

随机金融市场环境下的最优再保险-投资策略

常浩^{1,2†}, 王春峰², 房振明²

(1. 天津工业大学 理学院, 天津 300387; 2. 天津大学 管理与经济学部, 天津 300072)

摘要: 为了对冲保险风险, 保险公司可以向再保险公司购买比例再保险; 同时, 为了保值增值, 保险公司将其财富投资于金融市场. 假设盈余过程由带漂移的布朗运动所驱动, 利率满足仿射利率模型, 股票波动率满足Heston随机波动率模型. 应用随机最优控制和HJB方程方法得到了指数效用下最优再保险-投资策略的显式解. 给出数值算例并分析了模型参数对最优再保险策略和最优投资策略的影响. 研究表明: 最优再保险策略不仅依赖于保险市场参数, 而且依赖于金融市场参数; 随机利率与随机波动率模型下的最优再保险-投资策略与利率动态密切相关, 而与波动率动态无关; 再保险行为对投资于股票的数量没有影响, 而对投资于零息票债券的数量产生较大的影响.

关键词: 仿射利率模型; Heston模型; 指数效用; 最优控制理论; 最优再保险-投资策略

引用格式: 常浩, 王春峰, 房振明. 随机金融市场环境下的最优再保险-投资策略. 控制理论与应用, 2019, 36(2): 307-318

中图分类号: O211.67, F830.48 文献标识码: A
DOI: 10.7641/CTA.2018.70807

Optimal reinsurance-investment strategy in a stochastic financial market

CHANG Hao^{1,2†}, WANG Chun-feng², FANG Zhen-ming²

(1. School of Science, Tianjin Polytechnic University, Tianjin 300387, China;
2. College of Management and Economics, Tianjin University, Tianjin 300072, China)

Abstract: Insurance company can purchase proportional reinsurance to hedge the risk of insurance. Meantime, insurance company can invest its wealth into the financial market to preserve or increase the value. In this paper, surplus process is supposed to be driven by Brownian motion with drift, short rate is described by stochastic affine interest rate model and the volatility of stock price is governed by Heston's stochastic volatility model. By using the technique of stochastic dynamic programming and Hamilton-Jocabi-Bellman (HJB) equation, optimal reinsurance-investment strategy with exponential utility is obtained in explicit form. A numerical example is given to analyze the sensitivity of optimal reinsurance-investment strategy to model parameters. Research results display that optimal reinsurance strategy does not only depend on the parameters of insurance market, but also depends on the parameters of financial market; optimal reinsurance-investment strategies with stochastic interest rate and stochastic volatility are closely related to the dynamics of interest rate and have nothing to do with the dynamics of volatility; the reinsurance behavior has no effect on the amount in the stock, yet has a considerable influence on the amount in the zero-coupon bond.

Key words: affine interest rate model; Heston model; exponential utility; optimal control theory; optimal reinsurance-investment strategy

Citation: CHANG Hao, WANG Chunfeng, FANG Zhenming. Optimal reinsurance-investment strategy in a stochastic financial market. *Control Theory & Applications*, 2019, 36(2): 307-318

1 引言

随着保费收入的高速增长和保险资金运用范围的不断拓宽, 保险公司对资本市场的介入越来越深, 其

所面临的市场风险也越来越大, 市场风险甚至已经成为保险公司最大的风险, 这些风险主要包括利率风险、股市波动风险和通胀风险等. 考虑到保险公司早

收稿日期: 2017-11-06; 录用日期: 2018-05-28.

†通信作者. E-mail: ch8683897@126.com; Tel.: +86 22-83956327.

本文责任编辑: 汤善健.

国家自然科学基金面上项目(71671122), 教育部人文社会科学研究基金规划项目(16YJA790004), 中国博士后科学基金项目(2014M560185, 2016T90203), 天津市高校“中青年骨干创新人才培养计划”项目资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (71671122), the Humanities and Social Science Research Foundation of Ministry of Education of China (16YJA790004), the China Postdoctoral Science Foundation Funded Project (2014M560185, 2016T90203) and the Tianjin's University "Youth Backbone Innovation Talent Training Program" Funded Project.

期的业务主要是保险基金的再投资,这个时期保险公司面临的主要是投资风险.针对各种不同市场条件和不同风险度量准则,很多学者研究了保险基金的再投资问题,如Browne^[1], Wang^[2]以及荣喜民和范立鑫^[3]等.后来,为了控制保险风险,保险公司开始开展再保险业务,其目的是保险公司可以将一部分保险风险分散给再保险公司来承担.为了控制投资风险和保险风险,确定最优再保险与投资策略,不少学者对不同市场模型和不同的再保险业务进行了研究,涌现出很多的研究成果,如Promislow和Young^[4], Schmidli^[5]分别研究了破产概率最小化目标下的再保险-投资问题, Bi和Guo^[6], Liang等^[7]分别研究了跳扩散市场下基于均值-方差准则的再保险-投资问题, Gu等^[8], Zhao等^[9]以及谷爱玲和陈树敏^[10]分别研究了常数方差弹性(constant elasticity of variance, CEV)模型、Heston模型以及状态相依效用下的超额损失再保险-投资策略.最近, Li等^[11]综合考虑到保险人和再保险人都有追求投资收益最大化与降低保险风险的潜在要求,研究了CEV模型下的保险人与再保险人的联合最优投资-再保险策略. Yi等^[12]假设保险公司是厌恶模糊的,应用Robust最优控制方法研究了Heston模型下保险公司的最优再保险和投资策略. Li等^[13]和Zhao等^[14]考虑到保险公司对时间的偏好问题,分别研究了Heston模型和CEV模型下的时间一致均衡再保险和投资策略. Guan和Liang^[15]以及Li等^[16]分别在效用准则和均值-方差准则下研究了利率风险与通胀风险环境下的最优再保险和投资策略.这些研究成果为不同市场环境和不同风险准则下保险公司的投资与再保险决策提供了理论依据.

近年来,利率风险和波动风险受到许多研究者的关注. Liu^[17]假设利率、股票收益率和波动率都是某一马氏随机过程的函数,运用随机最优控制理论对有限寿命期内的投资-消费问题进行了研究,但未能得到最优投资-消费策略的显式解.但Liu^[17]在文中给出了一种比较特殊的随机利率与随机波动率模型,并得到了最优投资-消费策略的显式解. Li和Wu^[18]假设利率动态与股票价格动态相互独立,运用随机最优控制理论得出了最优投资组合的显式表达式,并证明了验证定理.但Li和Wu^[18]没有考虑利率动态对股票价格的影响,且金融市场中不包含零息票债券. Noh和Kim^[19]假设利率动态、波动率动态都与股票价格动态之间存在一般的相关性,对无限寿命期内的投资-消费问题进行了研究,但未能得到最优投资-消费策略的显式解.后来, Chang和Rong^[20], Wei等^[21]分别在Li和Wu的市场模型^[18]基础上进一步研究了幂效用下的投资-消费问题和均值-方差框架下的再保险-投资问题,取得了很好的研究成果.但Li和Wu^[18]假设利率动态与股票动态相互独立,这不符合实际的投资环境. Deelstra等^[22]提供了一种仿射利率模型,并运用对偶

方法研究了幂效用下带有最低保障水平的缴费确定(defined contribution, DC)型养老金计划问题. Gao^[23]研究了仿射利率模型下的DC型养老金计划问题,运用随机最优控制方法得到了对数效用下最优投资策略的显式解. 马威和顾孟迪^[24]研究了Hull-White利率模型下的再保险和投资问题. Guan和Liang^[25]参考了Deelstra等^[22]的市场模型,并将Deelstra等^[22]的市场模型拓展到了随机波动率环境下,从而进一步对随机利率与随机波动率模型下带有最低保障的DC型养老金计划问题进行了研究,得到了幂效用下最优投资策略的显式解. 这些文献丰富和发展了随机利率和随机波动率模型的投资理论与实践. 但是,随机利率与随机波动率模型下的很多投资问题仍未得到全面的解决,比如再保险与投资问题. 在保险理论与实践,保险公司往往选择指数效用来描述其对风险的厌恶程度,原因在于保险公司的赔付过程可能使其终端财富为负. 同时,根据本文的研究,本文发现:对于随机利率与随机波动率模型下的再保险与投资问题,指数效用的解决难度要比其他效用大得多,主要原因在于利率的随机化使得价值函数解的形式发生了本质的变化,准确猜想Hamilton-Jocabi-Bellman(HJB)方程解的形式以及相应偏微分方程解的形式变得更加困难. 这也是关于随机利率与随机波动率模型下的现有文献都选择幂效用或对数效用的重要原因.

