线性系统传感器故障的区间估计

张文瀚, 王振华†, 沈 毅
(哈尔滨工业大学 航天学院, 黑龙江 哈尔滨 150001)

摘要: 本文研究了离散时间线性系统传感器故障的区间估计问题. 通过将传感器故障视为增广状态, 原始系统转化为一个等效的广义系统. 基于所得到的广义系统, 利用H_∞技术设计鲁棒增广状态观测器, 从而得到系统传感器故障的估计. 然后通过中心对称多胞体分析以实现对故障的区间估计. 与已有的方法相比, 本文所提出的方法具有更宽松的设计条件, 并且可以得到更加准确的故障区间估计. 最后, 通过一个四容水箱系统的数值仿真验证了所提方法的有效性和优越性.

关键词: 中心对称多胞体; 传感器故障; 离散时间线性系统; 状态观测器

引用格式: 张文瀚, 王振华, 沈毅. 线性系统传感器故障的区间估计. 控制理论与应用, 2019, 36(6): 923 – 930

DOI: 10.7641/CTA.2018.70947

Interval estimation of sensor fault for linear systems

ZHANG Wen-han, WANG Zhen-hua†, SHEN Yi
(School of Astronautics, Harbin Institute of Technology, Harbin Heilongjiang 150001, China)

Abstract: This paper studies the problem of sensor fault interval estimation for discrete-time linear systems. First, the original system is transformed into an equivalent descriptor system by considering the sensor fault as augmented state. Second, the robust augmented state observer is designed by using the H_∞ technique to estimate the sensor fault. The proposed method uses the zonotpoes to realize the interval estimation of the fault. Compared with the existing methods, the proposed method has more relaxed design conditions and can obtain more accurate fault interval estimation. Finally, numerical simulations of a quadruple-tanks system are given to illustrate the effectiveness and superiority of the proposed approach.

Key words: zonotopes; sensor fault; discrete-time linear systems; state observer

Citation: ZHANG Wenhan, WANG Zhenhua, SHEN Yi. Interval estimation of sensor fault for linear systems. *Control Theory & Applications*, 2019, 36(6): 923 – 930

1 引言

对于自动控制系统而言, 其安全性和可靠性是至关重要的. 一旦自动控制系统发生故障, 可能会造成重大的财产损失和人员伤亡[1]. 传感器作为自动控制系统的重要组成部分, 是系统实现闭环控制的重要信息来源. 但是, 由于运行条件和器件老化等因素的影响, 传感器故障是难以完全避免的. 因此, 为了提高控制系统的安全性和可靠性, 必须及时地诊断出故障并采取应对措施, 让故障对系统造成的损害最小. 故障诊断的任务主要可以分为故障检测、故障分离和故障估计, 其中故障检测和故障分离的目的是判断系统是否出现了故障以及确定故障出现的位置, 故障估计则是为了获得故障的幅值信息. 故障诊断的方法主要可以分为基于模型的方法、基于知识的方法和基于信号处理的方法, 其中基于模型的故障诊断被研究的最为深入, 提出了基于观测器、基于等价空间和基于滤波器等很多较为成熟的方法[2]. 但是, 这些方法主要解决的是故障的检测与分离问题, 对于故障估计的问题研究的并不深入. 由于故障的幅值信息是主动容错控制的主要基础, 因此近些年来基于模型的故障估计问题受到了一定的重视.

实际系统的运行过程中总存在着不可避免的未知噪声和干扰[3], 这会大大降低基于模型的故障估计方法的效果. 为了解决这一问题, 有些学者在进行故障估计的同时考虑系统的鲁棒性, 从而抑制未知噪声和干扰的影响以提高故障估计的准确性. 但是这些传统的故障估计方法大部分都假设噪声和未知干扰符合一定的概率分布, 同时需要获知有关干扰的较多信息,

收稿日期: 2017−12−21; 录用日期: 2018−06−05.
†通信作者. E-mail: zhenhua.wang@hit.edu.cn; Tel.: +86 451-86413411-8602.
本文责任编委: 周东华.
国家自然科学基金项目(61773145, 61403104), 哈尔滨工业大学深空探测、着陆与返回技术国防重点学科基金项目(HIT.KLOF.2018.073)资助.
Supported by the National Natural Science Foundation of China (61773145, 61403104) and the Funds from the National Defense Key Discipline of Space Exploration, Landing and Reentry in Harbin Institute of Technology (HIT.KLOF.2018.073).

