

不确定性高通量筛选系统的双子代数控制

李丹菁[†], 韦萍

(上海应用技术大学 电气与电子工程学院, 上海 201418)

摘要: 近年来, 对于高通量筛选系统的控制, 在确定性情形下已进行了不少工作, 其中, 双子代数框架下的控制策略执行相对更灵活, 效率更高. 然而, 现有的输出反馈优化控制对性能指标期望系统行为还有特殊的构造要求须满足; 而且, 实际运行中存在有人工干预、设备维护、意外干扰、故障等带来的不确定性. 对这两者考虑的缺失限制了目前高通量筛选系统自动控制的效率. 为进一步提高这类新兴离散事件系统的控制效率, 基于区间双子代数, 将该输出反馈控制结构拓展到系统参数不确定的高通量筛选系统, 使之对不确定性高通量筛选系统能自动产生优化控制. 继而, 将输出反馈与预处理补偿相结合. 后者对指标的构造并无特殊要求. 综合后的控制结构亦避免了原反馈结构下对性能指标构造的限制. 最后通过不同实例说明了对不确定性高通量筛选系统应用该控制结构的方法和有效性.

关键词: 离散事件系统; 高通量筛选系统; 双子代数; 不确定性; 优化控制; 反馈控制

引用格式: 李丹菁, 韦萍. 不确定性高通量筛选系统的双子代数控制. 控制理论与应用, 2019, 36(2): 231–240

DOI: 10.7641/CTA.2018.70902

Dioid-based control for high throughput screening systems with uncertainties

LI Dan-jing[†], WEI Ping

(School of Electrical and Electronic Engineering, Shanghai Institute of Technology, Shanghai 201418, China)

Abstract: In recent years, a lot of work has been done on control of high throughput screening systems (HTS) under certainty, among which, the implementation of control strategy under the framework of dioid is relatively more flexible and more efficient. However, for such output feedback optimal control strategy, a special structural requirement for the desired system behaviour still must be fulfilled; furthermore, in practice, there are uncertainties resulted from manual intervention, equipment maintenance, unexpected disturbance and fault. Lack of considerations of both restricts the efficiency of HTS automatic control. To further improve the control efficiency for this new class of discrete event systems, based on the corresponding interval dioid, the output feedback control structure is extended to HTS systems with parametric uncertainties, so that the optimal control can be automatically generated for HTS under uncertainty. The output feedback is then combined with a pre-compensator. For the latter, the structural restriction for the desired system behaviour is not necessary. And the synthesized control structure also avoids such restriction. Finally, different examples are given to demonstrate the application of the synthesized control structure and its effectiveness for HTS systems with uncertainties.

Key words: discrete event systems; high throughput screening systems; dioid; uncertainties; optimal control; feedback control

Citation: LI Danjing, WEI Ping. Dioid-based control for high throughput screening systems with uncertainties. *Control Theory & Applications*, 2019, 36(2): 231–240

1 引言

近年来, 随着高速计算机技术和高度自动化技术的发展, 高通量筛选系统(high throughput screening system, HTS)作为一类新兴的离散事件系统被广泛应

用于化工、制药、农业、基因工程等领域. 该类系统可以以每天几十万甚至上百万种样品的速度快速地对化工、生物质等样品进行包含液体操作、存储、微板操作、标注、读数、温孵等活动的自动化筛选^[1–3].

收稿日期: 2017–12–02; 录用日期: 2018–05–07.

[†]通信作者. E-mail: danjing.li@sit.edu.cn; Tel.: +86 21-60877253.

本文责任编辑: 赵千川.

上海市浦江人才计划项目(14PJ1407900), 轻工过程先进控制教育部重点实验室开放课题(APCLI1402)资助.

Supported by the Shanghai Pujiang Program (14PJ1407900) and the Open Research Fund of Jiangnan University Key Laboratory of Advanced Process Control for Light Industry (Ministry of Education) (APCLI1402).

高通量筛选系统,属于通常所说的事件图或同步图系统.在这类系统中,一个事件(对应一个活动的开始或结束)的发生不需通过与其他事件的竞争而发生,而可将其他事件的发生作为前提.相对传统的离散事件系统,高通量筛选系统呈现出自身特点^[11],例如同一资源可被不同用户使用甚至被同一个用户重复使用.又如,资源之间不存在缓冲区域;一个用户在资源转移时,同时占用两个资源.另外,后面批次的某些活动可能在前面批次的某些活动之前发生.针对以上特点,文献[2-7]基于max-plus算法从事件域对该系统进行了建模和控制.考虑该系统往往采用PLC控制器从时间域角度进行控制的实际控制实施需求,文献[8-11]选择合适的双子代数dioid框架,同时从时间域和事件域建立了高效紧凑的模型,为后续的系统分析提供极大便利.然而为了简化模型,以上模型及控制分析均未考虑实际过程中干扰、故障、设备维护等因素导致的系统不确定性.本文即以不确定性HTS的控制作为关注点.

涉及有诸如活动时间不确定,可用资源不确定等现象的离散事件系统,为不确定离散事件系统^[12].高通量筛选系统在实际运行过程中,前述因素即可能导致活动时间不确定.目前,对不确定高通量筛选系统的研究还不多.文献[7]基于事件域max-plus算法研究了不确定性HTS的干扰解耦问题,同时基于时间域和事件域展开的不确定性HTS控制还较少见,本文将以此展开研究.

对于一般的事件图系统,通常采用系统期望行为 H_a 作为优化指标提高系统运行性能,然而为了能顺利进行优化, H_a 的构造必须遵从一定的规则^[13].作为事件图系统,文献[3-4,7,11]亦以HTS系统期望行为为控制指标,提出相应的反馈控制结构,将系统实际运行情况及时地反馈至输入端.考虑到高通量筛选系统各资源间无缓冲区的特点,在确保不影响系统输出效率的前提下,反馈尽可能推迟系统输入时间,避免无效等待及拥堵.其中,文献[11]又结合HTS自身特点及实际运行需要,基于dioid框架进一步研究了不同控制指标下的HTS最优控制结构及控制方案,但各控制指标包括系统期望行为的构建仍受一定的条件约束,给优化控制带来不便.目前HTS系统控制的已有文献,在闭环控制下对这类控制指标构建的约束问题,均未作进一步讨论.

因此,本文在前期对确定性高通量筛选系统建模^[10]及其优化控制^[11]研究的基础上,同时基于时间域和事件域,首先将dioid框架拓展至不确定性高通量筛选系统,其次,为避免文献[11]中对期望系统行为性能指标的特殊构造要求,提供更便利的自动优化控制,进一步探讨不确定性HTS优化控制结构的改进.本文具体结构如下:第2节简要介绍双子代数、余理论,建

立高通量筛选系统同时基于时间域和事件域的双子代数控制理论基础.第3节基于双子代数dioid框架拓展,探讨不确定性高通量筛选系统的模型和控制结构,消除 H_a 的特殊构造要求.第4节以文献[1,10-11]中的高通量筛选系统和应用为例,阐明控制结构的可行性和有效性.最后在第5节中对全文作小结并对后续工作进行展望.

2 理论基础

本节仅对与本文有关的理论基础做简单的介绍与说明.文献[10-11]有助于对本节内容的理解.有关于双子代数、余理论的理论细节则可参考文献[14-16].

2.1 双子代数

双子代数(dioid) \mathcal{D} 是一个相对于max-plus算法结构更一般化的幂等半环结构.两种二元运算(乘法 \otimes 和加法 \oplus)被赋予该结构.在 \mathcal{D} 中,加法满足结合律和交换律,乘法满足结合律以及对加法的分配律,此外,加法 \otimes 还具有幂等性质,即: $\forall a \in \mathcal{D}, a \oplus a = a$. \mathcal{D} 中的加法中性元 ε 和乘法中性元 e 分别满足如下运算规律: $\forall a \in \mathcal{D}, a \oplus \varepsilon = \varepsilon \oplus a = a, a \otimes e = e \otimes a = a$.其中, ε 对乘法具有吸收性,即: $a \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes a = \varepsilon$.与传统算法中一样, $a \otimes b$ 往往简写作 ab .

在 \mathcal{D} 中定义如下偏序关系: $a \oplus b = b \Leftrightarrow a \preceq b$.记作 $a \vee b$,即 a 与 b 的上确界.若 \mathcal{D} 对无穷个 \oplus 是封闭的,且 \otimes 对无穷个 \oplus 依然满足分配律,则该 \mathcal{D} 是完整的.将 \mathcal{D} 中所有元素的和记作顶元 \top . \mathcal{D} 的底元为 ε .完整的 \mathcal{D} 还被赋予另一种内部运算:“ \wedge ”交运算. $a \wedge b$ 即 a 与 b 的下确界.在 \mathcal{D} 中,矩阵间的运算与传统代数中的矩阵运算相类似,即:设矩阵 $A, B \in \mathcal{D}^{m \times n}, C \in \mathcal{D}^{n \times p}$,则

$$(A \oplus B)_{ij} = a_{ij} \oplus b_{ij}, (A \otimes C)_{ij} = \bigoplus_{k=1}^n (a_{ik} \otimes c_{kj}).$$

下文中的 \mathcal{D} 一般均指完整的 \mathcal{D} .

定理 1(见文献[15],定理4.75) 定义在 \mathcal{D} 上的方程 $x = ax \oplus b$ 的最小解为 $x = a^*b$,其中: $a^* = \bigoplus_{(i \geq 0)} a^i, a^0 = e$.