根据本文对现有文献的查阅情况,尚未发现其他学者对随机利率与随机波动率模型下的再保险与投资问题进行进一步的研究,除了Wei等^[21]之外. 事实上, Wei等^[21]的市场模型有一定的缺陷,更重要的是它未能解决指数效用下的最优再保险与投资策略问题. 为了弥补Wei等^[21]的市场模型的缺陷,本文在Guan和Liang市场模型^[25]基础上进一步研究保险公司的最优再保险和投资策略问题. 假设盈余过程由带漂移的布朗运动所驱动,利率由仿射利率模型所描述,股票价格波动率由Heston随机波动率模型所驱动. 假设金融市场包含一种无风险资产、一种股票和一种零息票债券. 运用随机最优控制理论,本文得到了指数效用下最优再保险-投资策略的显式解. 最后,本文给出算例分析了模型参数对最优再保险策略和最优投资策略的影响. 研究结果表明:最优再保险策略不仅依赖于保险市场参数,而且依赖于金融市场参数;投资于股票的数量仅仅依赖于金融市场参数;投资于零息票债券的数量不仅依赖于金融市场参数,而且依赖于保险市场参数. 同时,随机利率与随机波动率模型下的最优再保险-投资策略与利率动态密切相关,而与波动率动态无关. 和现有研究成果相比较,本文有如下几个创新点: i) 弥补了Li和Wu^[18]市场模型的缺陷,考虑了利率动态对股票价格的影响,进一步研究了随机利率与随机波动率模型下的最优再保险与投资策略; ii) 在Guan和Liang^[25]市场模型基础上进一步

研究了指数效用下的最优再保险与投资问题; iii) 本文得到了指数效用下最优再保险与投资策略的显式表达式; iv) 本文给出了方程(19)与方程(50)的解法, 克服了指数效用下保险公司的最优再保险-投资策略求解过程中遇到的关键难点, 关于其他类似方程的解法, 本文提供的解法具有重要参考价值, 这也为其他更加复杂的投资问题的解决提供了理论参考。

2 问题框架

假设 $[0, T]$ 表示有限的固定投资期, 其中: T 为终端时刻, $(W_R(t), W_r(t), W_S(t))$ 是定义在完备概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}, \mathcal{P})$ 上相互独立的三维标准布朗运动, $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}$ 是由 $(W_R(t), W_r(t), W_S(t))$ 所产生的信息流. 假设金融市场是无摩擦的、没有交易成本, 存在一种无风险资产、一种风险资产和一种零息票债券可连续交易。

假设保险公司的索赔过程服从下列随机过程^[4]:

$$d\tilde{C}(t) = udt - v dW_R(t), \quad (1)$$

其中: $u > 0$ 是索赔率, $v > 0$ 是索赔过程的波动率, $W_R(t)$ 是一维标准布朗运动. 假设保费以恒定速率 $\tilde{C}_0 = (1 + \theta_0)u$ 连续支付, 其中 $\theta_0 > 0$ 为保险公司的安全负荷. 这意味着, 公司实际收取的保费应该能够补偿向投保人支付的索赔额以及各项附加费用。

在既没有再保险, 也没有投资的情形下, 保险公司的盈余过程可由下列近似扩散过程来描述^[4]:

$$dR_0(t) = \tilde{C}_0 dt - d\tilde{C}(t) = \theta_0 u dt + v dW_R(t). \quad (2)$$

在保险公司的业务活动中, 保险公司为了降低保险风险可以向再保险公司购买比例再保险或者开展新业务(例如可以接受其他保险公司的再保险业务), 再保险公司在接受保险公司一定缴费的情况下承担一部分赔偿责任. 设再保险比例为 $(1 - q(t))$, $q(t) \in [0, +\infty)$ 称为风险暴露. 当 $q(t) \in [0, 1]$ 时, 它相当于一种比例再保险, 对于时刻 t 发生的每份赔付, 每份保额由保险公司承担 $100q(t)\%$, 剩余 $100(1 - q(t))\%$ 由再保险公司承担. 在保期末, 保险公司向再保险公司以费率 $\tilde{C}_1 = (1 + \theta_2)(1 - q(t))u$ 支付再保险费用, 其中 $\theta_2 \geq \theta_0 > 0$ 为再保险公司的安全负荷. 当 $q(t) \in (1, +\infty)$ 时, 则意味着保险公司接收了新业务. 则在比例再保险模式 $\{q(t) : t \in [0, T]\}$ 下保险公司的盈余过程^[12]可以表达为

$$dR(t) = \tilde{C}_0 dt - q(t)d\tilde{C}(t) - \tilde{C}_1 dt = (\theta_1 + \theta_2 q(t))udt + vq(t)dW_R(t), \quad (3)$$

其中: $R(0) = R_0 > 0$, $\theta_1 = \theta_0 - \theta_2$. 为了确保保险公司不会破产, 本文需要条件

$$(1 + \theta_0)u - (1 + \theta_2)(1 - q(t))u - q(t)u > 0$$

成立, 即 $q(t) > q_0 := 1 - \frac{\theta_0}{\theta_2}$.

为了实现财富的保值增值, 保险公司将其财富投资于金融市场。

假设时刻 t 无风险资产(现金或银行账户)的价格记为 $S_0(t)$, $t \in [0, T]$, 则 $S_0(t)$ 满足

$$dS_0(t) = S_0(t)r(t)dt, \quad S_0(0) = 1, \quad (4)$$

其中 $r(t)$ 表示瞬时利率. 本文假设利率 $r(t)$ 满足如下利率期限结构^[22]:

$$dr(t) = (a - br(t))dt - \sigma_r dW_r(t), \quad (5)$$

其中: $r(0) = r_0 > 0$, $\sigma_r = \sqrt{k_1 r(t) + k_2}$, 且 a, b, k_1 和 k_2 均为正常数。

注1 注意到: 当 $k_1 = 0$ 时, 式(5)退化为Vasicek利率模型; 当 $k_2 = 0$ 时, 式(5)退化为CIR(Cox-Ingersoll-Ross)利率模型. 因此式(5)被称为仿射利率模型。

假设时刻 t 风险资产(看做股票)的价格记为 $S_1(t)$, 则 $S_1(t)$ 可用如下随机微分方程^[25]来描述:

$$\frac{dS_1(t)}{S_1(t)} = r(t)dt + \sigma_s \sigma_r (\lambda_r \sigma_r dt + dW_r(t)) + \sqrt{L(t)}(\lambda_s \sqrt{L(t)}dt + dW_s(t)), \quad (6)$$

$$dL(t) = \alpha(\delta - L(t))dt + \sigma_L \sqrt{L(t)}dW_s(t), \quad (7)$$

其中: $S_1(0) = s_1 > 0$, $L(0) = l_0 > 0$, $\sigma_s, \lambda_r, \lambda_s, \alpha, \delta$ 和 σ_L 均为正常数, 且应具备 $2\alpha\delta \geq \sigma_L^2$ 以确保 $L(t) \geq 0$, 对于 $\forall t \in [0, T]$ 。

注2 股票价格运动方程(3)同时考虑了来自利率波动和股市波动的影响, $W_r(t)$ 和 $W_s(t)$ 是相互独立的一维布朗运动, 分别表示利率波动和金融市场波动的随机源. $\lambda_r \sigma_r$ 表示利率风险的市场价格, $\lambda_s \sqrt{L(t)}$ 表示股市波动风险的市场价格, 且波动率 $L(t)$ 由常见的Heston随机波动率模型(7)所表示。

假设零息票债券的到期时刻为 T , 其时刻 t 时的价格记为 $B(t, T)$, 则 $B(t, T)$ 满足如下随机微分方程:

$$\frac{dB(t, T)}{B(t, T)} = r(t)dt + \varphi_1(t)\sigma_r (\lambda_r \sigma_r dt + dW_r(t)), \quad (8)$$

其中 $B(T, T) = 1$ 且有

$$\varphi_1(t) = \frac{2(e^{\Delta_\varphi(T-t)} - 1)}{\Delta_\varphi - (b - k_1 \lambda_r) + e^{\Delta_\varphi(T-t)}(\Delta_\varphi + b - k_1 \lambda_r)},$$

$$\Delta_\varphi = \sqrt{(b - k_1 \lambda_r)^2 + 2k_1}.$$

进一步, 解方程(8)可以得到 $B(t, T) = e^{\varphi_0(t) - \varphi_1(t)r}$, 其中 $\varphi_0(t)$ 可表示为

$$\varphi_0(t) =$$

$$\frac{k_2}{k_1}((T-t) - \varphi_1(t)) + \frac{2(ak_1 + bk_2)}{k_1^2} \times \ln \frac{2\Delta_\varphi e^{0.5(\Delta_\varphi + b - k_1\lambda_r)(T-t)}}{\Delta_\varphi - (b - k_1\lambda_r) + e^{\Delta_\varphi(T-t)}(\Delta_\varphi + b - k_1\lambda_r)}$$

假设时刻 t 投资在股票和零息票债券的资金数量分别为 $\mu_s(t)$ 和 $\mu_B(t)$, 则时刻 t 投资在银行账户的资金数量可记为 $\mu_0(t)$, 且 $\mu_0(t) = X(t) - \mu_s(t) - \mu_B(t)$, 其中 $X(t)$ 表示时刻 t 的财富. 假设股票市场允许卖空和借贷, 记 $\pi(t) = (q(t), \mu_s(t), \mu_B(t))$, 则在再保险-投资策略 $\pi(t)$ 下保险公司的财富过程 $X(t)$ 可表示为

$$dX(t) = [X(t)r(t) + \mu_s(t)(\lambda_r\sigma_s\sigma_r^2 + \lambda_sL(t)) + \mu_B(t)\varphi_1(t)\lambda_r\sigma_r^2 + (\theta_1 + \theta_2q(t))u]dt + (\mu_s(t)\sigma_s\sigma_r + \mu_B(t)\varphi_1(t)\sigma_r)dW_r(t) + \mu_s(t)\sqrt{L(t)}dW_s(t) + vq(t)dW_R(t), \quad (9)$$

其中初始时刻 $X(0) = x_0 > 0$.