如缓慢变化、微分有界等. 但在很多的实际系统中, 关于噪声和干扰的先验知识一般很难得到, 这在一定程度上限制了现有方法的应用. 近些年来, 有些学者开始将集员估计技术应用到系统的故障估计中, 集员估计的优势在于它只假设系统的干扰和噪声是未知但有界的, 这一点在很多系统中都可以得到保证[4]. 集员估计通过得到一个包含故障的可行集来得到系统故障的估计, 一般情况下包含故障的可行集范围很难精确描述, 因此集员估计往往通过寻找能够包含可行集的简单几何体来近似可行集进而实现故障估计. 常用的几何体包括椭球、普通多面体和中心对称多胞体(zonotope)等. 基于椭球的集员估计方法被研究得最多, 取得了大量的研究成果[5–7], 但是利用椭球来近似可行集存在保守性较大的问题. 同时, 基于普通多面体的集员估计的计算复杂度会随着多面体维数增大而指数增加, 带来了巨大的计算成本[8]. 基于中心对称多胞体的集员估计方法能够转化成简单的矩阵运算, 计算量较小, 而且保守性比基于椭球和普通多面体的方法小, 因此近些年来受到了很多学者关注并取得了很多的研究成果[9–13].

基于中心对称多胞体的集员估计作为一种区间估计的方法[14–17], 可以在时间采样序列中求取近似可达集来给出区间估计结果, 所以能够用来生成故障的动态估计值. 本文针对存在噪声和未知干扰以及传感器故障的离散时间线性系统, 把传感器故障视为增广状态将原系统转化为增广系统, 针对增广系统设计状态观测器, 并利用中心对称多胞体技术估计出原系统中的传感器故障的上、下界. 本文提出的方法充分发挥了中心对称多胞体估计的优点, 能够在系统干扰和噪声未知但有界的情况下实现对传感器故障的区间估计, 提出了一种新的传感器故障区间估计方法.

2 问题描述

本文研究受传感器故障影响的离散时间线性系统, 其数学模型如下:

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + D_1 w_k, \\ y_k = Cx_k + Ff_k + D_2 v_k, \end{cases} \tag{1}$$

其中: $x_k \in \mathbb{R}^n$是状态向量, $u_k \in \mathbb{R}^m$是输入向量, $y_k \in \mathbb{R}^p$是输出向量, $f_k \in \mathbb{R}^s$是传感器故障, w_k, v_k分别为系统受到的未知过程干扰和测量噪声; A, B, C, D_1, D_2, F是具有适当维数的常数矩阵. 不失一般性, 假设F列满秩且$s \leqslant p$.

本文采用中心对称多胞体对系统传感器故障进行区间估计, 首先给出中心对称多胞体的定义:

定义 1 一个s阶中心对称多胞体$\mathcal{Z} \subset \mathbb{R}^n$是超立方体$B^s = [-1, +1]^s$的仿射变换, 即

$$\mathcal{Z} = p \oplus HB^s = \{p + Hz, z \in B^s\}, \tag{2}$$

其中: $\oplus$为闵科夫斯基和, 常向量$p \in \mathbb{R}^n$称为$\mathcal{Z}$的中心, $H \in \mathbb{R}^{n\times s}$称为$\mathcal{Z}$的生成矩阵. 为了简化符号, 用$\mathcal{Z} = \langle p, H\rangle$描述中心对称多胞体$\mathcal{Z}$.

不失一般性, 假设系统(1)的状态变量初值, 过程干扰和测量噪声均为未知但有界的, 且满足

$$\begin{cases} x_0 \in \mathcal{X}_0 = \langle p_0, X_0\rangle, \\ w_k \in \mathcal{W} = \langle 0, W\rangle, \\ v_k \in \mathcal{V} = \langle 0, V\rangle, \end{cases} \tag{3}$$

其中: $\mathcal{X}_0, \mathcal{W}, \mathcal{V}$为分别包含$x_0, w_k, v_k$所有可能值的中心对称多胞体, p_0, X_0, W和V是已知的向量和矩阵.

