨识系统, 得针对目标态的保真度 f_1 ; 假设

$$\varepsilon_u \in [E_{\min}^u, E_{\max}^u], \varepsilon_0 \in [\frac{E_{\min}^0 + E_{\max}^0}{2}, E_{\max}^0],$$

同理, 得针对目标态的保真度 f_2 ; 若 $f_1 > f_2$, 则令 $E_{\max}^0 = \frac{E_{\min}^0 + E_{\max}^0}{2}$, 否则令 $E_{\min}^0 = \frac{E_{\min}^0 + E_{\max}^0}{2}$.

Step 4 若待辨识参数的判定区间 $\varepsilon_0 \in [E_{\min}^0, E_{\max}^0]$, $\varepsilon_u \in [E_{\min}^u, E_{\max}^u]$ 符合辨识精度的要求, 或QEC算法无法进行有效分类, 算法终止; 否则, 跳转Step 2.

由上述算法流程可见, 基于QEC的哈密顿量参数辨识的精度和准确性取决于两个方面的因素: 1) 量子系统分类的极限, 即随着判定区间的缩小, 量子系统分类中当算法无法利用主动控制的方式有效区分A类和B类两类系统时, 哈密顿量的辨识过程终止, 精度无法进一步提高; 2) 实际系统中通过投影测量等手段进行保真度比较的有效区分程度, 虽然本文中方法利用交叉检验的方式可以大幅提升区间判定的区分能力, 但最终的区分极限仍会受到实际系统的约束. 因此若辨识精度的要求符合这两种因素的约束条件, 可以预

期基于QEC的哈密顿量辨识方法能够稳定的给出辨识结果.

5 数值仿真(Numerical simulation)

考虑如下一个二能级量子系统:

$$H(t) = H_0 + H_u(t) = \frac{\varepsilon_0}{2} \sigma_z + \frac{\varepsilon_u}{2} (u_1(t) \sigma_x + u_2(t) \sigma_y), \quad (8)$$

其中: $\varepsilon_0 \in (0, 1]$ 和 $\varepsilon_u \in (0, 1]$ 均为归一化的待辨识参数, 泡利矩阵 $\sigma = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ 分别为

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

仿真过程中量子系统分类算法参数设置同文献[15], 随机生成一测试系统($\varepsilon_0 = 0.8147$, $\varepsilon_u = 0.6324$), 基于量子系统分类方法逐次使用二分类查找进行参数估计.

图2给出了哈密顿量参数辨识过程中通过量子系统分类方法进行的前6次辨识过程所获取的控制策略, 如在第1次辨识过程中, 图2(1a)给出了假定($\varepsilon_0 \in (0, 1]$, $\varepsilon_u \in (0, 0.5]$)的最优控制策略, 作用于测试系统后保真度为 $f_1 = 0.1764$; 图2(1b)给出了假定($\varepsilon_0 \in (0, 1]$, $\varepsilon_u \in (0.5, 1]$)的最优控制策略, 作用于测试系统后保真度为 $f_2 = 0.9984$; 图2(1a)与图2(1b)给出的控制形成了交叉验证, 由 $f_1 < f_2$, 可判定 $\varepsilon_u \in (0.5, 1]$. 后续每次控制策略同理利用二分查找的方法实现了逐次细分的区间判定.

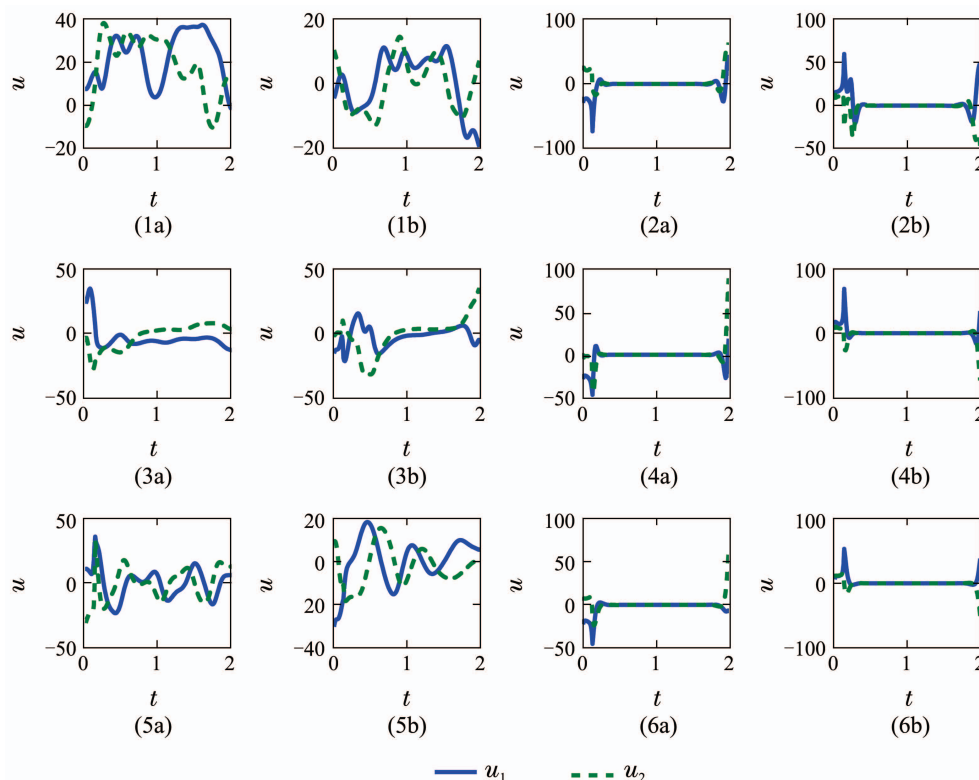


图 2 哈密顿量辨识过程中所获取的部分(前6步)控制策略

Fig. 2 Control strategies (Step1-6) in the Hamiltonian identification process

图3给出了经过10次辨识(ε_0 与 ε_u 各5次, 交替进行)的过程及辨识结果($\varepsilon_0^e = 0.8287$, $\varepsilon_u^e = 0.6406$), 与真实值的误差为($\Delta\varepsilon_0 = 0.014$, $\Delta\varepsilon_u = 0.0136$).