定义 1 一种再保险-投资策略 $(q(t), \mu_s(t), \mu_B(t))$ 被称为可容许的, 如果 $q(t), \mu_s(t)$ 和 $\mu_B(t)$ 满足如下3个条件:

i) $q(t), \mu_s(t)$ 和 $\mu_B(t)$ 都是 \mathcal{F}_t 可测的, 且满足

$$E[\int_0^T q^2(t)dt] < \infty, E[\int_0^T \mu_s^2(t)dt] < \infty$$

和 $E[\int_0^T \mu_B^2(t)dt] < \infty$;

ii) $E[\int_0^T (\mu_s(t)\sigma_s\sigma_r + \mu_B(t)\varphi_1(t)\sigma_r)^2 dt + \int_0^T \mu_s^2(t)L(t)dt + \int_0^T v^2q^2(t)dt] < \infty$;

iii) 对于任意的 $q(t), \mu_s(t)$ 和 $\mu_B(t)$, 方程(9)的解是存在且唯一的.

记 $\Pi = \{\pi(t) | \pi(t) = (q(t), \mu_s(t), \mu_B(t)), 0 \leq t \leq T\}$ 是所有可容许策略形成的集合. 保险公司期望寻找一种再保险-投资策略 $\pi(t)$ 最大化其终端财富的期望效用, 即

$$\max_{\pi(t) \in \Pi} E[U(X(T))], \quad (10)$$

其中 $U(\cdot)$ 表示效用函数, 且满足 Inada 条件: $U'(+\infty) = 0, U'(0) = +\infty$. 本文假设保险公司对风险的厌恶程度满足指数效用函数, 其 $U(x)$ 可写为

$$U(x) = -e^{-mx}/m, \quad m > 0,$$

其中 m 是风险厌恶因子.

注 3 和现有文献相比, 本文市场模型和效用函数的选择有如下几个优点: i) 和 Guan 和 Liang^[15] 的工作相比, 市场模型和效用函数是不同的, 本文主要研究随机利率与随机波动率模型下基于指数效用的再保险与投资问题, 而 Guan 和 Liang^[15] 主要研究了利率风险和通胀风险环境下基于幂效用的再保险与投资问题; ii) 和 Li 和 Wu^[18], Chang 和 Rong^[20]

以及 Guan 和 Liang^[25] 的工作相比, 所研究的问题是不同, 本文研究最优再保险与投资问题, 而 Li 和 Wu^[18] 研究投资组合选择问题, Chang 和 Rong^[20] 研究投资-消费问题, Guan 和 Liang^[25] 主要研究 DC 型养老金计划问题; iii) 和 Wei 等^[21] 的工作相比, 市场模型是不同的, 本文考虑了利率波动和股市自身波动对股票价格的影响, 市场模型更具有一般性, 且得到了指数效用下最优再保险-投资策略的显式解; iv) 和 Zhao 等^[9], Yi 等^[12] 以及 Li 等^[13] 的工作相比, 本文不仅考虑了 Heston 随机波动率模型, 而且还考虑了仿射利率模型; v) 和 Gao^[23] 以及马威和顾孟迪^[24] 的工作相比, 本文考虑了波动率的随机性, 并提供了价值函数以及相应偏微分方程的求解方法(见引理2、引理3和引理5), 这种解法与 Gao^[23] 以及马威和顾孟迪^[24] 的解法有本质的区别, 在 Gao^[23] 以及马威和顾孟迪^[24] 的工作中, 有些待定函数仅仅被假设成时间的函数, 而把利率看成常数. 本文提供了另外一种解法, 可以为随机利率与随机波动率模型下的其他更加复杂的投资问题的解决提供参考.

3 最优再保险和投资策略

定义价值函数

$$H(t, r, l, x) = \max_{\pi(t) \in \Pi} E[U(X(T)) | r(t) = r, L(t) = l, X(t) = x]. \quad (11)$$

根据随机最优控制原理, $H(t, r, l, x)$ 可看做下列 HJB 方程的一个连续解:

$$H_t + (a - br)H_r + \alpha(\delta - l)H_l + (rx + \theta_1u)H_x + 0.5\sigma_r^2H_{rr} + 0.5\sigma_L^2lH_{ll} + \max_{\pi(t) \in \Pi} \{[\mu_s(\lambda_r\sigma_s\sigma_r^2 + \lambda_sl) + \mu_B\varphi_1\lambda_r\sigma_r^2 + q\theta_2u]H_x + 0.5[\mu_s^2l + v^2q^2 + \sigma_r^2(\mu_s\sigma_s + \mu_B\varphi_1)^2]H_{xx} + \mu_s\sigma_LlH_{xl} - \sigma_r^2(\mu_s\sigma_s + \mu_B\varphi_1)H_{xr}\} = 0, \quad (12)$$

其中 $H(T, r, l, x) = U(x)$ 且 $H_t, H_r, H_l, H_{rr}, H_{ll}, H_x, H_{xx}, H_{rx}, H_{lx}$ 分别表示 $H(t, r, l, x)$ 对变量 t, r, l, x 的一阶和二阶偏导数.

根据极值的一阶条件可得最优策略分别为

$$\begin{cases} q^*(t) = -\frac{\theta_2u}{v^2} \cdot \frac{H_x}{H_{xx}}, \\ \mu_s^*(t) = -\lambda_s \frac{H_x}{H_{xx}} - \sigma_L \frac{H_{xl}}{H_{xx}}, \end{cases} \quad (13)$$

$$\mu_B^*(t) = \frac{\lambda_s\sigma_s - \lambda_r}{\varphi_1(t)} \cdot \frac{H_x}{H_{xx}} + \frac{\sigma_L\sigma_s}{\varphi_1(t)} \cdot \frac{H_{xl}}{H_{xx}} + \frac{1}{\varphi_1(t)} \cdot \frac{H_{xr}}{H_{xx}}. \quad (14)$$

将式(13)和式(14)代入式(12)得

$$H_t + (a - br)H_r + \alpha(\delta - l)H_l + 0.5\sigma_r^2H_{rr} +$$

$$(xr + \theta_1 u)H_x + 0.5\sigma_L^2 l H_{ll} - \frac{\theta_2^2 u^2}{2v^2} \cdot \frac{H_x^2}{H_{xx}} - \sigma_r^2 \frac{(H_{xr} - \lambda_r H_x)^2}{2H_{xx}} - l \frac{(\lambda_s H_x + \sigma_L H_{xl})^2}{2H_{xx}} = 0, \tag{15}$$

其边界条件为 $H(T, r, l, x) = U(x)$.

指数效用下, 式(15)的解可假设具有如下结构:

$$H(t, r, l, x) = -e^{-mf(t,r)(x-g(t,r))+K(t,r,l)}/m, \tag{16}$$

其中边界条件为

$$f(T, r) = 1, g(T, r) = 0, K(T, r, l) = 0. \tag{17}$$

将式(16)代入方程(15), 分离变量后可以得到如下3个方程:

$$\begin{cases} f_t + rf + (a - br + \lambda_r \sigma_r^2) f_r + \\ 0.5\sigma_r^2 (f_{rr} - 2f_r^2/f) = 0, \\ f(T, r) = 1, \end{cases} \tag{18}$$

$$\begin{cases} g_t - rg + (a - br + \lambda_r \sigma_r^2) g_r + \\ 0.5\sigma_r^2 g_{rr} - \theta_1 u = 0, \\ g(T, r) = 0; \end{cases} \tag{19}$$

$$\begin{cases} K_t + (a - br + \lambda_r \sigma_r^2) K_r + \lambda_r \sigma_r^2 \frac{f_r}{f} + \\ (\alpha\delta - \alpha l - \lambda_s \sigma_L l) K_l + \frac{1}{2} \sigma_r^2 (K_{rr} - \\ 2K_r \frac{f_r}{f} - \frac{f_r^2}{f^2}) + \frac{1}{2} \sigma_L^2 l K_{ll} - \frac{1}{2} (\lambda_r^2 \sigma_r^2 + \\ \lambda_s^2 l + \frac{\theta_2^2 u^2}{v^2}) = 0, \\ K(T, r, l) = 0. \end{cases} \tag{20}$$

引理 1 假设方程(18)的解具有结构 $f(t, r) = e^{A_1(t)+A_2(t)r}$, 且有 $A_1(T) = 0$ 和 $A_2(T) = 0$, 则 $A_1(t)$ 和 $A_2(t)$ 可分别表示为

$$A_1(t) = -\frac{k_2}{k_1}((T-t) - A_2(t)) + \frac{ak_1 + bk_2}{k_1} \int_t^T A_2(s) ds, \tag{21}$$

$$A_2(t) = \frac{n_1 n_2 (1 - e^{\sqrt{\Delta_1}(T-t)})}{n_1 - n_2 e^{\sqrt{\Delta_1}(T-t)}}, \tag{22}$$

其中:

$$\Delta_1 = (\lambda_r k_1 - b)^2 + 2k_1 > 0, n_{1,2} = \frac{\lambda_r k_1 - b}{k_1} \pm \frac{\sqrt{\Delta_1}}{k_1}.$$

证 将 $f(t, r) = e^{A_1(t)+A_2(t)r}$ 代入式(18), 分离变量后, 得到下列两个常微分方程:

$$A_1'(t) + 1 + (\lambda_r k_1 - b)A_2(t) - 0.5k_1 A_2^2(t) = 0, \tag{23}$$

$$A_1'(t) + (a + \lambda_r k_2)A_2(t) - 0.5k_2 A_2^2(t) = 0. \tag{24}$$

证毕.

解方程(23)得到式(22). 执行步骤(24) $\times k_1 - (23) \times k_2$, 解方程得到式(21).

方程(19)在随机利率环境下的各种投资问题中比较常见, 这类方程直接求解比较困难. 这里, 本文将其转化为另一类方程, 该方程比较容易求解. 其求解过程可表达为如下的引理2和引理3.