为了估计故障f_k, 将其视为增广状态, 可以得到如下的增广状态向量:

$$\bar{x}_k = [x_k^{\mathrm{T}} \quad f_k^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}, \tag{4}$$

并构造出如下的增广系统:

$$\begin{cases} E\bar{x}_{k+1} = \bar{A}\bar{x}_k + \bar{B}u_k + \bar{D}_1 w_k, \\ y_k = \bar{C}\bar{x}_k + D_2 v_k, \end{cases} \tag{5}$$

其中:

$$E = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0_s \end{bmatrix},\ \bar{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0_s \end{bmatrix},\ \bar{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0_s \end{bmatrix},$$

$$\bar{C} = [C \ \ F],\ \bar{D}_1 = \begin{bmatrix} D_1 \\ 0_s \end{bmatrix}.$$

显然, 增广系统(5)是一个广义系统. 需要说明的是, 上述增广过程并未采用任何的假设, 所以广义系统(5)与原系统(1)完全等价. 因此, 若广义系统(5)存在一个状态观测器, 则可估计出广义系统(5)中的增广状态, 所以也就可以实现对原始系统(1)中传感器故障f_k的区间估计.

本文的目标是针对系统(5)设计状态观测器, 并在此基础上使用中心对称多胞体对传感器故障进行区间估计. 对系统(5)构造如下形式的状态观测器:

$$\hat{\bar{x}}_{k+1} = T\bar{A}\hat{\bar{x}}_k + T\bar{B}u_k + L(y_k - \bar{C}\hat{\bar{x}}_k) + Ny_{k+1}, \tag{6}$$

其中: $\hat{\bar{x}}_k \in \mathbb{R}^{(n+s)}$是广义状态$\bar{x}_k$的估计向量; $T \in \mathbb{R}^{(n+s)\times(n+s)}$, $N \in \mathbb{R}^{(n+s)\times p}$和$L \in \mathbb{R}^{(n+s)\times p}$是待设计的参数矩阵, 且矩阵$T$和$N$需满足如下的等式约束:

$$TE + N\bar{C} = I_{n+s}, \tag{7}$$

其中I_{n+s}表示$(n+s)\times(n+s)$维单位矩阵.

3 广义系统状态观测器设计

本节的目标是针对广义系统(5)设计一个状态观测器, 具体的就是确定出状态观测器(6)中的未知参数矩阵, 首先给出求解参数矩阵T和N需要用到的引理.

引理 1[18]　对于如下矩阵$X \in \mathbb{R}^{a\times b}$, $Y \in \mathbb{R}^{b\times c}$, $Z \in \mathbb{R}^{a\times c}$. 如果$\mathrm{rank}(Y) = c$, 则方程

$$XY = Z \tag{8}$$

的通解为

$$X = ZY^\dagger + H[I_b - YY^\dagger], \tag{9}$$

其中: $H \in \mathbb{R}^{a\times b}$为任意矩阵, $Y^\dagger$表示矩阵Y的伪逆.

注意到广义系统(5)中的E和$\bar{C}$满足

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} E \\ \bar{C}\end{bmatrix} = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0_s \\ C & F\end{bmatrix} = n + s, \tag{10}$$

则根据引理1可得$[T\ \ N]$的通解为

$$[T\ \ N] = \begin{bmatrix} E \\ \bar{C}\end{bmatrix}^\dagger + S(I_{n+s+p} - \begin{bmatrix} E \\ \bar{C}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} E \\ \bar{C}\end{bmatrix}^\dagger), \tag{11}$$

其中$S \in \mathbb{R}^{(n+s)\times(n+s+p)}$是可任意选取的矩阵.