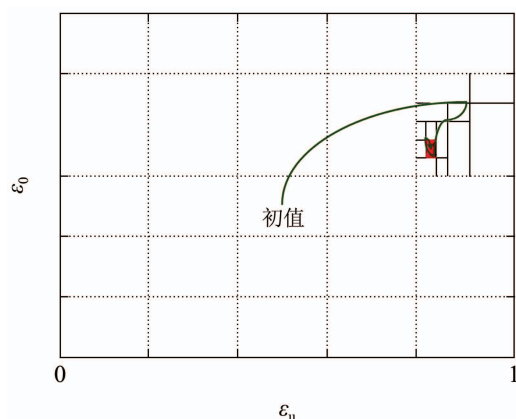


图3 基于QEC的哈密顿量辨识过程及结果

Fig. 3 The process and results of QEC based Hamiltonian identification

6 结束语(Conclusions)

针对量子系统哈密顿量的辨识问题, 本文给出了一种基于量子系统分类的二分查找方法, 在每步二分查找中, 利用量子系统分类设计最优控制策略, 以主动控制以及交叉检验的方式提高对参数所属区间的判定可靠性, 并逐步细分判定区间达到哈密顿量参数辨识的目的. 本文通过一个二能级系统对所提出的方法进行了数值仿真, 仿真结果展示了基于量子系统分类进行哈密顿量参数辨识的可行性及有效性. 未来将进一步分析算法的复杂性, 设计参数估计过程的自适应机制, 并针对不同量子系统拓展算法的应用, 同时探讨其他适用于量子系统辨识及控制的学习算法^[17-18].

参考文献(References):

- [1] WISEMAN H M, MILBURN G J. *Quantum Measurement and Control* [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2010.
- [2] RABITZ H, DE VIVIE-RIEDLE R, MOTZKUS M, et al. Whither the future of controlling quantum Phenomena? [J]. *Science*, 2000, 288: 824 – 828.
- [3] BENNETT C H, DIVINCENZO D P. Quantum information and computation [J]. *Nature*, 2000, 404: 247 – 255.
- [4] NIELSEN M A, CHUANG I L. *Quantum Computation and Quantum Information* [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.
- [5] DONG D, PETERSEN I R. Quantum control theory and applications: a survey [J]. *IET Control Theory & Applications*, 2010, 4(12): 2651 – 2671.
- [6] BONNABEL S, MIRRAHIMI M, ROUCHON P. Observer-based hamiltonian identification for quantum systems [J]. *Automatica*, 2009, 45(5): 1144 – 1155.
- [7] ZHANG J, SAROVAR M. Quantum hamiltonian identification from measurement time traces [J]. *Physical Review Letters*, 2014, 113: 080401.
- [8] WANG Y, DONG D, QI B, et al. A quantum hamiltonian identification algorithm: computational complexity and error analysis [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, DOI: 10.1109/TAC.2017.2747507.
- [9] JUSON R S, RABITZ H. Teaching lasers to control molecules [J]. *Physical Review Letters*, 1992, 68: 1500 – 1515.
- [10] WISEMAN H M, MILBURN G J. Quantum theory of optical feed-back via homodyne detection [J]. *Physical Review Letters*, 1993, 70(5): 548 – 551.
- [11] VAN HANDEL R, STOCKTON J K, MABUCHI H. Feedback control of quantum state reduction [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, 50(6): 768 – 780.
- [12] ZHANG J, LIU Y, WU R B, et al. Quantum feedback: theory, experiments, and applications [J]. *Physics Reports*, 2017, 679: 1 – 60.
- [13] CHEN C, DONG D, LONG R, et al. Sampling-based learning control of inhomogeneous quantum ensembles [J]. *Physical Review A*, 2014, 89: 023402.
- [14] DONG D, MABROK M A, PETERSEN I R, et al. Sampling-based learning control for quantum systems with uncertainties [J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2015, 23(6): 2155 – 2166.
- [15] CHEN C, QI B, DONG D, et al. Quantum ensemble classification: a sampling-based learning control approach [J]. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2017, 28(6): 1345 – 1359.
- [16] WU C, QI B, CHEN C, et al. Robust learning control design for quantum unitary transformations [J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2017, 47(12): 4405 – 4417.
- [17] CHEN C, DONG D, LI H X, et al. Fidelity-based probabilistic Q-learning for control of quantum systems [J]. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2014, 25(5): 920 – 933.
- [18] DONG D, CHEN C, LI H X, et al. Quantum Reinforcement Learning [J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics*, 2008, 38(5): 1207 – 1220.

作者简介:

陈春林 (1979–), 男, 教授, 目前研究方向为量子控制、机器学习与移动机器人, E-mail: clchen@nju.edu.cn.