引理 2 将方程(19)的解假设成 $g(t, r) = -\theta_1 u \cdot$

$\int_t^T \hat{g}(s, r) ds$, 则 $\hat{g}(t, r)$ 满足下列方程:

$$\begin{cases} \hat{g}_t - r\hat{g} + (a - br + \lambda_r \sigma_r^2) \hat{g}_r + \\ 0.5\sigma_r^2 \hat{g}_{rr} = 0, \\ \hat{g}(T, r) = 1. \end{cases} \tag{25}$$

证 定义如下的微分算子:

$$\nabla g(t, r) = -rg + (a - br + \lambda_r \sigma_r^2) g_r + 0.5\sigma_r^2 g_{rr},$$

那么, 方程(19)可以写成

$$g_t + \nabla g(t, r) - \theta_1 u = 0. \tag{26}$$

另一方面, 本文发现

$$g_t = -\theta_1 u \left(\int_t^T \hat{g}_s ds - \hat{g}(T, r) \right), \tag{27}$$

$$\nabla g(t, r) = -\theta_1 u \int_t^T \nabla \hat{g}(s, r) ds. \tag{28}$$

将式(27)和式(28)代入方程(26)得到

$$-\theta_1 u \left(\int_t^T (\hat{g}_s + \nabla \hat{g}(s, r)) ds - \hat{g}(T, r) + 1 \right) = 0,$$

因此, 有

$$\hat{g}_t + \nabla \hat{g}(t, r) = 0, \hat{g}(T, r) = 1.$$

故方程(25)成立. 证毕.

引理 3 假设方程(25)的解具有结构 $\hat{g}(t, r) = e^{C_1(t)+C_2(t)r}$, 且有 $C_1(T) = 0$ 和 $C_2(T) = 0$, 则 $C_1(t)$ 和 $C_2(t)$ 可分别表示为

$$C_1(t) = \frac{k_2}{k_1}((T-t) + C_2(t)) + \frac{ak_1 + bk_2}{k_1} \int_t^T C_2(s) ds, \tag{29}$$

$$C_2(t) = \frac{n_3 n_4 (1 - e^{\sqrt{\Delta_2}(T-t)})}{n_3 - n_4 e^{\sqrt{\Delta_2}(T-t)}}, \tag{30}$$

其中

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= (\lambda_r k_1 - b)^2 + 2k_1 > 0, \\ n_{3,4} &= \frac{\lambda_r k_1 - b}{-k_1} \pm \frac{\sqrt{\Delta_2}}{-k_1}. \end{aligned} \tag{31}$$

证 将 $\hat{g}(t, r) = e^{C_1(t)+C_2(t)r}$ 代入方程(25), 分离变量后, 得到下列两个方程:

$$C_2'(t) - 1 + (\lambda_r k_1 - b)C_2(t) + 0.5k_1 C_2^2(t) = 0, \tag{32}$$

$$C_1'(t) + (a + \lambda_r k_2)C_2(t) + 0.5k_2 C_2^2(t) = 0, \tag{33}$$

证毕.

解方程(32)得到式(30). 通过步骤(33) $\times k_1 - (32) \times k_2$, 积分后可以求得式(29).

引理 4 假设方程(20)的解具有结构 $K(t, r, l) = D_1(t) + D_2(t)r + D_3(t)l$ 且有 $D_1(T) = 0, D_2(T) = 0$ 和 $D_3(T) = 0$, 则 $D_1(t), D_2(t)$ 和 $D_3(t)$ 可分别表示如下:

$$D_1(t) = -\frac{\theta_2^2 u^2}{2v^2}(T-t) + \frac{k_2}{k_1} D_2(t) + \frac{ak_1 + bk_2}{k_1} \int_t^T D_2(s) ds + \alpha\delta \int_t^T D_3(s) ds, \tag{34}$$

$$D_2(t) = -\frac{k_1}{2} \int_t^T (A_2(s) - \lambda_r)^2 e^{\int_t^s (k_1 \lambda_r - b - k_1 A_2(z)) dz} ds, \tag{35}$$

$$D_3(t) = \frac{\lambda_s^2}{2(\alpha + \lambda_s \sigma_L)} (e^{-(\alpha + \lambda_s \sigma_L)(T-t)} - 1). \tag{36}$$

证 将 $K(t, r, l) = D_1(t) + D_2(t)r + D_3(t)l$ 代入方程(20), 消除对变量 r 和 l 的依赖, 得到如下3个常微分方程:

$$D_3'(t) - (\alpha + \lambda_s \sigma_L) D_3(t) - 0.5\lambda_s^2 = 0, \tag{37}$$

$$D_2'(t) + (k_1 \lambda_r - b - k_1 A_2(t)) D_2(t) - 0.5k_1 (A_2(t) - \lambda_r)^2 = 0, \tag{38}$$

$$D_1'(t) + (a + k_2 \lambda_r - k_2 A_2(t)) D_2(t) + \alpha\delta D_3(t) - \frac{1}{2} k_2 (A_2(t) - \lambda_r)^2 - \frac{\theta_2^2 u^2}{2v^2} = 0. \tag{39}$$

求解方程(37)–(38)可得式(35)–(36). 应用(39) $\times k_1 - (38) \times k_2$, 解方程可得式(34).

根据式(16)和其各阶偏导数, 可以得到

$$\frac{H_x}{H_{xx}} = -\frac{1}{mf}, \quad \frac{H_{xl}}{H_{xx}} = -\frac{1}{mf} D_3(t),$$

$$\frac{H_{xr}}{H_{xx}} = A_2(t)(x-g) - g_r - \frac{1}{mf} (D_2(t) + A_2(t)).$$

因此, 由式(13)可得最优再保险策略为 $q^*(t) = \frac{\theta_2 u}{mv^2} f^{-1}(t, r)$. 考虑到 $q^*(t)$ 应该满足条件 $q(t) > q_0$: $= 1 - \frac{\theta_0}{\theta_2}$, 故有 $m < \frac{\theta_2^2 u}{v^2(\theta_2 - \theta_0)} f^{-1}(t, r)$.

综上所述, 问题(10)的最优再保险–投资策略可以表达如下:

定理 1 假设效用函数为 $U(x) = -e^{-mx}/m$,

$m > 0$ 为风险厌恶因子, 则在条件 $0 < m <$

$\frac{\theta_2^2 u}{v^2(\theta_2 - \theta_0)} f^{-1}(t, r)$ 下, 问题(10)的最优再保险–投

资策略可表达为

$$\begin{cases} q^*(t) = \frac{\theta_2 u}{mv^2} f^{-1}(t, r), \\ \mu_s^*(t) = \frac{1}{m} (\lambda_s + \sigma_L D_3(t)) f^{-1}(t, r), \\ \mu_B^*(t) = \frac{1}{m\varphi_1(t)} (\lambda_r - \lambda_s \sigma_s - \sigma_L \sigma_s D_3(t) - D_2(t) - A_2(t)) f^{-1}(t, r) + \frac{1}{\varphi_1(t)} (A_2(t)(X(t) - g(t, r)) - g_r), \end{cases} \tag{40}$$

其中: $f(t, r)$ 和 $g(t, r)$ 分别由引理1–3所确定, $A_2(t), D_2(t)$ 和 $D_3(t)$ 分别由式(22)(35)和式(36)所确定, 且

$$g_r = \frac{\partial g(t, r)}{\partial r} = -\theta_1 u \int_t^T C_2(s) e^{C_1(s) + C_2(s)r} ds.$$

注 4 从定理1可以看出最优再保险–投资策略与保险市场参数以及金融市场参数的相关性: i) 最优再保险策略 $q^*(t)$ 不仅依赖于保险市场参数 θ_2, u, v , 而且依赖于金融市场参数 $a, b, k_1, k_2, \lambda_r$ 以及风险厌恶因子 m , 而与其他参数无关; ii) $\mu_s^*(t)$ 仅与金融市场参数 $a, b, k_1, k_2, \lambda_r, \lambda_s, \alpha, \sigma_L$ 以及风险厌恶因子 m 有关, 而与保险市场参数 θ_0, θ_2, u, v 及其他市场参数无关; iii) $\mu_B^*(t)$ 不仅依赖于保险市场参数 θ_0, θ_2, u , 而且依赖于金融市场参数 $a, b, k_1, k_2, \sigma_s, \lambda_r, \lambda_s, \alpha, \sigma_L$ 以及风险厌恶因子 m .

注 5 观察式(40)和式(41), 很容易得出如下一些结论: i) 最优再保险策略 $q^*(t)$ 关于参数 θ_2 和 u 递增, 而关于参数 m 和 v 递减; ii) 经观察和计算, 本文发现: $A_2(t) = \varphi_1(t), A_1(t) = -\varphi_0(t), A_2(t) = -C_2(t), A_1(t) = -C_1(t)$. 因而本文得到 $f^{-1}(t, r) = B(t, T), \hat{g}(t, r) = B(t, T)$. 这表明: $q^*(t)$ 和 $\mu_s^*(t)$ 仅依赖于时刻 t 的债券价格 $B(t, T)$, 而 $\mu_B^*(t)$ 不仅依赖于时刻 t 的债券价格 $B(t, T)$, 而且依赖于时刻 t 的财富过程 $X(t)$; iii) $q^*(t), \mu_s^*(t)$ 和 $\mu_B^*(t)$ 都与波动率动态 $L(t)$ 无关. 这意味着最优再保险–投资策略 ($q^*(t), \mu_s^*(t), \mu_B^*(t)$) 都依赖于债券价格过程 $B(t, T)$, 而 $B(t, T)$ 由利率动态所驱动. 因而, 随机利率与随机波动率模型下的最优再保险–投资策略与利率动态密切相关, 而与波动率动态无关.