同样,对于矩阵 A, B, X ,方程 $X = AX \oplus B$ 的最小解为 $X = A^*B, A^* = \bigoplus_{(i \geq 0)} A^i, A^0 = I, I$ 为单位矩阵,即 $I_{ii} = e, I_{ij} = \varepsilon, (i \neq j)$.为了提高高通量筛选系统的系统通量,希望任务能够尽早完成,基于该定理可获得事件最早可能发生时间.

为了同时从时间域和事件域来描述系统,以下引入一个特定的双子代数dioid $\mathcal{M}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{Z}}[\gamma, \delta]$,更具体的信息可参见文献[10].首先在具有两个变量 (γ, δ) 的形式幂级数的集合上定义一个dioid结构 $\mathbb{B}[\gamma, \delta]$:其形式级数以 $\mathbb{B} = \{\varepsilon, e\}$ 中的布尔量为系数,以 \mathbb{Z} 中的整数为指数,并且幂级数的传统求和以及乘法分别作为两种二元运算 \oplus 和 \otimes 被赋予该集合.在高通量筛选系统

这种事件图中, 单项式 $\gamma^k \delta^t$, 可以从事件域角度解释为“第 k 批次的事件最早在 t 时间发生”, 也可以从时间域角度解释为“事件在第 t 时间最多已发生了 k 批”。

高通量筛选系统中, 随着时间的增长, 事件的批次数是非降的, 同样, 事件的发生时间随着批次数的增长也是非降的. 因此, 若要求形式级数 $S = \gamma^2 \delta^3 \oplus \gamma^3 \delta^2$, 即要求某事件在第3个时间单位最多发生2批, 同时要求第2个时间单位最多已发生3批, 则第3时刻最多只能发生2个批次, 即有 $S = \gamma^2 \delta^3 \oplus \gamma^3 \delta^2 = \gamma^2 \delta^3$. 因此特性, 单项式 $\gamma^k \delta^t$ 不仅可以表示 $\mathbb{B}[\gamma, \delta]$ 中该单项式本身, 还应该能等价代表其与某些单、多项式的组合. 为此, 在 $\mathbb{B}[\gamma, \delta]$ 中, 通过对它的商 $\mathcal{M}_{\text{in}}^{\text{ax}}[\gamma, \delta]$ 的定义, 把满足这类特性的元素筛选出来. 在下述等价关系 $\mathcal{R}_{(\gamma, \delta)}$ 下, $\mathbb{B}[\gamma, \delta]$ 的商dioid

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\text{in}}^{\text{ax}}[\gamma, \delta] &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{B}[\gamma, \delta] / \mathcal{R}_{(\gamma, \delta)}: \\ \forall S_1, S_2 \in \mathbb{B}[\gamma, \delta], S_1 \equiv S_2 &\Leftrightarrow S_1 \mathcal{R}_{(\gamma, \delta)} S_2 \Leftrightarrow \\ (\gamma^*(\delta^{-1})^*) S_1 &= (\gamma^*(\delta^{-1})^*) S_2. \end{aligned} \quad (1)$$

在 $\mathcal{M}_{\text{in}}^{\text{ax}}[\gamma, \delta]$ 中, $\gamma^k \delta^t$ 不仅是 (γ, δ) 平面(即事件-时间平面)上的一个点, 还包含了 $\mathcal{R}_{(\gamma, \delta)}$ 意义下它的等价类. 例如: $\gamma^2 \delta^3$, 不仅包含 $(2, 3)$ 这个点, 还包含以 $(2, 3)$ 为顶点的东南锥中所有的点, 即图1中的整个阴影部分.

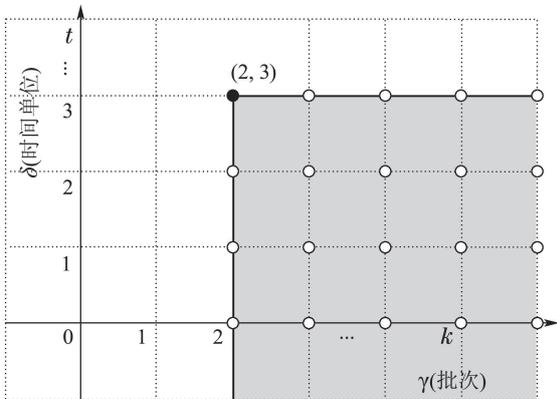


图 1 $\mathcal{M}_{\text{in}}^{\text{ax}}[\gamma, \delta]$ 中 $\gamma^2 \delta^3$ 的图形表示

Fig. 1 Graphical representation of $\gamma^2 \delta^3$ in $\mathcal{M}_{\text{in}}^{\text{ax}}[\gamma, \delta]$

$\mathcal{M}_{\text{in}}^{\text{ax}}[\gamma, \delta]$ 的加法中性元、乘法中性元以及顶元分别为 $\varepsilon = \gamma^{+\infty} \delta^{-\infty}$, $e = \gamma^0 \delta^0$ 和 $\top = \gamma^{-\infty} \delta^{+\infty}$.

$\mathcal{M}_{\text{in}}^{\text{ax}}[\gamma, \delta]$ 中有下述规则:

$$\gamma^k \delta^t \oplus \gamma^l \delta^t = \gamma^{\min(k, l)} \delta^t, \quad (2)$$

$$\gamma^k \delta^t \oplus \gamma^k \delta^\tau = \gamma^k \delta^{\max(t, \tau)}, \quad (3)$$

$$\gamma^k \delta^t \otimes \gamma^l \delta^\tau = \gamma^{k+l} \delta^{t+\tau}, \quad (4)$$

$$\gamma^k \delta^t \wedge \gamma^l \delta^\tau = \gamma^{\max(k, l)} \delta^{\min(t, \tau)}. \quad (5)$$

2.2 余理论

定义 1 设有序集合 \mathcal{D} 上的映射 f , 对于 $a, b \in \mathcal{D}$, 如果满足 $a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$, 那么 f 为保序映射.

定义 2 设 \mathcal{X} 和 \mathcal{Y} 为两个有序集合, f 为保序映射 $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$, 如果对于所有的 $y \in \mathcal{Y}$, 子集 $\mathcal{X}_s = \{x \in \mathcal{X} | f(x) \leq y\}$ 存在上确界且其位于该子集内, 那么就称这个保序映射 f 是可余的. f 的余映射记作 f^\sharp , 子集 \mathcal{X}_s 的上确界可以表示为 $f^\sharp(y)$.

定理 2(见文献[15], 定理 4.50) 设 $\varepsilon_{\mathcal{X}}$ 和 $\varepsilon_{\mathcal{Y}}$ 分别为两个完整dioid \mathcal{X} 和 \mathcal{Y} 的底元, f 为保序映射 $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$, 则 f 为可余的充要条件是: $f(\varepsilon_{\mathcal{X}}) = \varepsilon_{\mathcal{Y}}$, 并且对于 \mathcal{X} 的每一个子集 \mathcal{X}_s 都满足

$$f(\bigoplus_{x \in \mathcal{X}_s} x) = \bigoplus_{x \in \mathcal{X}_s} f(x).$$

对 \mathcal{D} 上的保序映射左乘 $L_a: x \mapsto ax$ 而言, 显然, $L_a(\varepsilon) = \varepsilon$, 对 \mathcal{D} 中的每一个子集 \mathcal{D}_s , 有

$$L_a(\bigoplus_{x \in \mathcal{D}_s} x) = \bigoplus_{x \in \mathcal{D}_s} L_a(x),$$

因此映射 L_a 是可余的. L_a 的余映射记作 L_a^\sharp , $L_a^\sharp(x) = a \bowtie x$. 而不等式 $a \otimes x \leq b$ 的解为 $x \leq a \bowtie b$, 其中, 最大解为 $a \bowtie b$. 类似, 右乘 $R_b: x \mapsto xb$ 的余映射 $R_b^\sharp(x) = x \phi b$. 同样, 不等式 $x \otimes a \leq b$ 的解为 $x \leq b \phi a$, 其中最大解为 $b \phi a$.