参数矩阵T和N确定后, 则由式(5)和式(7)可得

$$\begin{aligned}&\bar{x}_{k+1} = (TE + N\bar{C})\bar{x}_{k+1} = \\ &T\bar{A}\bar{x}_k + T\bar{B}u_k + Ny_{k+1} + T\bar{D}_1 w_k - ND_2 v_{k+1}.\end{aligned} \tag{12}$$

定义$e_k = \bar{x}_k - \hat{\bar{x}}_k$, 由式(6)和式(12)可得

$$\begin{aligned}e_{k+1} =\ &(T\bar{A} - L\bar{C})e_k + T\bar{D}_1 w_k - LD_2 v_k - \\ &ND_2 v_{k+1}.\end{aligned} \tag{13}$$

为了简化符号, 将式(13)写成如下形式:

$$e_{k+1} = \tilde{A}e_k + \tilde{B}d_k, \tag{14}$$

其中:

$$\begin{aligned}&\tilde{A} = T\bar{A} - L\bar{C}, \\ &\tilde{B} = [T\bar{D}_1\ \ -LD_2\ \ -ND_2], \\ &d_k = [w_k^{\mathrm{T}}\ \ v_k^{\mathrm{T}}\ \ v_{k+1}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}.\end{aligned}$$

为了求解参数矩阵L, 给出如下定理:

定理 1　对于给定的标量$\gamma > 0$, 如果存在正定矩阵$P \in \mathbb{R}^{(n+s)\times(n+s)}$和矩阵$W \in \mathbb{R}^{(n+s)\times p}$使得如下不等式成立:

$$\begin{bmatrix} -P+I & * & * & * & * \\ 0 & -\gamma^2 I & * & * & * \\ 0 & 0 & -\gamma^2 I & * & * \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma^2 I & * \\ PT\bar{A} - W\bar{C} & PT\bar{D}_1 & -WD_2 & -PND_2 & -P\end{bmatrix} < 0, \tag{15}$$

则系统(14)是稳定的, 并且满足$\|e\| < \gamma\|d\|$, 其中$\|e\|$和$\|d\|$表示e_k和d_k的L_2范数. 如果式(15)中的线性矩阵不等式可解的话, 则矩阵L可由$L = P^{-1}W$ 求得.

证　由有界实引理[19]可知, 对于给定的标量$\gamma > 0$, 当存在一个对称正定矩阵P使得如下不等式成立:

$$\begin{bmatrix}\tilde{A}P\tilde{A}^{\mathrm{T}} - P + I & * \\ \tilde{B}^{\mathrm{T}}P\tilde{A} & \tilde{B}^{\mathrm{T}}P\tilde{B} - \gamma^2 I\end{bmatrix} < 0, \tag{16}$$

则系统(14)是稳定的, 并且满足$\|e\| < \gamma\|d\|$.

式(16)不是一个标准的线性矩阵不等式, 因此采用Schur补引理[20]可将式(16)变为

$$\begin{bmatrix} -P+I & * & * \\ 0 & -\gamma^2 I & * \\ P\tilde{A} & P\tilde{B} & -P\end{bmatrix} < 0. \tag{17}$$

将$\tilde{A}, \tilde{B}$代入到式(17)中可得

$$\begin{bmatrix} -P+I & * & * & * & * \\ 0 & -\gamma^2 I & * & * & * \\ 0 & 0 & -\gamma^2 I & * & * \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma^2 I & * \\ P(T\bar{A} - L\bar{C}) & PT\bar{D}_1 & -PLD_2 & -PND_2 & -P\end{bmatrix} < 0.$$

令$W = PL$, 即可得到式(15).　　证毕.

至此, 已经确定出所有的待设计得参数矩阵, 完成了针对广义系统(5)的状态观测器设计.

4　传感器故障的区间估计

为了实现对系统(1)中传感器故障的区间估计, 需要引入中心对称多胞体$\mathcal{Z} = \langle p, H\rangle$的如下性质[21]:

$$\langle p_1, H_1\rangle \oplus \langle p_2, H_2\rangle = \langle p_1 + p_2, [H_1\ H_2]\rangle, \tag{18a}$$

$$L \odot \langle p, H\rangle = \langle Lp, LH\rangle, \tag{18b}$$

$$\langle p, H\rangle \subseteq \langle p, \bar{H}\rangle, \tag{18c}$$

其中: $p, p_1, p_2 \in \mathbb{R}^n, H, H_1, H_2 \in \mathbb{R}^{n\times s}$, $\odot$表示线性映射, $L \in \mathbb{R}^{l\times n}$为适当维数的矩阵, $\bar{H} \in \mathbb{R}^{n\times n}$是对角矩阵, 其对角元素为

$$\bar{H}_{i,i} = \sum_{j=1}^{s} |H_{i,j}|,\ i = 1, \cdots, n. \tag{19}$$

在使用中心对称多胞体进行传感器故障的区间估计时, 随着时间的推移, 估计故障范围所需要的中心对称多胞体阶数就会不断增加, 最终导致无法计算, 所以有必要寻找降低中心对称多胞体阶数的方法, 文献[24]提出了一种较为简单的方法:

引理 2[22]　对于给定的中心对称多胞体$\mathcal{Z} = p \oplus HB^s \subset \mathbb{R}^n$, 将生成矩阵$H$的每一列按照欧式范数的大小降序排列得到新的矩阵$\hat{H}$, 则有

$$\mathcal{Z} \subseteq p \oplus \mathcal{R}_q(H)B^q\ (n \leqslant q \leqslant s), \tag{20}$$

其中: $\mathcal{R}_q(H) = [H_T\quad Q]$, H_T由$\hat{H}$的前$q-n$列组成, $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$是一个对角矩阵,其对角元素为

$$Q_{i,i} = \sum_{j=q-n+1}^{s} |\hat{H}_{i,j}|,\ i = 1, \cdots, n. \tag{21}$$

下面介绍采用中心对称多胞体对系统(1)的传感器故障进行区间估计时所使用的定理.

定理 2 当系统(5)满足$w_k \in \mathcal{W} = \langle 0, W\rangle$且$v_k \in \mathcal{V} = \langle 0, V\rangle$时, 则可得其在任意$k$时刻的状态变量$\bar{x}_k \in \bar{\mathcal{X}}_k$且$\bar{\mathcal{X}}_k$由下式给出:

$$\bar{\mathcal{X}}_k = \langle \hat{\bar{x}}_k, \hat{H}_k \rangle, \tag{22}$$

其中: $\hat{\bar{x}}_k$由式(6)中的状态观测器给出, $\hat{H}_k$具有如下的递推形式:

$$\hat{H}_{k+1} = [(T\bar{A}-L\bar{C})\mathcal{R}_q(\hat{H}_k)\ \ T\bar{D}_1W\ \ LD_2V\ \ \ ND_2V].$$

证 由e_k的定义有$\bar{x}_k = \hat{\bar{x}}_k + e_k$, 其中$\hat{\bar{x}}_k$由式(6)中的状态观测器给出. 因此, 可以将$\bar{x}_k$区间估计转换为误差的$e_k$区间估计, 只要得到了误差$e_k$的区间估计就可以得到系统状态$\bar{x}_k$的区间估计. 由式(13)可知系统误差$e_k$只受$w_k$和$v_k$的影响.

不失一般性, 可假设增广系统k时刻的误差$e_k \in \hat{\mathcal{E}}_k = \langle 0, \hat{H}_k\rangle$, 由等式$\bar{x}_k = \hat{\bar{x}}_k + e_k$可得

$$\bar{x}_k \in \bar{\mathcal{X}}_k = \hat{\bar{x}}_k \oplus \hat{\mathcal{E}}_k = \langle \hat{\bar{x}}_k, \hat{H}_k\rangle. \tag{23}$$

由式(13)可知, 系统$k+1$时刻的误差$e_{k+1} \in \mathcal{E}_{k+1} = \langle 0, H_{k+1}\rangle$且$\mathcal{E}_{k+1}$可被更新为

$$\mathcal{E}_{k+1} = \langle 0, H_{k+1}\rangle = (T\bar{A}-L\bar{C})\odot\hat{\mathcal{E}}_k \oplus T\bar{D}_1\odot\mathcal{W}\oplus LD_2\odot\mathcal{V}\oplus ND_2\odot\mathcal{V}. \tag{24}$$