如果不考虑再保险和盈余过程, 问题(10)退化为随机利率与随机波动率模型下的动态资产分配问题. 重复上述推导过程, 可以得到 $g(t, r) = 0$ 和 $g_r = 0$. 因而, 指数效用下问题(10)的最优投资策略为

$$\begin{cases} \mu_s^*(t) = \frac{1}{m} (\lambda_s + \sigma_L D_3(t)) f^{-1}(t, r), \\ \mu_B^*(t) = \frac{1}{m\varphi_1(t)} (\lambda_r - \lambda_s \sigma_s - \sigma_L \sigma_s D_3(t) - \end{cases} \tag{42}$$

$$D_2(t) - A_2(t))f^{-1}(t, r) + \frac{1}{\varphi_1(t)}A_2(t)X(t), \quad (43)$$

且价值函数 $H(t, r, l, x)$ 可以表示为

$$H(t, r, l, x) = -e^{-mxf(t,r)+\bar{K}(t,r,l)}/m, \quad (44)$$

其中:

$$f(t, r) = e^{A_1(t)+A_2(t)r},$$

$$\bar{K}(t, r, l) = \bar{D}_1(t)+D_2(t)r + D_3(t)l,$$

$A_1(t)$ 和 $A_2(t)$ 分别由式(21)和式(22)所确定、 $D_2(t)$ 和 $D_3(t)$ 分别仍然由式(35)和式(36)所确定, 而 $\bar{D}_1(t)$ 应表达为

$$\bar{D}_1(t) = \frac{k_2}{k_1}D_2(t) + \frac{ak_1 + bk_2}{k_1} \int_t^T D_2(s)ds + \alpha\delta \int_t^T D_3(s)ds. \quad (45)$$

和定理1的结论相比, $\mu_s^*(t)$ 不变, 而 $\mu_B^*(t)$ 则发生了较大的变化. 由此可见, 再保险行为和盈余过程对保险公司的投资决策会产生较大的影响.

4 最优比例再保险和投资策略

如果本文将 $q^*(t)$ 限制为比例再保险, 即满足条件 $q^*(t) \in [0, 1]$. 考虑到 $q(t) > q_0 := 1 - \frac{\theta_0}{\theta_2}$, 故 $q^*(t)$ 应满足如下条件:

$$1 - \frac{\theta_0}{\theta_2} < q^*(t) = \frac{\theta_2 u}{mv^2} f^{-1}(t, r) < 1 \Rightarrow$$

$$\frac{\theta_2 u}{v^2} f^{-1}(t, r) < m < \frac{\theta_2^2 u}{v^2(\theta_2 - \theta_0)} f^{-1}(t, r).$$

因此本文可以讨论如下

i) 当 $\frac{\theta_2 u}{v^2} f^{-1}(t, r) < m < \frac{\theta_2^2 u}{v^2(\theta_2 - \theta_0)} f^{-1}(t, r)$ 时,

$$q^*(t) = \frac{\theta_2 u}{mv^2} f^{-1}(t, r) \in (0, 1), \quad (46)$$

此时, 问题(10)的最优投资策略由式(40)–(41)确定.

ii) 当 $0 < m < \frac{\theta_2 u}{v^2} f^{-1}(t, r)$ 时, $q^*(t) = 1$. 即发生赔付时, 保额完全由保险公司承担, 再保险公司不再承担任何保额. 这种情形下保险公司的财富过程为

$$dX(t) = [X(t)r(t) + \mu_B(t)\varphi_1(t)\lambda_r\sigma_r^2 + \mu_s(t)(\lambda_r\sigma_s\sigma_r^2 + \lambda_sL(t)) + \theta_0u]dt + (\mu_s(t)\sigma_s\sigma_r + \mu_B(t)\varphi_1(t)\sigma_r)dW_r(t) + \mu_s(t)\sqrt{L(t)}dW_s(t) + vdW_R(t), \quad (47)$$

式(15)转变为

$$H_t + (a - br)H_r + 0.5\sigma_r^2H_{rr} + \alpha(\delta - l)H_l + (xr + \theta_0u)H_x + 0.5v^2H_{xx} + 0.5\sigma_L^2lH_{ll} - \sigma_r^2\frac{(H_{xr} - \lambda_rH_x)^2}{2H_{xx}} - l\frac{(\lambda_sH_x + \sigma_LH_{xl})^2}{2H_{xx}} = 0. \quad (48)$$

式(48)的解可假设如下:

$$H(t, r, l, x) = -e^{-mf(t,r)(x-G(t,r))+\bar{K}(t,r,l)}/m. \quad (49)$$

将式(49)代入式(48), 分离变量后解方程可得 $f(t, r) = e^{A_1(t)+A_2(t)r}$, 和引理1的结论一致; $\bar{K}(t, r, l) = \bar{D}_1(t)+D_2(t)r+D_3(t)l$, 其中 $\bar{D}_1(t)$, $D_2(t)$ 和 $D_3(t)$ 仍然分别由式(45)(35)和式(36)所确定, 而 $G(t, r)$ 满足下列方程:

$$\begin{cases} G_t - rG + (a - br + \lambda_r\sigma_r^2)G_r + 0.5\sigma_r^2G_{rr} - \theta_0u + 0.5v^2mf = 0, \\ G(T, r) = 0. \end{cases} \quad (50)$$

因为含有 $-\theta_0u + 0.5v^2mf$, 因此方程(50)不再是一种齐次的偏微分方程. 受Liu^[17]和Yao等^[26]工作的启发, 运用偏微分方程理论的齐次化方法, 本文发现方程(50)的解可由下列两个关于 $\hat{g}(t, r)$ 和 $\tilde{g}(t, r; \tau)$ 的偏微分方程的解来表示, 其中 $\tau (\tau \leq T)$ 为参数.

$$\begin{cases} \hat{g}_t - r\hat{g} + (a - br + \lambda_r\sigma_r^2)\hat{g}_r + 0.5\sigma_r^2\hat{g}_{rr} = 0, \\ \hat{g}(T, r) = 1, \end{cases} \quad (51)$$

$$\begin{cases} \tilde{g}_t - r\tilde{g} + (a - br + \lambda_r\sigma_r^2)\tilde{g}_r + 0.5\sigma_r^2\tilde{g}_{rr} = 0, \\ \tilde{g}(\tau, r; \tau) = 0.5v^2me^{A_1(\tau)+A_2(\tau)r}. \end{cases} \quad (52)$$

因此, 本文有下列结论:

引理 5 假设 $\hat{g} = \hat{g}(t, r)$ 和 $\tilde{g} = \tilde{g}(t, r; \tau)$ 分别是方程(51)和(52)的解, 则方程(50)的解可表达为

$$G = G(t, r) = -\theta_0u \int_t^T \hat{g}(s, r)ds + \int_t^T \tilde{g}(t, r; \tau)d\tau. \quad (53)$$

证 根据式(53)得到

$$G(T, r) = -\theta_0u \int_T^T \hat{g}(s, r)ds + \int_T^T \tilde{g}(T, r; \tau)d\tau = 0,$$

因此式(53)满足方程(50)的边界条件. 进一步, 有

$$G_t = -\theta_0u \left(\int_t^T \hat{g}_s(s, r)ds - \hat{g}(T, r) \right) - \tilde{g}(t, r; t) + \int_t^T \tilde{g}_t(t, r; \tau)d\tau, \quad (54)$$

$$\begin{cases} G_r = -\theta_0 u \int_t^T \hat{g}_r(s, r) ds + \int_t^T \tilde{g}_r(t, r; \tau) d\tau, & \int_t^T e^{\tilde{C}_1(t; \tau) + \tilde{C}_2(t; \tau)r} d\tau, \\ G_{rr} = -\theta_0 u \int_t^T \hat{g}_{rr}(s, r) ds + \int_t^T \tilde{g}_{rr}(t, r; \tau) d\tau. & G_r = -\theta_0 u \int_t^T C_2(s) e^{C_1(s) + C_2(s)r} ds + \\ & \int_t^T \tilde{C}_2(t; \tau) e^{\tilde{C}_1(t; \tau) + \tilde{C}_2(t; \tau)r} d\tau. \end{cases} \quad (55)$$

将式(53)–(55)代入方程(50)的左边, 考虑到 $\tilde{g}(t, r; t) = 0.5v^2 m e^{A_1(t) + A_2(t)r}$, 本文得到

$$\begin{aligned} & -\theta_0 u \left(\int_t^T (\hat{g}_s(s, r) + (a - br + \lambda_r \sigma_r^2) \hat{g}_r(s, r) - \right. \\ & \left. r \hat{g}(s, r) + 0.5 \sigma_r^2 \hat{g}_{rr}(s, r)) ds - \hat{g}(T, r) + 1 \right) + \\ & \int_t^T (\tilde{g}_t(t, r; \tau) + (a - br + \lambda_r \sigma_r^2) \tilde{g}_r(t, r; \tau) - \\ & \left. r \tilde{g}(t, r; \tau) + 0.5 \sigma_r^2 \tilde{g}_{rr}(t, r; \tau)) d\tau = 0. \end{aligned}$$

因此, 式(53)是方程(50)的解.