由定理2亦可推知, 为使 $*$ 映射 \mathcal{K} 可余, 则需把它的陪域从 \mathcal{D} 限制为它的值域 $\text{Im} \mathcal{K}$, 这样, $\mathcal{K}: \mathcal{D} \rightarrow \text{Im} \mathcal{K}$, $x \mapsto x^*$, 就是有余的. 此时, 余映射为包含映射, 即 $\text{Id}_{\text{Im} \mathcal{K}}: \text{Im} \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{D}$, $x \mapsto x$. 从而, 满足不等式(6)的最大解为式(7):

$$x^* \leq a^*, \quad (6)$$

$$x = a^*. \quad (7)$$

关于 $*$ 运算、左乘映射、右乘映射等, 有以下性质成立^[15]:

$$a \bowtie (ax) \geq x, (xa) \phi a \geq x, \quad (8)$$

$$a(ba^*)^* = (a \oplus b)^* = (a^*b)^* a^*, \quad (9)$$

$$(ab)^* a = a(ba)^*, \quad (10)$$

$$a^* x = a^* \bowtie (a^* x), x a^* = (x a^*) \phi a^*, \quad (11)$$

$$a(a \bowtie (ax)) = ax, ((xa) \phi a) a = xa, \quad (12)$$

$$(ab) \bowtie x = b \bowtie (a \bowtie x), x \phi (ba) = (x \phi a) \phi b. \quad (13)$$

对矩阵的情形, 相关各关系也均同样成立. 例如, 若 $A \in \mathcal{D}^{m \times n}$, $B \in \mathcal{D}^{m \times p}$, $C \in \mathcal{D}^{p \times n}$, 不等式 $BX \leq A$ 的最大解为 $X = B \bowtie A$, 其中:

$$(B \bowtie A) \in \mathcal{D}^{p \times n}, (B \bowtie A)_{ij} = \bigwedge_{k=1}^m (B_{ki} \bowtie A_{kj});$$

不等式 $XC \leq A$ 的最大解为 $X = A \phi C$, 其中

$$(A \phi C) \in \mathcal{D}^{m \times p}, (A \phi C)_{ij} = \bigwedge_{k=1}^n (A_{ik} \phi C_{jk}).$$

定理 3 若 $A \in \mathcal{D}^{p \times n}$, 那么 $A \bowtie A \in \mathcal{D}^{n \times n}$, 并且 $A \bowtie A = (A \bowtie A)^*$; $A \phi A \in \mathcal{D}^{p \times p}$, 并且, $A \phi A = (A \phi A)^*$.

证 以下仅证定理的左余部分,右余部分的证明类似.由式(12)得 $A(A \bowtie A) = A$,故

$$A \bowtie A = [A(A \bowtie A)] \bowtie A = (A \bowtie A) \bowtie (A \bowtie A),$$

其中后一个等号由式(13)而得.因此

$$(A \bowtie A)^2 = (A \bowtie A) \otimes [(A \bowtie A) \bowtie (A \bowtie A)].$$

再由式(12)得 $(A \bowtie A)^2 = A \bowtie A$.依次类推有 $(A \bowtie A)^i = A \bowtie A, i \geq 2$,故

$$(A \bowtie A)^* = I \oplus (A \bowtie A) \oplus (A \bowtie A)^2 \oplus \dots = I \oplus (A \bowtie A).$$

由式(8)得 $A \bowtie A \succcurlyeq I$,故 $A \bowtie A = (A \bowtie A)^*$.

证毕.

3 不确定性高通量筛选系统的双子代数控制与优化

3.1 确定性高通量筛选系统 dioid $\mathcal{M}_{\text{in}}^{\text{ax}}[\gamma, \delta]$ 模型

基于双子代数 $\mathcal{M}_{\text{in}}^{\text{ax}}[\gamma, \delta]$,对一个 p 输入 q 输出的确定性高通量筛选系统,可建立如下形式的系统模型:

$$X(\gamma\delta) = A(\gamma\delta)X(\gamma\delta) \oplus B(\gamma\delta)U(\gamma\delta), \quad (14)$$

$$Y(\gamma\delta) = C(\gamma\delta)X(\gamma\delta). \quad (15)$$

其中: $X(\gamma\delta) \in \mathcal{M}_{\text{in}}^{\text{ax}}[\gamma, \delta]^n$ 为系统状态, $U(\gamma\delta) \in \mathcal{M}_{\text{in}}^{\text{ax}}[\gamma, \delta]^p$ 为控制输入, $Y(\gamma\delta) \in \mathcal{M}_{\text{in}}^{\text{ax}}[\gamma, \delta]^q$ 为系统输出.根据定理1:

$$X(\gamma\delta) = A^*(\gamma\delta)B(\gamma\delta)U(\gamma\delta), \quad (16)$$

$$Y(\gamma\delta) = C(\gamma\delta)A^*(\gamma\delta)B(\gamma\delta)U(\gamma\delta), \quad (17)$$

即开环状态下,系统输出 Y 与控制输入 U 间的传递关系为

$$H(\gamma\delta) = C(\gamma\delta)A^*(\gamma\delta)B(\gamma\delta). \quad (18)$$

通常,系统矩阵 H 中的元素为如下形式的幂级数:

$$H_{ij}(\gamma\delta) = p \oplus q \otimes r^*, \quad (19)$$

其中: $p = \oplus_{i=0}^n \gamma^{n_i} \delta^{t_i}$, $q = \oplus_{i=0}^m \gamma^{N_i} \delta^{T_i}$, $r = \gamma^\nu \delta^\tau$,从物理意义上看, p 是系统的暂态过程, $q \otimes r^*$ 代表系统达到稳态后的行为.若系统矩阵 H 中的某元素为

$$H_{ij} = e \oplus \gamma^1 \delta^1 \oplus (\gamma^2 \delta^2 \oplus \gamma^3 \delta^3) \otimes (\gamma^3 \delta^2)^*.$$

这意味着:系统一开始以 $p = e \oplus \gamma^1 \delta^1$ 的模式处于暂态运行,第2个时间单位起以 $q = \gamma^2 \delta^2 \oplus \gamma^3 \delta^3$ 的形式进入稳态循环.系统进入稳态运行后,每2个时间单位运行3个批次,即单位时间内输出3/2个批次.

对高通量筛选系统的控制,可根据不同的实际要求,在系统中加入各种反馈(详情可参见文献[11]),将系统实际运行情况反映至控制输入端,尤其是HTS资源间无缓冲区域,当系统遇到干扰或故障时,反馈便根据运行情况对控制输入作出调整:例如使输入(如

原料)能够恰好“及时”地进入系统,在单位时间内获得最大的输出量,同时避免无效的等待甚或系统的拥堵.下文中,考虑如图2所示的输出反馈.图中, V 为系统输入, U 为控制输入.

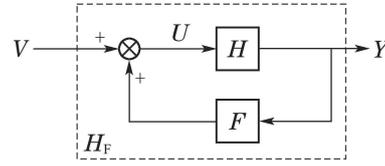


图2 确定性高通量筛选系统输出反馈控制结构

Fig. 2 Output feedback control structure for HTS systems without uncertainties

3.2 区间双子代数与不确定性高通量筛选系统控制

由于实际运行过程中的高通量筛选系统可能出现不确定因素,导致活动时间不确定,考虑利用区间理论,将确定性模型拓展为不确定性模型.关于区间双子代数理论及相应区间数学运算,有兴趣的读者可参考文献[16].文献[12]进一步基于事件域对余理论进行了研究.在区间双子代数的框架下,相关成果均可被扩展到基于事件域和时间域进行的不确定性HTS系统控制.

对 \mathcal{D} 上的闭区间,赋予如下加法 \oplus 和乘法 \otimes 运算,则闭区间集合构成区间dioid $I(\mathcal{D})$: $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in I(\mathcal{D})$, $\mathbf{x} = [\underline{x}, \bar{x}] = \{x \in \mathcal{D} \mid \underline{x} \preceq x \preceq \bar{x}\}$, $\mathbf{y} = [\underline{y}, \bar{y}] = \{y \in \mathcal{D} \mid \underline{y} \preceq y \preceq \bar{y}\}$,

$$\mathbf{x} \oplus \mathbf{y} = [\underline{x} \oplus \underline{y}, \bar{x} \oplus \bar{y}],$$

$$\mathbf{x} \otimes \mathbf{y} = [\underline{x} \otimes \underline{y}, \bar{x} \otimes \bar{y}].$$

与传统算法中的区间不同, $I(\mathcal{D})$ 中,加法 \oplus 和乘法 \otimes 均只需对区间边界进行相应运算即可实现,这是相关定理及性质等得以如下文所示被顺利拓展到区间双子代数的原因.下文中,仅考虑完整的 $I(\mathcal{D})$,即其对无穷多个 \oplus 是封闭的.与 \mathcal{D} 中类似, $I(\mathcal{D})$ 中的零元为 $\mathbf{e} = [\underline{e}, \bar{e}]$,单位元为 $\mathbf{e} = [e, e]$.对完整的 $I(\mathcal{D})$,其顶元则定义为 $\mathbf{T} = [\underline{T}, \bar{T}]$. $I(\mathcal{D})$ 中的偏序关系“ $\preceq_{I(\mathcal{D})}$ ”及其与 \mathcal{D} 中偏序关系“ \preceq ”的关系如下:

$$\mathbf{x} \oplus \mathbf{y} = \mathbf{y} \Leftrightarrow \mathbf{x} \preceq_{I(\mathcal{D})} \mathbf{y} \Leftrightarrow \underline{x} \preceq \underline{y}, \bar{x} \preceq \bar{y}.$$

在不引起误解的情况下,可把 $\preceq_{I(\mathcal{D})}$ 写作 \preceq . $\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}$ 可以简写作 \mathbf{xy} .对于 \mathcal{D} 上的单调函数 f ,可被扩展到 $I(\mathcal{D})$ 上,即有 $f(\mathbf{x}) = [f(\underline{x}), f(\bar{x})]$.若 $\mathbf{x} \preceq \mathbf{y}$,则

$$f(\underline{x}) \preceq f(\underline{y}), f(\bar{x}) \preceq f(\bar{y}), f(\mathbf{x}) \preceq f(\mathbf{y}).$$