由中心对称多胞体的性质(18a)与(18b)可得

$$H_{k+1} = [(T\bar{A}-L\bar{C})\hat{H}_k\ \ T\bar{D}_1W\ \ LD_2V\ \ ND_2V].$$

再由引理2可得到$\mathcal{E}_k = \langle 0, \hat{H}_k\rangle \subseteq \langle 0, \mathcal{R}_q(\hat{H}_k)\rangle$, 易知$\langle 0, H_{k+1}\rangle \subseteq \langle 0, \hat{H}_{k+1}\rangle$, 其中$\hat{H}_{k+1}$由下式给出:

$$\hat{H}_{k+1} = [(T\bar{A}-L\bar{C})\mathcal{R}_q(\hat{H}_k)\ \ \ T\bar{D}_1W\ \ \ LD_2V\ \ \ ND_2V]. \tag{25}$$

令$\hat{\mathcal{E}}_{k+1} = \langle 0, \hat{H}_{k+1}\rangle$, 且有$\mathcal{E}_{k+1} = \langle 0, H_{k+1}\rangle$, 则可得$\mathcal{E}_{k+1} \subseteq \hat{\mathcal{E}}_{k+1}, e_{k+1} \in \hat{\mathcal{E}}_{k+1} = \langle 0, \hat{H}_{k+1}\rangle$. 证毕.

由式(18c)可求得一个能够包含中心对称多胞体的区间盒子, 因此可得增广状态向量$\bar{x}$的上界$\bar{x}_k^+$和下界$\bar{x}_k^-$的表达式为

$$\begin{cases} \bar{x}_k^+(i) = \hat{\bar{x}}_k(i) + \sum\limits_{j=1}^{s} |\hat{H}_k(i,j)|,\ i=1,\cdots,n+s, \\ \bar{x}_k^-(i) = \hat{\bar{x}}_k(i) - \sum\limits_{j=1}^{s} |\hat{H}_k(i,j)|,\ i=1,\cdots,n+s. \end{cases}$$

由此可得系统(1)传感器故障f_k的上界f_k^+和下界f_k^-的表达式为

$$\begin{cases} f_k^+(i-n) = \bar{x}_k^+(i),\ i = n+1,\cdots,n+s, \\ f_k^-(i-n) = \bar{x}_k^-(i),\ i = n+1,\cdots,n+s, \end{cases}$$

其中s是$\hat{H}_k$的列数.

5 仿真结果

本节通过文献[23]中的一个四容水箱系统来验证所提出方法的有效性和优越性.

水箱系统的示意图如图1所示, 该系统的动态模型可以写成下列的形式:

$$\begin{cases} \dot{h}_1(t) = -\frac{a_1}{A_1}\sqrt{2\mathrm{g}h_1(t)} + \frac{a_3}{A_1}\sqrt{2\mathrm{g}h_3(t)} + \frac{\gamma_1 k_1}{A_1}v_1(t), \\ \dot{h}_2(t) = -\frac{a_2}{A_2}\sqrt{2\mathrm{g}h_2(t)} + \frac{a_4}{A_2}\sqrt{2\mathrm{g}h_4(t)} + \frac{\gamma_2 k_2}{A_2}v_2(t), \\ \dot{h}_3(t) = -\frac{a_3}{A_3}\sqrt{2\mathrm{g}h_3(t)} + \frac{(1-\gamma_2)k_2}{A_3}v_2(t), \\ \dot{h}_4(t) = -\frac{a_4}{A_4}\sqrt{2\mathrm{g}h_4(t)} + \frac{(1-\gamma_1)k_1}{A_4}v_1(t), \end{cases}$$

其中: v_1, v_2是泵的输入电压, γ_1, γ_2是阀门的比例系数, k_1, k_2是泵的比例系数, A_i是第i个水箱的横截面面积, a_i是第i个水箱出水管的横截面面积, $h_i(t)$是第i个水箱t时刻的水面高度, g是重力加速度.