方程(51)的解如引理3所示. 方程(52)的解可假设如下:

$$\tilde{g}(t, r; \tau) = e^{\tilde{C}_1(t; \tau) + \tilde{C}_2(t; \tau)r}, \quad (56)$$

其中边界条件为

$$\tilde{C}_1(\tau; \tau) = \ln(0.5v^2 m) + A_1(\tau), \quad \tilde{C}_2(\tau; \tau) = A_2(\tau).$$

将式(56)代入方程(52), 分离变量后解方程可得

$$\begin{aligned} \tilde{C}_1(t; \tau) &= \ln(0.5v^2 m) + A_1(\tau) + \frac{k_2}{k_1}(\tau - t) - \\ & \frac{k_2}{k_1}(A_2(\tau) - \tilde{C}_2(t; \tau)) + \\ & \frac{ak_1 + bk_2}{k_1} \int_t^\tau \tilde{C}_2(s; \tau) ds, \end{aligned} \quad (57)$$

$$\begin{aligned} \tilde{C}_2(t; \tau) &= \\ & \frac{(A_2(\tau) - n_3) n_4 - e^{\sqrt{\Delta_2}(\tau-t)} (A_2(\tau) - n_4) n_3}{A_2(\tau) - n_3 - e^{\sqrt{\Delta_2}(\tau-t)} (A_2(\tau) - n_4)}. \end{aligned} \quad (58)$$

综上所述, 当不考虑再保险行为时, 即 $q(t) = 1$ 时, 指数效用下问题(10)的最优投资策略可表达为

$$\mu_s^*(t) = \frac{1}{m} (\lambda_s + \sigma_L D_3(t)) f^{-1}(t, r), \quad (59)$$

$$\begin{aligned} \mu_B^*(t) &= \frac{1}{m\varphi_1(t)} (\lambda_r - \lambda_s \sigma_s - \sigma_L \sigma_s D_3(t) - \\ & D_2(t) - A_2(t)) f^{-1}(t, r) + \\ & \frac{1}{\varphi_1(t)} (A_2(t)(X(t) - G(t, r)) - G_r), \end{aligned} \quad (60)$$

其中: $f(t, r)$ 由引理1所确定, $A_2(t)$, $D_2(t)$ 和 $D_3(t)$ 分别由式(22)(35)和式(36)所确定且

$$G = -\theta_0 u \int_t^T e^{C_1(s) + C_2(s)r} ds +$$

从式(59)和式(60)可以看出: 当不考虑再保险时, 投资于股票的数量 $\mu_s^*(t)$ 不变, 而投资于零息票债券的数量 $\mu_B^*(t)$ 则发生了较大的变化.

iii) 当 $m > \frac{\theta_2^2 u}{v^2(\theta_2 - \theta_0)} f^{-1}(t, r)$ 时, $q^*(t) = 1 - \frac{\theta_0}{\theta_2}$. 这种情形下, 式(15)转变为

$$\begin{aligned} & H_t + (a - br)H_r + \alpha(\delta - l)H_l + rxH_x + \\ & 0.5v^2(1 - \theta_0/\theta_2)^2 H_{xx} + 0.5(\sigma_r^2 H_{rr} + \sigma_L^2 l H_{ll}) - \\ & \sigma_r^2 \frac{(H_{xr} - \lambda_r H_x)^2}{2H_{xx}} - l \frac{(\lambda_s H_x + \sigma_L H_{xl})^2}{2H_{xx}} = 0. \end{aligned} \quad (61)$$

式(61)的解可假设如下:

$$H(t, r, l, x) = -e^{-mf(t, r)(x - \bar{G}(t, r)) + \bar{K}(t, r, l)} / m, \quad (62)$$

其中: $f(t, r) = e^{A_1(t) + A_2(t)r}$, 和引理1的结论一致; $\bar{K}(t, r, l) = \bar{D}_1(t) + D_2(t)r + D_3(t)l$, 其中 $\bar{D}_1(t)$, $D_2(t)$ 和 $D_3(t)$ 仍然分别由式(45)(35)和式(36)所确定, 而 $\bar{G}(t, r)$ 满足下列方程:

$$\begin{cases} \bar{G}_t - r\bar{G} + (a - br + \lambda_r \sigma_r^2) \bar{G}_r + \\ 0.5 \sigma_r^2 \bar{G}_{rr} + 0.5v^2 (1 - \theta_0/\theta_2)^2 m f = 0, \\ \bar{G}(T, r) = 0. \end{cases} \quad (63)$$

根据方程(50)的解法, 本文可得方程(63)的解如下:

$$\begin{aligned} \bar{G} &= \bar{G}(t, r) = \int_t^T \bar{g}(t, r; \tau) d\tau, \\ \bar{g}(t, r; \tau) &= e^{\bar{C}_1(t; \tau) + \bar{C}_2(t; \tau)r}, \\ \bar{C}_1(t; \tau) &= \\ & \ln(0.5mv^2(1 - \theta_0/\theta_2)^2) + A_1(\tau) + \\ & \frac{k_2}{k_1}(\tau - t) - \frac{k_2}{k_1}(A_2(\tau) - \bar{C}_2(t; \tau)) + \\ & \frac{ak_1 + bk_2}{k_1} \int_t^\tau \bar{C}_2(s; \tau) ds, \\ \bar{C}_2(t; \tau) &= \\ & \frac{(A_2(\tau) - n_3) n_4 - e^{\sqrt{\Delta_2}(\tau-t)} (A_2(\tau) - n_4) n_3}{A_2(\tau) - n_3 - e^{\sqrt{\Delta_2}(\tau-t)} (A_2(\tau) - n_4)}. \end{aligned} \quad (64)$$

(65)

故当 $q^*(t) = 1 - \frac{\theta_0}{\theta_2}$ 时, 问题(10)的最优投资策略可表达为

$$\mu_s^*(t) = \frac{1}{m} (\lambda_s + \sigma_L D_3(t)) f^{-1}(t, r), \quad (66)$$

$$\begin{aligned} \mu_B^*(t) = & \frac{1}{m\varphi_1(t)} (\lambda_r - \lambda_s \sigma_s - \sigma_L \sigma_s D_3(t) - \\ & D_2(t) - A_2(t)) f^{-1}(t, r) + \\ & \frac{1}{\varphi_1(t)} (A_2(t)(X(t) - \bar{G}(t, r)) - \bar{G}_r), \end{aligned} \quad (67)$$

其中:

$$\bar{G} = \bar{G}(t, r) = \int_t^T e^{\bar{C}_1(t;\tau) + \bar{C}_2(t;\tau)r} d\tau,$$

$$\bar{G}_r = \int_t^T \bar{C}_2(t;\tau) e^{\bar{C}_1(t;\tau) + \bar{C}_2(t;\tau)r} d\tau.$$

从式(66)和式(67)可以看出: 当 $q^*(t) = 1 - \theta_0/\theta_2$ 时, 投资于股票的数量 $\mu_s^*(t)$ 不变, 而投资于零息票债券的数量 $\mu_B^*(t)$ 也发生了较大的变化.

5 算例分析

本节运用算例分析最优投资策略和最优再保险策略随参数变化的灵敏度. 不失一般性, 本文假设各参数取值如下:

$$\begin{aligned} \theta_0 &= 0.15, \theta_2 = 0.25, u = 5, v = 1.5, \\ a &= 0.018712, b = 0.2339, k_2 = 0.36, \\ k_1 &= 0.00729316, r(0) = 0.05, \\ \sigma_s &= 0.84, \lambda_r = 0.16, \lambda_s = 0.64, \\ \alpha &= 0.2, \delta = 0.6, \sigma_L = 0.4, \\ t &= 0, T = 2, x_0 = 100, \end{aligned}$$

其中参数 a, b, k_1 的值来源于Deelstra等^[22]的工作.

当 $m = 0.02$ 时, 最优投资策略随主要参数变化的灵敏度如图1-6所示, 从中可以得出如下结论:

1) $\mu_s^*(t)$ 关于参数 b 递减, $\mu_B^*(t)$ 关于参数 b 先递增后递减, 而 $\mu_0^*(t)$ 关于参数 b 先递减后递增. 从方程(5)来看, 当参数 b 增大时, 利率的期望值变小. 这时, 股票、零息票债券和无风险资产的收益率都将递减. 因

投资股票有风险, 为了分散风险, 保险公司投资于股票的数量将递减, 而投资于零息票债券和无风险资产的数量将递增. 当参数 b 较小时, 零息票债券的收益率大于无风险资产的收益率, 这时投资于零息票债券的数量将递增, 而投资于无风险资产的数量将递减. 随着 b 的增大, 利率的期望值将越来越小, 越过某一临界值之后, 零息票债券的收益率将小于无风险资产的收益率, 这时保险公司投资于零息票债券的数量将递减, 而将更多资金投资于无风险资产.

2) $\mu_s^*(t)$ 和 $\mu_0^*(t)$ 关于参数 k_1 递减, 而 $\mu_B^*(t)$ 关于参数 k_1 递增. 从方程(5)来看, 参数 k_1 的值决定着利率波动率的大小. 当参数 k_1 递增, 利率的波动率将递增, 因而由利率波动引起的股市波动也将递增, 为了规避风险, 保险公司投资于股票和无风险资产的数量都将越来越少; 同时, 将更多资金投资于零息票债券.

3) $\mu_s^*(t)$ 关于参数 α 递增, 而 $\mu_B^*(t)$ 和 $\mu_0^*(t)$ 关于参数 α 递减. 从方程(7)来看, 当参数 α 递增时, 波动率 $L(t)$ 的期望值将越来越小, 这意味着股票的波动率将越来越小, 这时, 保险公司应将更多资金投资于股票, 而将较小资金投资于零息票债券和无风险资产.