定理4 $I(\mathcal{D})$ 上左乘映射 $L_a : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{a} \otimes \mathbf{x}$ 可余,余映射 $L_a^\sharp(\mathbf{y}) = \mathbf{a} \bar{\otimes} \mathbf{y} = [\underline{a} \bar{\otimes} \underline{y} \wedge \bar{a} \bar{\otimes} \bar{y}, \bar{a} \bar{\otimes} \bar{y}]$. $I(\mathcal{D})$ 上右乘映射 $R_a : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} \bar{\otimes} \mathbf{a}$ 可余,余映射为

$$R_a^\sharp(\mathbf{y}) = \mathbf{y} \bar{\phi} \mathbf{a} = [\underline{y} \bar{\phi} \underline{a} \wedge \bar{y} \bar{\phi} \bar{a}, \bar{y} \bar{\phi} \bar{a}].$$

证 以下步骤为对 $I(\mathcal{D})$ 上左乘映射部分的证明, 右乘映射部分的证明因与之类似而从略。

步骤 1 首先, 证明 $I(\mathcal{D})$ 上左乘映射的可余性。显然, $L_a(\varepsilon) = \mathbf{a} \otimes \varepsilon = [\underline{a}, \bar{a}] \otimes [\underline{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}] = [\underline{a} \otimes \underline{\varepsilon}, \bar{a} \otimes \bar{\varepsilon}] = [\underline{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}] = \varepsilon$, 并且, 对 $I(\mathcal{D})$ 的任一子集 $I(\mathcal{D})_s$, 有

$$L_a(\bigoplus_{\mathbf{x} \in I(\mathcal{D})_s} \mathbf{x}) = \bigoplus_{\mathbf{x} \in I(\mathcal{D})_s} (L_a(\mathbf{x})).$$

因此, 根据定理 2, 左乘映射 L_a 是可余的。

步骤 2 其次, 基于 $I(\mathcal{D})$ 上的左乘映射 $L_a(\mathbf{x}): \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ (其中 \mathcal{X}, \mathcal{Y} 为 $I(\mathcal{D})$ 上两个有序集合), 讨论它的余映射 $L_a^\#(\mathbf{y})$ 。根据“映射可余”的定义(即定义 2)可知: 对于所有的 $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}$, \mathcal{X} 的子集 $\mathcal{X}_s = \{\mathbf{x} \in \mathcal{X} | L_a(\mathbf{x}) \preceq \mathbf{y}\}$ 存在上确界 $\mathbf{x}_1 = [\underline{x}_1, \bar{x}_1]$, 且 $\mathbf{x}_1 \in \mathcal{X}_s$ 。因此, 对于任意 $\mathbf{x} \in \mathcal{X}_s$, 有 $\mathbf{x} \preceq \underline{x}_1, \bar{x} \preceq \bar{x}_1$ 。同时, 有 $\mathbf{a}\mathbf{x} \preceq \mathbf{y}$, 即 $[\underline{a} \otimes \underline{x}, \bar{a} \otimes \bar{x}] \preceq [\underline{y}, \bar{y}]$, 也即: $\bar{a} \otimes \bar{x} \preceq \bar{y}, \underline{a} \otimes \underline{x} \preceq \underline{y}$ 。由 \mathcal{D} 上左乘映射的余映射可知, $\bar{x} \preceq \bar{a} \bar{y}, \underline{x} \preceq \underline{a} \underline{y}$ 。又由于 $\underline{x} \preceq \bar{x} \preceq \bar{a} \bar{y}$, 即得 $\underline{x} \preceq \underline{a} \underline{y} \wedge \bar{x} \preceq \bar{a} \bar{y}$ 。因此, 作为上确界的 \mathbf{x}_1 , 有, $\underline{x}_1 = \underline{a} \underline{y} \wedge \bar{x}_1 = \bar{a} \bar{y}$ 。

由此, 定理得证。 证毕。

因此, 区间左乘不等式 $\mathbf{a} \otimes \mathbf{x} \preceq \mathbf{b}$ 的解为

$$\mathbf{x} \preceq \mathbf{a} \bar{\phi} \mathbf{b}, \quad (20)$$

其中最大解为 $\mathbf{a} \bar{\phi} \mathbf{b}$; 类似, 区间右乘不等式 $\bar{x} \otimes \mathbf{a} \preceq \mathbf{b}$ 的解为

$$\mathbf{x} \preceq \mathbf{b} \bar{\phi} \mathbf{a}, \quad (21)$$

其中最大解为 $\mathbf{b} \bar{\phi} \mathbf{a}$ 。

前节中关于 \mathcal{D} 上 * 映射可余的条件等扩展到 $I(\mathcal{D})$ 上依然成立。也因此, 在 $I(\mathcal{D})$ 上, 满足不等式(22)的最大解为式(23):

$$\mathbf{x}^* = [\underline{x}^*, \bar{x}^*] \preceq \mathbf{a}^* = [\underline{a}^*, \bar{a}^*], \quad (22)$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{a}^*. \quad (23)$$

同样, 对矩阵的情形, 相关各关系也均成立。例如, 若 $\mathbf{A} \in I(\mathcal{D}^{m \times n}), \mathbf{B} \in I(\mathcal{D}^{m \times p}), \mathbf{C} \in I(\mathcal{D}^{p \times n})$, 不等式 $\mathbf{B}\mathbf{X} \preceq \mathbf{A}$ 的最大解为 $\mathbf{X} = \mathbf{B} \bar{\phi} \mathbf{A}$, 其中: $(\mathbf{B} \bar{\phi} \mathbf{A}) \in I(\mathcal{D}^{p \times n}), (\mathbf{B} \bar{\phi} \mathbf{A})_{ij} = \bigwedge_{k=1}^m (\mathbf{B}_{ki} \bar{\phi} \mathbf{A}_{kj})$; 不等式 $\mathbf{X}\mathbf{C} \preceq \mathbf{A}$ 的最大解为 $\mathbf{X} = \mathbf{A} \bar{\phi} \mathbf{C}$, 其中:

$$(\mathbf{A} \bar{\phi} \mathbf{C}) \in I(\mathcal{D}^{m \times p}), (\mathbf{A} \bar{\phi} \mathbf{C})_{ij} = \bigwedge_{k=1}^n (\mathbf{A}_{ik} \bar{\phi} \mathbf{C}_{jk}).$$

基于 $I(\mathcal{D})$, 可很方便将定理 3 扩展, 得到定理 5。

定理 5 若 $\mathbf{A} \in I(\mathcal{D}^{p \times n})$, 则 $\mathbf{A} \bar{\phi} \mathbf{A} \in I(\mathcal{D}^{n \times n})$, 并且 $\mathbf{A} \bar{\phi} \mathbf{A} = (\mathbf{A} \bar{\phi} \mathbf{A})^*$; $\mathbf{A} \bar{\phi} \mathbf{A} \in I(\mathcal{D}^{p \times p})$, 并且 $\mathbf{A} \bar{\phi} \mathbf{A} = (\mathbf{A} \bar{\phi} \mathbf{A})^*$ 。

证 以下仅证矩阵左乘的情形, 对于矩阵右乘的情形, 可类似进行证明。对 $\mathbf{A} \in I(\mathcal{D}^{p \times n})$,

$$\mathbf{A} \bar{\phi} \mathbf{A} = [\underline{A} \bar{\phi} \underline{A} \wedge \bar{A} \bar{\phi} \bar{A}, \bar{A} \bar{\phi} \bar{A}].$$

而

$$\underline{A} \bar{\phi} \underline{A} \wedge \bar{A} \bar{\phi} \bar{A} = \begin{cases} \underline{A} \bar{\phi} \underline{A}, \underline{A} \bar{\phi} \underline{A} \preceq \bar{A} \bar{\phi} \bar{A}; \\ \bar{A} \bar{\phi} \bar{A}, \bar{A} \bar{\phi} \bar{A} \preceq \underline{A} \bar{\phi} \underline{A}. \end{cases}$$

又由定理 3, $\underline{A} \bar{\phi} \underline{A} = (\underline{A} \bar{\phi} \underline{A})^*, \bar{A} \bar{\phi} \bar{A} = (\bar{A} \bar{\phi} \bar{A})^*$. 故 $\mathbf{A} \bar{\phi} \mathbf{A} = (\mathbf{A} \bar{\phi} \mathbf{A})^*$. 证毕。

类似, 定理 1, 式(9)至式(13)等也在 $I(\mathcal{D})$ 上成立。

基于确定性高通量筛选系统的 $\mathcal{M}_{\text{in}}^{\text{ax}}[\gamma, \delta]$ 模型(14)–(15), 对不确定性高通量筛选系统, 即可在 $I(\mathcal{M}_{\text{in}}^{\text{ax}}[\gamma, \delta])$ 框架下, 建立类似模型:

$$\mathbf{X}(\gamma\delta) = \mathbf{A}(\gamma\delta)\mathbf{X}(\gamma\delta) \oplus \mathbf{B}(\gamma\delta)\mathbf{U}(\gamma\delta), \quad (24)$$

$$\mathbf{Y}(\gamma\delta) = \mathbf{C}(\gamma\delta)\mathbf{X}(\gamma\delta), \quad (25)$$

其中: $\mathbf{X}(\gamma\delta) \in I(\mathcal{M}_{\text{in}}^{\text{ax}}[\gamma, \delta]^n)$ 为系统状态, $\mathbf{U}(\gamma\delta) \in I(\mathcal{M}_{\text{in}}^{\text{ax}}[\gamma, \delta]^p)$ 为控制输入, $\mathbf{Y}(\gamma\delta) \in I(\mathcal{M}_{\text{in}}^{\text{ax}}[\gamma, \delta]^q)$ 为系统输出。同样, 对不确定性 HTS 也有类似式(16)至式(19)的关系。