4) $\mu_s^*(t)$ 关于参数 σ_L 递减, 而 $\mu_B^*(t)$ 和 $\mu_0^*(t)$ 关于参数 σ_L 递增. 从方程(7)来看, 参数 σ_L 的值增大, 意味着股市的波动风险将增大, 为了规避风险, 保险公司应将较少资金投资于股票, 而将较多资金投资于零息票债券和无风险资产.

5) $\mu_s^*(t)$ 和 $\mu_0^*(t)$ 关于参数 λ_r 递减, 而 $\mu_B^*(t)$ 关于参数 λ_r 递增. 当参数 λ_r 的值增大时, 利率风险的市场价格 $\lambda_r \sqrt{k_1 r(t) + k_2}$ 将增大, 这意味着保险公司应将更多资金投资于零息票债券, 而将较少资金投资于股票和无风险资产.

6) $\mu_s^*(t)$ 和 $\mu_0^*(t)$ 关于参数 m 递减, 而 $\mu_B^*(t)$ 关于参数 m 递增. 当参数 m 递增时, 保险公司将越来越厌恶风险, 这时保险公司应逐步减少投资于股票和无风险资产的数量, 而逐步增加投资于零息票债券的数量.

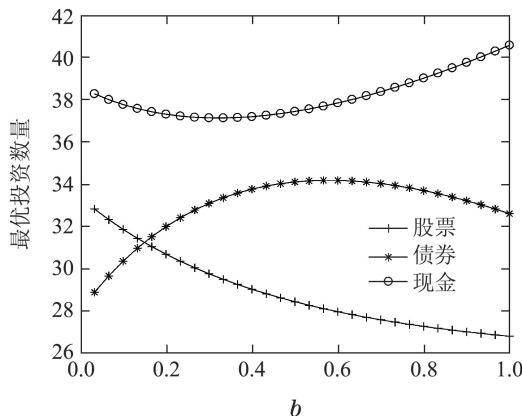


图 1 参数 b 对最优投资策略的影响

Fig. 1 The effect of b on the optimal portfolios

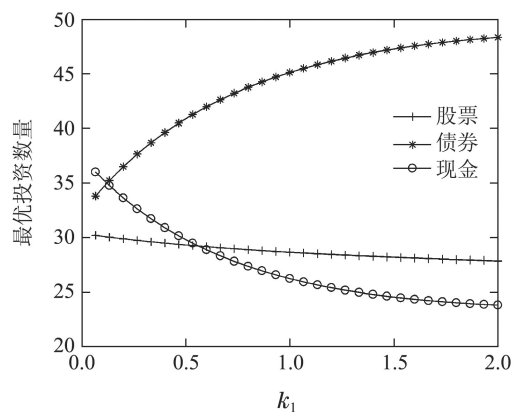


图 2 参数 k_1 对最优投资策略的影响

Fig. 2 The effect of k_1 on the optimal portfolios

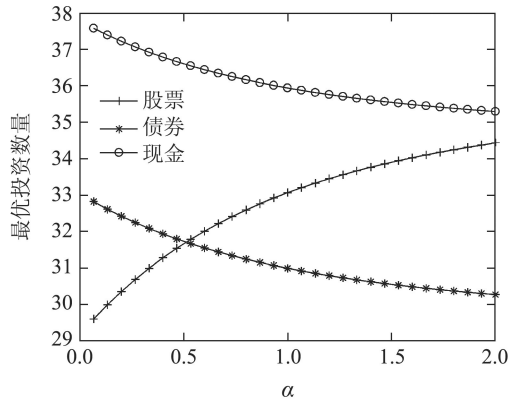


图3 参数 α 对最优投资策略的影响

Fig. 3 The effect of α on the optimal portfolios

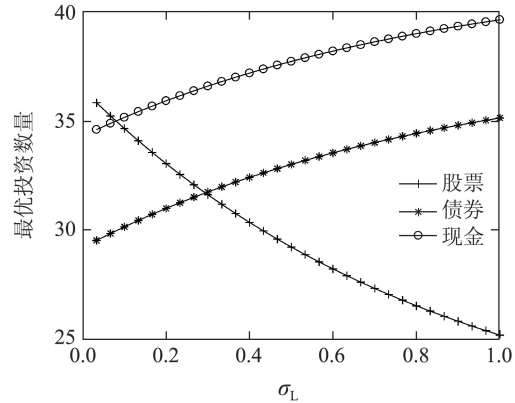


图4 参数 σ_L 对最优投资策略的影响

Fig. 4 The effect of σ_L on the optimal portfolios

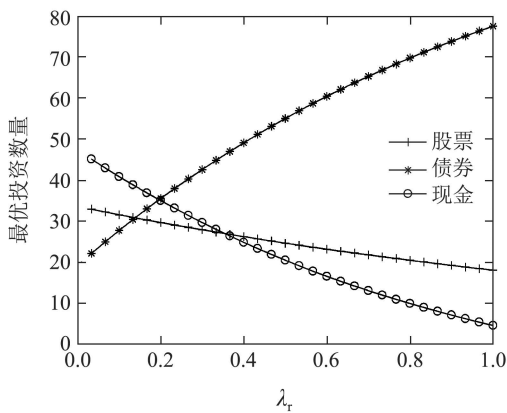


图5 参数 λ_r 对最优投资策略的影响

Fig. 5 The effect of λ_r on the optimal portfolios

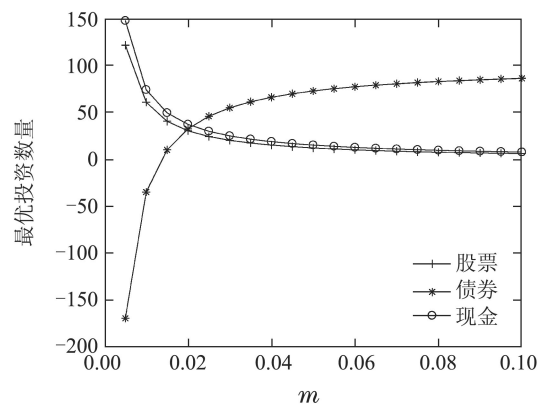


图6 参数 m 对最优投资策略的影响

Fig. 6 The effect of m on the optimal portfolios

当 $m = 1$ 时, 最优再保险策略随参数变化的灵敏度如图7-10, 从中可以得出如下结论:

1) $q^*(t)$ 关于参数 b 递减. 当参数 b 增大时, 利率的期望值变小, 这意味着保险公司的财富将越来越少, 这时保险公司面临的破产概率将越来越大. 为了降低破产概率, 保险公司应该向再保险公司购买更多的再保险, 即 $1 - q^*(t)$ 增大. 因此当保额发生时, 保险公司承担的保额 $q^*(t)$ 将越来越小.

2) $q^*(t)$ 关于参数 k_1 递减. 当参数 k_1 的值增大时, 说明利率波动较大, 因而利率风险随之增大. 这种情况下, 保险公司面临的利率风险也将随之增大. 为了分散利率风险, 保险公司将向再保险公司购买更多的再保险. 因而当保额发生时, 再保险公司将承担更多的保额, 即 $1 - q^*(t)$ 增大, 而保险公司自身承担较少的保额, 即 $q^*(t)$ 变小.

3) $q^*(t)$ 关于参数 λ_r 递减. 当参数 λ_r 的值增大时, 根据上面的结论, 投资于股票和银行账户的资金减少, 而投资于零息票债券的资金增多. 这意味着保险公司的财富将越来越少. 为了降低保险风险, 保险公司需要向再保险公司购买更多的再保险, 即 $1 - q^*(t)$ 增大. 当保额发生时, 再保险公司将承担

更多的保额, 而保险公司承担较少的保额, 即 $q^*(t)$ 变小.

4) $q^*(t)$ 关于参数 m 递减. 当参数 m 增大时, 保险公司的对风险的厌恶程度将增加, 这时的保险公司非常不愿意承担风险, 为了分散其面临的各种风险, 保险公司也会向再保险公司购买更多的再保险, 以便让再保险公司承担更多的保额, 而保险公司承担较少的保额.

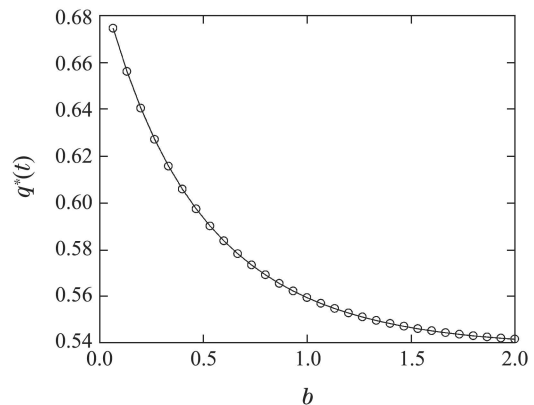
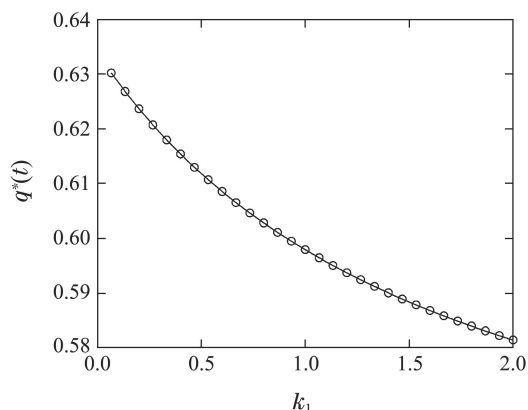
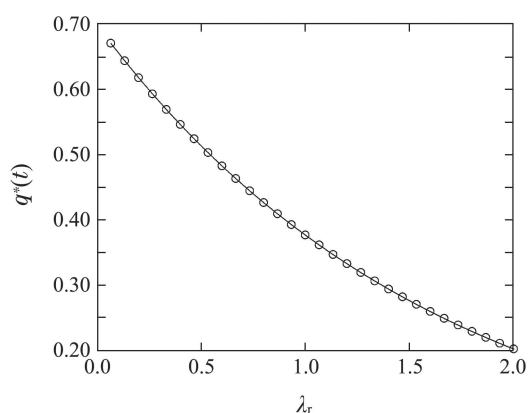
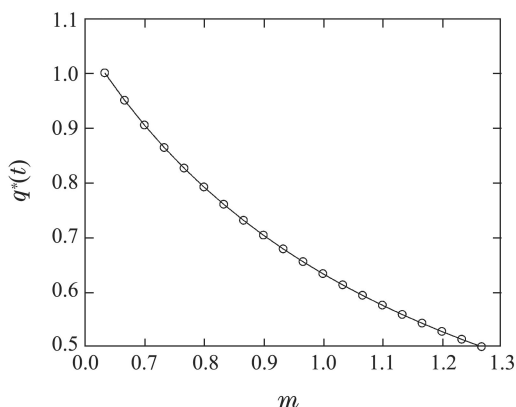


图7 参数 b 对 $q^*(t)$ 的影响

Fig. 7 The effect of b on $q^*(t)$.

图8 参数 k_1 对 $q^*(t)$ 的影响Fig. 8 The effect of k_1 on $q^*(t)$.图9 参数 λ_r 对 $q^*(t)$ 的影响Fig. 9 The effect of λ_r on $q^*(t)$.图10 参数 m 对 $q^*(t)$ 的影响Fig. 10 The effect of m on $q^*(t)$.

6 结论

如何对冲保险风险并有效控制投资风险是保险公司进行风险管理的主要目标. 本文对随机利率和随机波动率模型模型下的再保险-投资问题进行了研究, 运用随机最优控制和HJB方程方法, 得到了指数效用下最优再保险-投资策略的显式解. 算例分析了模型参数对最优再保险策略和最优投资策略的影响. 理论研究结果表明: i) 最优再保险策略不仅依

赖于保险市场参数, 而且依赖于金融市场参数; 投资于股票的数量仅仅依赖于金融市场参数, 与保险市场参数无关; 投资于零息票债券的数量不仅依赖于金融市场参数, 而且依赖于保险市场参数; ii) 随机利率与随机波动率模型下的最优再保险-投资策略与利率动态密切相关, 而与波动率动态无关; iii) 再保险行为对投资于股票的数量没有影响, 而对投资于零息票债券的数量产生较大的影响.

数值结果表明: i) $q^*(t)$ 关于参数 θ_2 和 u 递增, 而关于参数 b, k_1, λ_r, m 和 v 递减; ii) $\mu_s^*(t)$ 关于参数 α 递增, 而关于参数 $b, k_1, \sigma_L, \lambda_r, m$ 递减; iii) $\mu_B^*(t)$ 关于参数 $k_1, \sigma_L, \lambda_r, m$ 递增, 关于参数 α 递减, 而关于参数 b 先递增后递减; iv) $\mu_0^*(t)$ 关于参数 σ_L 递增, 关于参数 $k_1, \alpha, \lambda_r, m$ 递减, 而关于参数 b 先递减后递增. 这些结论可以为保险公司对冲风险, 实现资产的保值增值, 有效的管理和控制风险提供理论依据.

参考文献:

- [1] BROWNE S. Optimal investment policies for a firm with a random risk process: exponential utility and minimizing probability of ruin. *Mathematics of Operations Research*, 1995, 20(4): 937 - 957.
- [2] WANG N. Optimal investment for an insurer with exponential utility preference. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2007, 40(1): 77 - 84.
- [3] RONG Ximin, FAN Lixin. Insurer's optimal investment strategy under constant elasticity of variance model. *Systems Engineering—Theory & Practice*, 2012, 32(12): 2619 - 2628. (荣喜民, 范立鑫. 常弹性方差模型下保险人的最优投资策略. 系统工程理论与实践, 2012, 32(12): 2619 - 2628.)
- [4] PROMISLOW S, YOUNG V R. Minimizing the probability of ruin when claims follow Brownian motion with drift. *North American Actuarial Journal*, 2005, 9(3): 110 - 128.
- [5] SCHMIDLH. On minimizing the ruin probability by investment and reinsurance. *Annals of Applied Probability*, 2002, 12(3): 890 - 907.
- [6] BI J N, GUO J Y. Optimal mean-variance problem with constrained controls in a jump-diffusion financial market for an insurer. *Journal of Optimization Theory & Applications*, 2013, 157(1): 252 - 275.
- [7] LIANG Z B, BI J N, YUEN K C, et al. Optimal mean-variance reinsurance and investment in a jump-diffusion financial market with common shock dependence. *Mathematical Methods of Operations Research*, 2016, 84(1): 155 - 181.
- [8] GU A L, GUO X P, LI Z F, et al. Optimal control of excess-of-loss reinsurance and investment for insurers under a CEV model. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2012, 51(3): 674 - 684.
- [9] ZHAO H, RONG X M, ZHAO Y G. Optimal excess-of-loss reinsurance and investment problem for an insurer with jump-diffusion risk process under the Heston model. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2013, 53(3): 504 - 514.
- [10] GU Ailing, CHEN Shumin. Optimal excess-of-loss reinsurance and investment strategy under state-dependent utility function. *Operations Research Transactions*, 2016, 20(1): 91 - 104. (谷爱玲, 陈树敏. 状态相依效用下的超额损失再保险-投资策略. 运筹学学报, 2016, 20(1): 91 - 104.)
- [11] LID P, RONG X M, ZHAO H. Optimal reinsurance-investment problem for maximizing the product of the insurer's and the reinsurer's

- utilities under a CEV model. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2014, 255(2): 671 – 683.
- [12] YI B, LI Z F, VIENS F G, et al. Robust optimal control for an insurer with reinsurance and investment under Heston's stochastic volatility model. *Insurance Mathematics & Economics*, 2013, 53(3): 601 – 614.
- [13] LI Z F, ZENG Y, LAI Y Z. Optimal time-consistent investment and reinsurance strategies for insurers under Heston's SV model. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2012, 50(1): 191 – 203.
- [14] ZHAO H, WENG C G, SHEN Y, et al. Time-consistent investment-reinsurance strategies towards joint interests of the insurer and the reinsurer under CEV models. *Science China Mathematics*, 2017, 60(2): 1 – 28.
- [15] GUAN G H, LIANG Z X. Optimal reinsurance and investment strategies for insurer under interest rate and inflation risks. *Insurance Mathematics & Economics*, 2014, 55(1): 105 – 115.
- [16] LI D P, RONG X M, ZHAO H. Time-consistent reinsurance–investment strategy for a mean–variance insurer under stochastic interest rate model and inflation risk. *Insurance Mathematics & Economics*, 2015, 64(1): 28 – 44.
- [17] LIU J. Portfolio selection in stochastic environments. *The Review of Financial Studies*, 2007, 20(1): 1 – 39.
- [18] LI J Z, WU R. Optimal investment problem with stochastic interest rate and stochastic volatility: maximizing a power utility. *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, 2009, 25(3): 407 – 420.
- [19] NOH E J, KIM J H. An optimal portfolio model with stochastic volatility and stochastic interest rate. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2011, 375(2): 510 – 522.
- [20] CHANG H, RONG X M. An investment and consumption problem with CIR interest rate and stochastic volatility. *Abstract and Applied Analysis*, 2013, 2013(1): 1 – 12, <http://dx.doi.org/10.1155/2013/219397>.
- [21] WEI W, FAN S H, CHANG H. Optimal reinsurance and investment problem with stochastic interest rate and stochastic volatility in the mean-variance framework. *WSEAS Transactions on Mathematics*, 2016, 15(2): 226 – 240.
- [22] DEELSTRA G, GRASSELLI M, KOEHL P F. Optimal investment strategies in the presence of a minimum guarantee. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2003, 33(1): 189 – 207.
- [23] GAO J W. Stochastic optimal control of DC pension funds. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2008, 42(3): 1159 – 1164.
- [24] MA Wei, GU Mengdi. Optimal proportional reinsurance and investment under stochastic interest rate. *Journal of Systems & Management*, 2013, 22(2): 274 – 277.
(马威, 顾孟迪. 随机利率下的再保险与投资策略. 系统管理学报, 2013, 22(2): 274 – 277.)
- [25] GUAN G H, LIANG Z X. Optimal management of DC pension plan in a stochastic interest rates and stochastic volatility framework. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2014, 57(1): 58 – 66.
- [26] YAO H X, YANG Z, CHEN P. Markowitz's mean–variance defined contribution pension fund management under inflation: a continuous-time model. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2013, 53(3): 851 – 863.

作者简介:

常浩 博士, 副教授, 目前研究方向为保险精算与养老金投资,

E-mail: ch8683897@126.com;

王春峰 教授, 博士生导师, 目前研究方向为金融工程与风险管理,

E-mail: cfwang@tju.edu.cn;

房振明 副教授, 博士生导师, 目前研究方向为金融工程与风险管理,

E-mail: zmfang@tju.edu.cn.