基于 $I(\mathcal{M}_{\text{in}}^{\text{ax}}[\gamma, \delta])$ 下的模型, 图 2 所示的反馈控制结构可扩展至如图 3 所示的不确定性高通量筛选系统反馈控制结构。 \mathbf{H}, \mathbf{F} 为相应的不确定性高通量筛选系统的传递矩阵和输出反馈。尽管实际运行的高通量筛选系统输入确定, 也可表示为 $\mathbf{V} = [\underline{V}, \bar{V}]$, 其中 $\underline{V} = \bar{V}$ 。

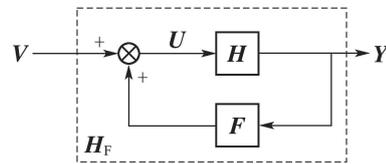


图 3 不确定性高通量筛选系统输出反馈控制结构
Fig. 3 Output feedback control structure for HTS systems with uncertainties

图 3 结构下:

$$\mathbf{U} = \mathbf{F}\mathbf{Y} \oplus \mathbf{V}, \quad (26)$$

基于式(24)(26)(25)可得

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \mathbf{A}\mathbf{X} \oplus \mathbf{B}(\mathbf{F}\mathbf{Y} \oplus \mathbf{V}) = \\ &= \mathbf{A}\mathbf{X} \oplus \mathbf{B}(\mathbf{F}\mathbf{C}\mathbf{X} \oplus \mathbf{V}) = \\ &= (\mathbf{A} \oplus \mathbf{B}\mathbf{F}\mathbf{C})\mathbf{X} \oplus \mathbf{B}\mathbf{V}. \end{aligned}$$

考虑到定理 1, 有

$$\mathbf{X} = (\mathbf{A} \oplus \mathbf{B}\mathbf{F}\mathbf{C})^* \mathbf{B}\mathbf{V}.$$

根据式(9)–(10),

$$\mathbf{X} = (\mathbf{A}^* \mathbf{B}\mathbf{F}\mathbf{C})^* \mathbf{A}^* \mathbf{B}\mathbf{V} = \mathbf{A}^* \mathbf{B}(\mathbf{F}\mathbf{C}\mathbf{A}^* \mathbf{B})^* \mathbf{V}.$$

因此

$$\mathbf{Y} = \mathbf{C}\mathbf{X} = \mathbf{C}\mathbf{A}^* \mathbf{B}(\mathbf{F}\mathbf{C}\mathbf{A}^* \mathbf{B})^* \mathbf{V}.$$

根据式(18)及式(10), 可得

$$Y = H(FH)^*V = (HF)^*HV.$$

因此输出 Y 与系统输入 V 之间的关系为 $H_F = (HF)^*H$. 假设用户期望的系统行为为 H_d , 要求系统以实际不低于期望性能 H_d 运行, 即要求

$$H_F = (HF)^*H \preceq H_d. \quad (27)$$

显然, 对映射 $M_{H_F}: X \mapsto (HX)^*H$, $M_{H_F}(\varepsilon) = H \neq \varepsilon$, 由定理2可知, 映射 M_{H_F} 不可余. 这意味着, 不能直接找到合适的反馈 F , 使系统按任意构造的期望指标 H_d 进行运行. 然而, 若 H_d 满足 D^*H 或 HD^* 的构造要求(同确定性HTS系统控制^[11]要求一样, D 所涉矩阵为维数合适的物理可实现的矩阵), 不等式(27)即可求解. 以 $H_d = D^*H$ 为例, 式(27)即为

$$H_F = (HF)^*H = H(FH)^* \preceq D^*H.$$

因此

$$(FH)^* \preceq H\bar{\phi}(D^*H).$$

根据式(11)和式(13)可得

$$H\bar{\phi}(D^*H) = H\bar{\phi}[D^*\bar{\phi}(D^*H)] = (D^*H)\bar{\phi}(D^*H).$$

结合定理5可知, $(FH)^* \preceq [(D^*H)\bar{\phi}(D^*H)]^*$. 根据不等式(22): $x^* \preceq a^*$ 的最大解(23): $x = a^*$,

$$FH \preceq (D^*H)\bar{\phi}(D^*H) = H\bar{\phi}(D^*H).$$

因此, 满足性能指标要求的最优反馈控制器

$$F_{\text{opt}} = H\bar{\phi}(D^*H)\bar{\phi}H.$$

3.3 不确定性高通量筛选系统优化控制结构

为了避免图3结构对 H_d 的特殊构造要求, 基于非确定性系统, 首先考虑如图4所示的开环补偿器 P 对系统输入进行预处理.

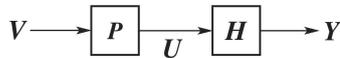


图4 开环预处理结构

Fig. 4 Open loop structure with a pre-compensator

如图4所示, $Y = HU = HPV$. 在该控制结构下, 期望性能指标 H_d 无需受限于其构造约束. 如果要求“系统的实际行为不低于期望性能”, 即 $HP \preceq H_d$, 根据区间左乘不等式的解(20), 满足 $P \preceq H\bar{\phi}H_d$ 的补偿器可作为预处理补偿器, 其中, 使系统以期望性能运行的最优补偿 P_{opt} 即为

$$P_{\text{opt}} = H\bar{\phi}H_d. \quad (28)$$

对于不确定性系统 H , 该最优 P_{opt} 为区间补偿器. 在此基础上, 将输出反馈 F 与预处理补偿器 P 结合, 构成如图5所示结构.

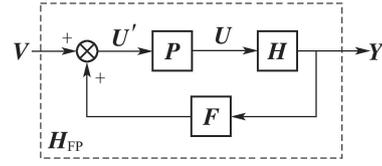


图5 最优闭环控制结构

Fig. 5 Optimal closed loop control structure

在图5结构下:

$$U' = FY \oplus V,$$

$$U = PU',$$

$$Y = HU = HP(FY \oplus V) =$$

$$HPFY \oplus HPV = (HPF)^*HPV.$$

故该结构下系统传递函数:

$$H_{\text{FP}} = (HPF)^*HP = HP(FHP)^*, \quad (29)$$

因此

$$Y = H_{\text{FP}}V = HP(FHP)^*V, \quad (30)$$

同理

$$U = P(FHP)^*V,$$

U 和 V 之间的关系即为

$$G_{UV} = P(FHP)^*. \quad (31)$$

如果要求“系统的实际行为不低于期望性能 H_d ”, 即, $H_{\text{FP}} \preceq H_d$, 也即

$$HG_{UV} \preceq H_d,$$

或

$$G_{UV} \preceq H\bar{\phi}H_d. \quad (32)$$

这意味着: 在该结构下, 希望找到最优的预处理补偿器 P 和最优的反馈控制器 F , 使之满足式(32), 此时 G_{UV} 的最大可能解也即为 $G_{UV\text{max}} = H\bar{\phi}H_d$.

基于*运算的定义, 有

$$G_{UV} = P \bar{\oplus} (\bar{\oplus}_{i=1}^{+\infty} P(FHP)^i), \quad (33)$$

结合式(32)–(33), 得

$$P \preceq G_{UV} \preceq H\bar{\phi}H_d = P_{\text{opt}}.$$

显然, 当 $P = e$ 时, 图5结构相当于单纯的输出反馈控制结构图3, 此时, 由式(31)及式(29)可得

$$G_{UV} = P(FHP)^* = (FH)^*,$$

$$H_{\text{FP}} = HP(FHP)^* = H(FH)^* = HG_{UV}.$$

若要满足 $H_{\text{FP}} = H(FH)^* \preceq H_d$, 则

$$G_{UV} \preceq H\bar{\phi}H_d = P_{\text{opt}},$$

可见闭环结构下的 G_{UV} 不会大于开环的最优预补偿器 P_{opt} . 另一方面, 当 $F = \varepsilon$ 时, 本结构相当于开环预

处理结构图4, 此时根据式(31):

$$G_{UV} = P(FHP)^* = P,$$

因此, 若此时 P 取其最优解 P_{opt} , G_{UV} 也即为其最大可能解 $H \bar{\otimes} H_d$.

由以上可知最优的反馈控制器 F_{opt} 是当预处理补偿器 $P = P_{opt} = H \bar{\otimes} H_d$ 时, 满足式(32)的 F 最大解. 此时,

$$G_{UV} = P_{opt}(FHP_{opt})^* \preceq H \bar{\otimes} H_d.$$

结合式(28), 即 $P_{opt}(FHP_{opt})^* \preceq P_{opt}$. 根据左乘的保序特性, 有 $HP_{opt}(FHP_{opt})^* \preceq HP_{opt}$. 故

$$(FHP_{opt})^* \preceq (HP_{opt}) \bar{\otimes} (HP_{opt}).$$

由定理5及不等式(22)的最大解(23), 得

$$FHP_{opt} \preceq (HP_{opt}) \bar{\otimes} (HP_{opt}).$$

解上述右乘不等式即得该结构下的最优反馈控制器 F_{opt} 为

$$F_{opt} = (HP_{opt}) \bar{\otimes} (HP_{opt}) \bar{\otimes} (HP_{opt}), \quad (34)$$

其中 $P_{opt} = H \bar{\otimes} H_d$, 即式(28).

综上所述, 将预处理补偿器和输出反馈相结合, 系统能够达到最优性能, 并且避免了图3控制结构下对性能指标的特殊构造要求.

在下一节中, 首先将以文[11]中提到的高通量筛选系统为例, 具体说明该控制结构的应用.

4 高通量筛选系统示例

例 1 图6所示简单高通量筛选系统, 包含两个资源 R1 和 R2 (其中 R1 是双容量资源) 及两个活动 Acti.1 和 Acti.2. x_1, x_2 分别为活动 Acti.1 的开始事件和结束事件最早发生时间, x_3, x_4 分别为活动 Acti.2 的开始事件和结束事件最早发生时间. 其中, x_1 和 x_3 分别受输入 u_1 和 u_2 的调节, x_4 作为系统的输出 y . 其单批次运行方案即如图6所示.

图6中, 因受故障、人为干预等因素的影响, 各活动的实际需时或事件间隔时间不确定, 例如, Acti.1 需时并不完全确定, 在8至12个时间单位之间, x_1 到 x_2 的这种不确定时间间隔用 $[8, 12]$ 表示. 这里, 涉及的两状态同属于单一个批次, 两者间批次差为0, 相应在此赋时事件图7中, x_1 到 x_2 间令牌(\cdot , token)个数为0.

当系统以图6的单批次方案进行循环运行时, 即涉及多个批次. 同一活动新旧批次之间的间隔时间也可能不确定, 例如赋时事件图7中所示, 活动 Acti.1 旧批次的 x_2 到新批次的 x_1 所需时间间隔在2到4个时间单位之间, x_2 到 x_1 的这种不确定时间间隔用 $[2, 4]$ 表示. 由于 R1 是双容量资源, 所涉 Acti.1 新旧批次间的批次差为 $2^{(11)}$, x_2 到 x_1 的相应令牌数即为2. 因此, 图7中 Acti.1 结束状态 x_2 指向开始状态 x_1 的有向边意味着第 $k+2$ 批次的 x_1 在第 k 批次活动的 x_2 发生2至4个时

间单位后发生. 这样, 该不确定性高通量筛选系统可由图7中含阴影部分的 H 表示.

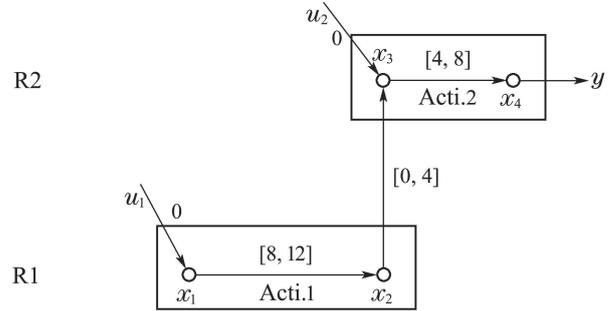


图 6 不确定性系统单批次运行方案

Fig. 6 Time scheme for a single batch of a HTS system with uncertainties

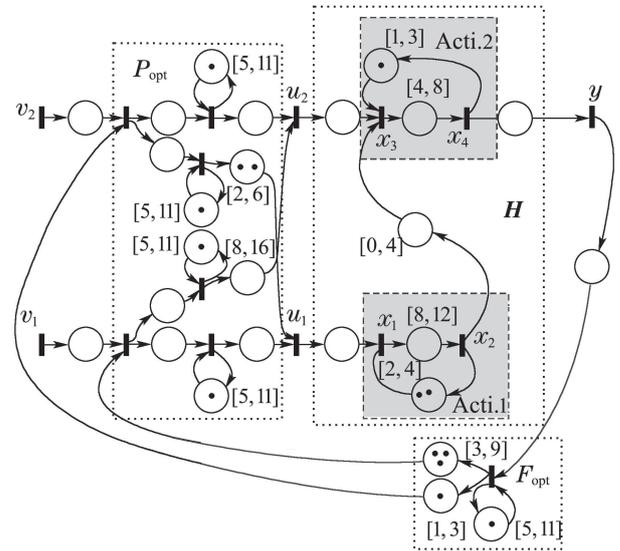


图 7 HTS控制系统赋时事件图

Fig. 7 Timed event graph for the HTS control system

图7中涉及的诸如令牌数等元素的具体意义可见表1.

对图7中该不确定 HTS 系统, 其相应系统矩阵 $A(\gamma\delta)$, $B(\gamma\delta)$, $C(\gamma\delta)$ 分别为

$$A(\gamma\delta) = \begin{bmatrix} [\varepsilon, \varepsilon] & \mathbf{A}_{(1,2)} & [\varepsilon, \varepsilon] & [\varepsilon, \varepsilon] \\ \mathbf{A}_{(2,1)} & [\varepsilon, \varepsilon] & [\varepsilon, \varepsilon] & [\varepsilon, \varepsilon] \\ [\varepsilon, \varepsilon] & \mathbf{A}_{(3,2)} & [\varepsilon, \varepsilon] & \mathbf{A}_{(3,4)} \\ [\varepsilon, \varepsilon] & [\varepsilon, \varepsilon] & \mathbf{A}_{(4,3)} & [\varepsilon, \varepsilon] \end{bmatrix},$$

$$B(\gamma\delta) = \begin{bmatrix} [\gamma^0\delta^0, \gamma^0\delta^0] & [\varepsilon, \varepsilon] \\ [\varepsilon, \varepsilon] & [\varepsilon, \varepsilon] \\ [\varepsilon, \varepsilon] & [\gamma^0\delta^0, \gamma^0\delta^0] \\ [\varepsilon, \varepsilon] & [\varepsilon, \varepsilon] \end{bmatrix},$$

$$C(\gamma\delta) = [[\varepsilon, \varepsilon] [\varepsilon, \varepsilon] [\varepsilon, \varepsilon] [\gamma^0\delta^0, \gamma^0\delta^0]].$$

其中 $A(\gamma\delta)$ 中非零元素分别如下:

$$\mathbf{A}_{(1,2)} = [\gamma^2\delta^2, \gamma^2\delta^4], \quad \mathbf{A}_{(2,1)} = [\gamma^0\delta^8, \gamma^0\delta^{12}],$$

$$\mathbf{A}_{(3,2)} = [\gamma^0\delta^0, \gamma^0\delta^4], \mathbf{A}_{(3,4)} = [\gamma^1\delta^1, \gamma^1\delta^3],$$

$$\mathbf{A}_{(4,3)} = [\gamma^0\delta^4, \gamma^0\delta^8].$$

各元素物理意义,例如,对涉及资源R1的 $\mathbf{A}_{(1,2)}$ 而言,其事件域变量 γ 的指数2表示该资源是个双容量资源,可以同时处理分属两个批次的同一活动Acti.1,新批次的开始状态 x_1 和旧批次结束状态 x_2 间有两个批次的间隔.同时,这两个状态之间还有2到4个单位的时间间隔,时间域变量 δ 的指数2和4即对应这一不确定的时间间隔.

表1 图7中元素意义

Table 1 Meanings of elements in Fig. 7

元素	意义
\mathbf{H}	不确定HTS系统本身
\mathbf{P}_{opt} 和 \mathbf{F}_{opt}	最优预处理补偿器和最优反馈控制器
\mathbf{I}	各状态\输入\输出
·的个数	(·所联系的)两 \mathbf{I} 之间相隔的批次
$[t_1, t_2]$	两 \mathbf{I} 之间相隔的不确定时间范围

对此不确定性HTS系统而言,

$$\mathbf{H} = \mathbf{CA}^*\mathbf{B} = [[\gamma^0\delta^{12}(\gamma\delta^5)^*, \gamma^0\delta^{24}(\gamma\delta^{11})^*]$$

$$[\gamma^0\delta^4(\gamma\delta^5)^*, \gamma^0\delta^8(\gamma\delta^{11})^*]].$$

若以该 \mathbf{H} 为期望性能指标,即希望 $\mathbf{H}_d = \mathbf{H}$,其中:

$$\underline{\mathbf{H}}_d = \underline{\mathbf{H}} = [\gamma^0\delta^{12}(\gamma\delta^5)^* \gamma^0\delta^4(\gamma\delta^5)^*],$$

$$\bar{\mathbf{H}}_d = \bar{\mathbf{H}} = [\gamma^0\delta^{24}(\gamma\delta^{11})^* \gamma^0\delta^8(\gamma\delta^{11})^*].$$

以 $\underline{\mathbf{H}}_d$ 为例,即意味着期望系统在启动后即进入稳态运行,每5个时间单位输出一个批次 y ,系统输出 y 在同批次的 u_1 发生12个时间单位,且同批次 u_2 发生4个时间单位后发生.对 \mathbf{H}_d 而言,因其的不确定性,期望系统每5至11个时间单位输出一个批次 y ,而输出 y 在同批次 u_1 发生12至24个时间单位,以及同批次 u_2 发生4至8个时间单位后发生.这里,对性能指标 \mathbf{H}_d 并无构造要求.

若系统共6个批次的所有输入均在第20个时间单位发生,即

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 = [\gamma^0\delta^{20} \oplus \gamma^6\delta^{+\infty}, \gamma^0\delta^{20} \oplus \gamma^6\delta^{+\infty}],$$

开环下,控制输入 $\mathbf{U} = \mathbf{V}$,由于期望性能 $\mathbf{H}_d = \mathbf{H}$,所以开环控制即可达到系统期望行为 \mathbf{H}_d .由系统输出 $\mathbf{Y} = \mathbf{H}\mathbf{V}$ 可得

$$\bar{\mathbf{Y}} = \gamma^0\delta^{44} \oplus \gamma^1\delta^{55} \oplus \gamma^2\delta^{66} \oplus \gamma^3\delta^{77} \oplus$$

$$\gamma^4\delta^{88} \oplus \gamma^5\delta^{99} \oplus \gamma^6\delta^{+\infty},$$

$$\underline{\mathbf{Y}} = \gamma^0\delta^{32} \oplus \gamma^1\delta^{37} \oplus \gamma^2\delta^{42} \oplus \gamma^3\delta^{47} \oplus$$

$$\gamma^4\delta^{52} \oplus \gamma^5\delta^{57} \oplus \gamma^6\delta^{+\infty}.$$

但考虑系统无缓冲,与系统输入 \mathbf{V} 一致的开环控制输入 \mathbf{U} 实际会造成拥堵.

为避免系统拥堵,同时确保系统输出不受影响(被延迟),在系统中同时加入最优开环补偿器 \mathbf{P}_{opt} 和最优反馈控制器 \mathbf{F}_{opt} .由式(28)和式(34)可得 \mathbf{P}_{opt} 和 \mathbf{F}_{opt} 分别如图7中相应的模块所示.其中最优预补偿器 $\mathbf{P}_{opt} = [\underline{\mathbf{P}}_{opt} \bar{\mathbf{P}}_{opt}]$ 的相应元素如下:

$$\underline{\mathbf{P}}_{opt}(\gamma\delta) = \begin{bmatrix} \gamma^0\delta^0(\gamma\delta^5)^* & \gamma^2\delta^2(\gamma\delta^5)^* \\ \gamma^0\delta^8(\gamma\delta^5)^* & \gamma^0\delta^0(\gamma^1\delta^5)^* \end{bmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{P}}_{opt}(\gamma\delta) = \begin{bmatrix} \gamma^0\delta^0(\gamma\delta^{11})^* & \gamma^2\delta^6(\gamma\delta^{11})^* \\ \gamma^0\delta^{16}(\gamma\delta^{11})^* & \gamma^0\delta^0(\gamma^1\delta^{11})^* \end{bmatrix}.$$

最优反馈控制器 $\mathbf{F}_{opt} = [\underline{\mathbf{F}}_{opt} \bar{\mathbf{F}}_{opt}]$ 的相应元素分别为

$$\underline{\mathbf{F}}_{opt} = [\gamma^3\delta^3(\gamma\delta^5)^* \gamma^1\delta^1(\gamma\delta^5)^*]^T,$$

$$\bar{\mathbf{F}}_{opt} = [\gamma^3\delta^9(\gamma\delta^{11})^* \gamma^1\delta^3(\gamma\delta^{11})^*]^T.$$

在该控制结构下,自动产生的控制输入分别为

$$\bar{u}_{1C} = \gamma^0\delta^{20} \oplus \gamma^1\delta^{31} \oplus \gamma^2\delta^{42} \oplus \gamma^3\delta^{53} \oplus$$

$$\gamma^4\delta^{64} \oplus \gamma^5\delta^{75} \oplus \gamma^6\delta^{+\infty},$$

$$\bar{u}_{2C} = \gamma^0\delta^{36} \oplus \gamma^1\delta^{47} \oplus \gamma^2\delta^{58} \oplus \gamma^3\delta^{69} \oplus$$

$$\gamma^4\delta^{80} \oplus \gamma^5\delta^{91} \oplus \gamma^6\delta^{+\infty};$$

$$\underline{u}_{1C} = \gamma^0\delta^{20} \oplus \gamma^1\delta^{25} \oplus \gamma^2\delta^{30} \oplus \gamma^3\delta^{35} \oplus$$

$$\gamma^4\delta^{40} \oplus \gamma^5\delta^{45} \oplus \gamma^6\delta^{+\infty},$$

$$\underline{u}_{2C} = \gamma^0\delta^{28} \oplus \gamma^1\delta^{33} \oplus \gamma^2\delta^{38} \oplus \gamma^3\delta^{43} \oplus$$

$$\gamma^4\delta^{48} \oplus \gamma^5\delta^{53} \oplus \gamma^6\delta^{+\infty}.$$

仿真结果如图8及图9所示.图8中,与各批次均在第20个时间单位发生的原料输入 \mathbf{V} (也即开环控制输入 \mathbf{U})相比,闭环控制在开环补偿 \mathbf{P} 及反馈 \mathbf{F} 的共同作用下,控制输入 \mathbf{U}_C 逐个批次被适当地自动推迟了,避免了系统拥堵.例如:对Acti.2,若考虑其所需最小时间即4个单位,相应的控制输入 \underline{u}_{2C} 第零批次发生在28个时间单位,第1批次则在33个时间单位进入,此时,第零批次已完成处理,从资源R2上离开了,不会发生拥堵.而若Acti.2需用时8个时间单位,控制输入 \bar{u}_{2C} 也相应调整,各批次时间36,47等也均能确保没有拥堵发生,同时兼顾了各批次间所需的3个时间单位的间隔要求.要注意的是,由于资源R1是双容量资源,可以同时处理两个批次的输入,所以当控制输入 \bar{u}_{1C} 第1批在31个时间单位发生时,即使第20个时间单位进入系统的第零批还在其12个单位的处理过程中,系统也不会拥堵.当第2批于第42个时间单位进入系统时,虽然第1批尚在处理中,但第零批已经离开资源R1,仍有效避免了拥堵.

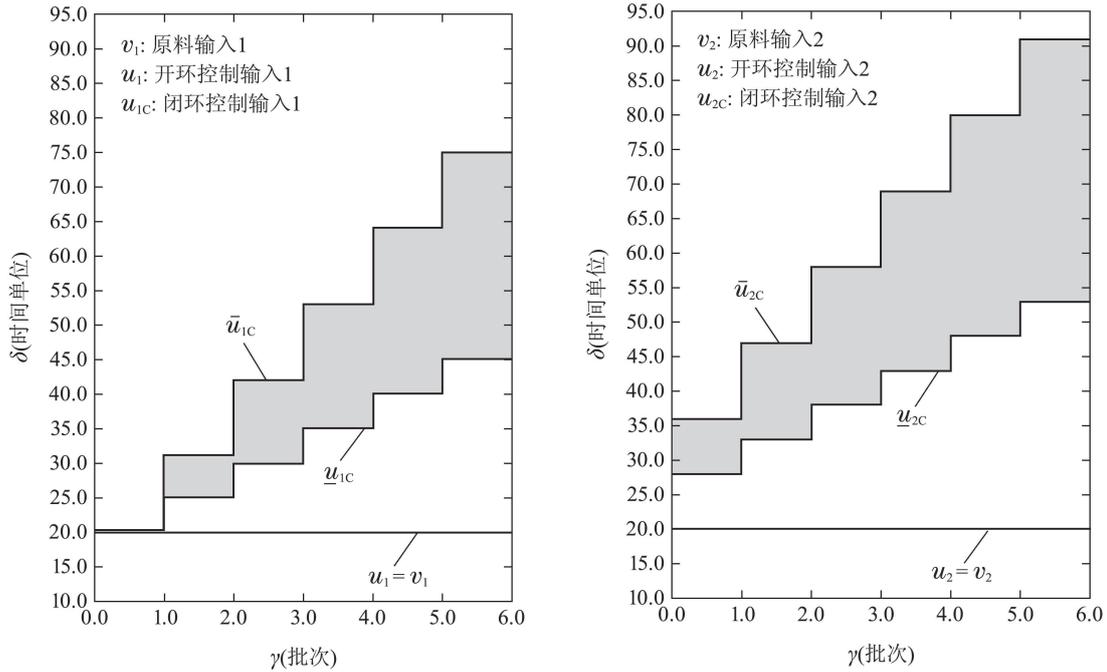


图 8 开、闭环下控制输入

Fig. 8 Open loop control input and closed loop control input

由图9可见, 闭环控制系统输出 Y_C 与开环输出, 同时也是期望的系统输出 Y 一致, 即系统输出未受延迟, 确保了单位时间内的输出量。

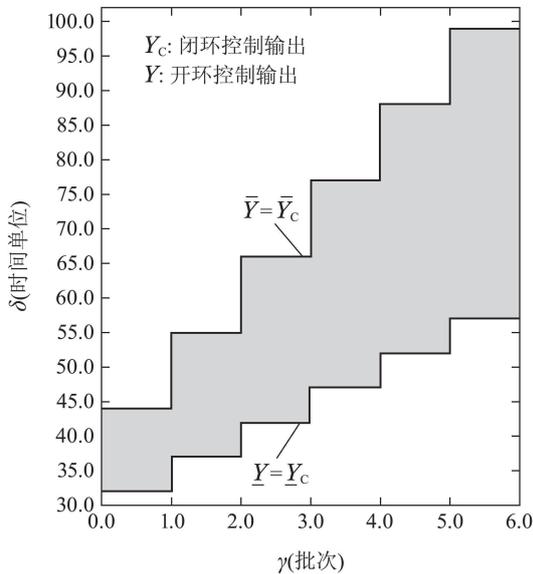


图 9 开、闭环下系统输出

Fig. 9 Open loop system output and closed loop system output

例 2 本例是德国某大型制药公司的一个高通量筛选应用实例^[1,10-11]. 该系统具有 3 个资源, 在这 3 个资源上, 一个批次的高通量筛选过程要按图 10 所示的顺序进行 6 个活动. 在筛选中, 对于各事件时间, 包括该系统各活动所需时间等都有严格要求, 但从

“Acti.2”的 r_2 到“Acti.3”的 o_3 所需的转移时间, 工艺上则是允许其为不确定的, 而不必如文[1,10-11]例中的理想情况那样严格确定在 30 个时间单位. 也就是说, 实际运行时, 该系统可能成为不确定 HTS 系统. 相比文[11]方法, 本文图 5 的控制结构将能更有效地对此系统进行控制. 篇幅关系, 以下略去过程细节, 仅对控制效果作简单对比, 有关该系统确定性情形及其输出反馈控制更具体的说明, 可见文[11]. 文[11]之前的系列先期工作, 则可分别参见文[1,10].

文[11]中, 以 $H_d = (\gamma^0 \delta^{16})(\gamma^1 \delta^{43})^*$ 为系统期望行为, 采用图 2 所示控制结构对确定性 HTS 进行了输出反馈. 然而, 图 10 所示不确定 HTS 系统本身传函为 $H = [H, \bar{H}] = [(\gamma^0 \delta^{16})(\gamma^1 \delta^{43})^*, \gamma^0 \delta^{16} \oplus \gamma^1 \delta^{59} \oplus \gamma^2 \delta^{102} \oplus (\gamma^3 \delta^{146})(\gamma^1 \delta^{43})^*]$, 若仍用上述期望行为指标 $\underline{H}_d = \bar{H}_d = H_d$ 以及图 3 控制结构(即图 2 结构的不确定性扩展), 虽然 $\underline{H} = H_d$, 但很明显, 由于 \bar{H} 的存在, 该指标并不符合优化所需的 $H_d = D^*H$ 或 HD^* 条件, 因此, 即使按此进行输出反馈, 最终得到的闭环系统行为 $\bar{H}_F = \gamma^0 \delta^{16} \oplus \gamma^1 \delta^{59} \oplus \gamma^2 \delta^{102} \oplus (\gamma^3 \delta^{146})(\gamma^1 \delta^{43})^* \succcurlyeq \bar{H}_d$, 未达到优化效果: 第 3 批次(及始于该批次的后续稳态批次)并未达到 $\bar{H}_F \preccurlyeq \bar{H}_d$ 的优化要求, 见图 11. 然而, 同样用上述期望行为指标 H_d , 结合图 5 结构, 即能达到优化目的, 使 $H_{FP} \preccurlyeq H_d$, 其中

$$\bar{H}_{FP} = \gamma^1 \delta^{58} \oplus \gamma^2 \delta^{101} \oplus \gamma^3 \delta^{144} \oplus (\gamma^4 \delta^{188})(\gamma^1 \delta^{43})^* \preccurlyeq \bar{H}_d.$$

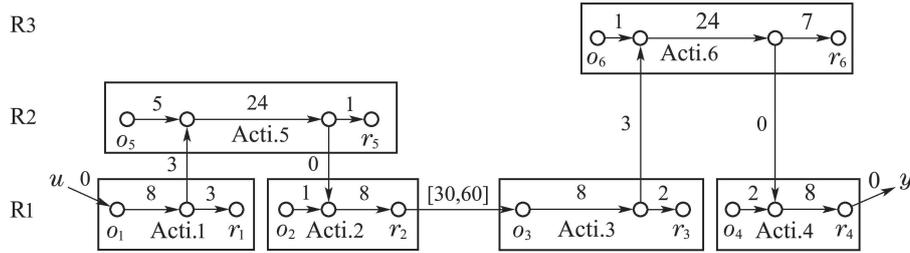


图 10 单批次运行方案

Fig. 10 Time scheme for a single batch

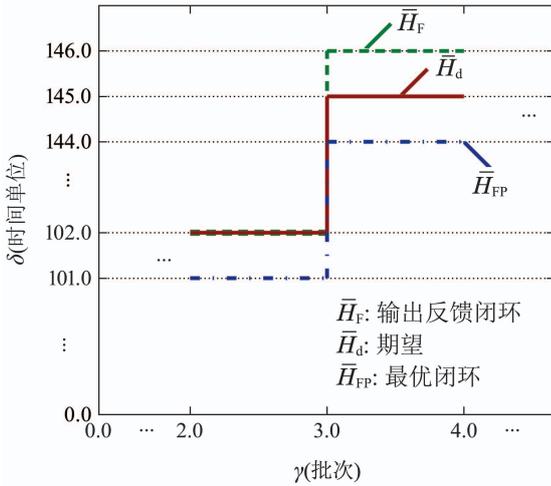


图 11 各系统行为

Fig. 11 System behaviours

5 结语

本文同时基于事件域和时间域, 针对不确定性的 高通量筛选系统, 将 $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ 双子代数框架下模型 扩展到 $I(\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta])$ 下的模型. 对于不确定性的 HTS 系统, 依然能够通过输出反馈, 实现自动优化控制. 但 由于在以期望的系统行为为性能指标进行闭环控制 时, 该指标必须满足一定的构造要求, 因此优化控制 结构, 将反馈控制与预处理补偿器结合, 避免了对该 优化指标的特殊构造要求, 达到优化目的, 提高了优 化控制效果. 最后通过高通量筛选系统应用实例进行 具体说明. 本文的控制结构下, 由于系统的不确定性, 输出也处于相应的不确定区间, 如何在有意外干扰 的情况下, 将此不确定区间减小, 提高系统的可靠性, 是 一个有意义的研究方向, 未来的工作可以以此为基础 展开.

参考文献:

[1] MAYER E, RAISCH J. Time-optimal scheduling for high throughput screening processes using cyclic discrete event models. *Mathematics & Computers in Simulation*, 2004, 66(2/3): 181 – 191.

[2] GEYER F. *Analyse und optimierung zyklischer ereignisdiskreter systeme mit reihenfolgealternativen*. Germany: Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, 2004.

[3] LI D. *A Hierarchical Control Structure for a Class of Timed Discrete Event Systems*. Berlin: Fachgebiet Regelungssysteme, Technische Universität Berlin, 2008.

[4] BRUNSCH T, RAISCH J, HARDOUIN L. Modeling and control of high-throughput screening systems. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 2012, 20(1): 14 – 23.

[5] SHANG Y, HARDOUIN L, LHOMMEAU M, et al. An integrated control strategy in disturbance decoupling of max-plus linear systems with applications to a high throughput screening system in drug discovery. *2014 IEEE 53rd Annual Conference on Decision and Control (CDC)*. New York: IEEE, 2014: 5143 – 5148.

[6] SHANG Y, HARDOUIN L, LHOMMEAU M, et al. An integrated control strategy to solve the disturbance decoupling problem for max-plus linear systems with applications to a high throughput screening system. *Automatica*, 2016, 63(C): 338 – 348.

[7] SHANG Y, HARDOUIN L, LHOMMEAU M, et al. Robust controllers in disturbance decoupling of uncertain max-plus linear systems: an application to a high throughput screening system for drug discovery. *2016 the 13th International Workshop on Discrete Event Systems (WODES)*. New York: IEEE, 2016: 404 – 409.

[8] HARDOUIN L, BOUTIN O, COTTENCEAU B, et al. *Discrete-event systems in a dioid framework: control theory //Control of Discrete-Event Systems*. London: Springer, 2013.

[9] BRUNSCH T, RAISCH J, HARDOUIN L, et al. *Discrete-event systems in a dioid framework: modeling and analysis //Control of Discrete-Event Systems*. London: Springer, 2013.

[10] LI Danjing. Dioid-based modeling of high throughput screening systems. *Control Theory & Applications*, 2017, 34(5): 619 – 626. (李丹菁. 高通量筛选系统的双子代数建模. 控制理论与应用, 2017, 34(5): 619 – 626.)

[11] LI Danjing. Dioid-based optimal control for high throughput screening systems. *Control Decision*, 2017, 32(9): 1681 – 1688. (李丹菁. 基于双子代数的高通量筛选系统优化控制. 控制与决策, 2017, 32(9): 1681 – 1688.)

[12] LHOMMEAU M, HARDOUIN L, COTTENCEAU B, et al. Interval analysis and dioid: application to robust controller design for timed event graphs. *Automatica*, 2004, 40(11): 1923 – 1930.

[13] COTTENCEAU B, HARDOUIN L, BOIMOND J L, et al. Model reference control for timed event graphs in dioids. *Automatica*, 2001, 37(9): 1451 – 1458.

[14] BLYTH T S, JANOWITZ M F. *Residuation Theory*. Oxford: Pergamon Press, 1972.

[15] BACCELLI F, COHEN G, OLSDER G J, et al. *Synchronization and Linearity, An Algebra for Discrete Event Systems*. New York: John Wiley and Sons, 1992.

[16] LITVINOV G L, SOBOLEVSKI A N. Idempotent interval analysis and optimization problems. *Reliable Computing*, 2001, 7(5): 353 – 377.

作者简介:

李丹菁 博士, 讲师, 硕士生导师, 目前研究方向为离散事件系统控制、混杂系统控制等, E-mail: danjing.li@sit.edu.cn;

韦 萍 硕士研究生, 研究方向为离散事件系统控制、混杂系统控制, E-mail: 13122004506@163.com.