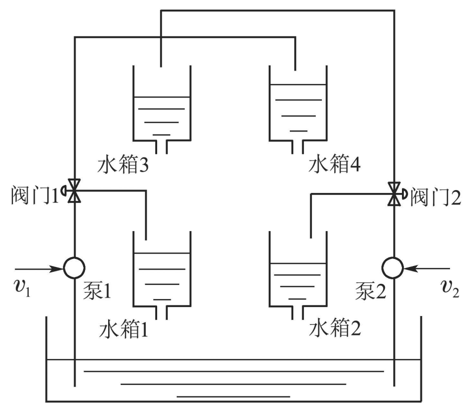

图 1 四容水箱系统示意图

Fig. 1 Schematic diagram of the quadruple-tanks system

注意到, 此为一个非线性模型, 利用泰勒展开对其进行线性化处理后可得到如下的状态空间方程:

$$\begin{cases} \Delta\dot{h}_1(t) = \frac{\gamma_1 k_1}{A_1}\Delta v_1(t) - \frac{a_1}{A_1}\sqrt{\frac{\mathrm{g}}{2\bar{h}_1}}\Delta h_1(t) + \\ \qquad \frac{a_3}{A_1}\sqrt{\frac{\mathrm{g}}{2\bar{h}_3}}\Delta h_3(t), \\ \Delta\dot{h}_2(t) = \frac{\gamma_2 k_2}{A_2}\Delta v_2(t) - \frac{a_2}{A_2}\sqrt{\frac{\mathrm{g}}{2\bar{h}_2}}\Delta h_2(t) + \\ \qquad \frac{a_4}{A_2}\sqrt{\frac{\mathrm{g}}{2\bar{h}_4}}\Delta h_4(t), \\ \Delta\dot{h}_3(t) = -\frac{a_3}{A_3}\sqrt{\frac{\mathrm{g}}{2\bar{h}_3}}\Delta h_3(t) + \frac{(1-\gamma_2)k_2}{A_3}\Delta v_2(t), \\ \Delta\dot{h}_4(t) = -\frac{a_4}{A_4}\sqrt{\frac{\mathrm{g}}{2\bar{h}_4}}\Delta h_4(t) + \frac{(1-\gamma_1)k_1}{A_4}\Delta v_1(t), \end{cases}$$

其中: $\Delta h_i(t) = h_i(t) - \bar{h}_i(i = 1,2,3,4,\ \bar{h}_i)$为稳态时的各个水箱的水面高度; $\Delta v_i(t) = v_i(t) - \bar{v}_i, i = 1,2, \bar{v}_i$为稳态时各个泵的输入电压.

令

$$x(t)=\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\x_3(t)\\x_4(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\Delta h_1(t)\\\Delta h_2(t)\\\Delta h_3(t)\\\Delta h_4(t)\end{bmatrix}\ \mathrm{cm},$$

$$u(t)=\begin{bmatrix}u_1(t)\\u_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\Delta v_1(t)\\\Delta v_2(t)\end{bmatrix}\ \mathrm{V},$$

$$y(t)=\begin{bmatrix}y_1(t)\\y_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k_\mathrm{c}x_1(t)\\k_\mathrm{c}x_2(t)\end{bmatrix}\ \mathrm{V},$$

则可以得到如下形式的状态空间方程:

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}-m_1 & 0 & \dfrac{A_3m_3}{A_1} & 0\\ 0 & -m_2 & 0 & \dfrac{A_4m_4}{A_2}\\ 0 & 0 & -m_3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -m_4\end{bmatrix}x(t)+\\ \begin{bmatrix}\dfrac{\gamma_1k_1}{A_1} & 0\\ 0 & \dfrac{\gamma_2k_2}{A_2}\\ 0 & \dfrac{(1-\gamma_2)k_2}{A_3}\\ \dfrac{(1-\gamma_1)k_1}{A_4} & 0\end{bmatrix}u(t),\\ y(t)=\begin{bmatrix}k_\mathrm{c} & 0 & 0 & 0\\ 0 & k_\mathrm{c} & 0 & 0\end{bmatrix}x(t),\end{cases}$$

其中: $m_i=-\dfrac{a_i}{A_i}\sqrt{\dfrac{\mathrm{g}}{2\bar{h}_i}}(i=1,2,3,4)$, k_c为输出电压比例系数.

假设系统的相关参数为 $\gamma_1=0.665, \gamma_2=0.566$, $k_1=k_2=3.35\ \mathrm{cm^3/Vs}, A_1=A_3=28\ \mathrm{cm}^2, A_2=A_4=32\ \mathrm{cm}^2,\ a_1=a_3=0.071\ \mathrm{cm}^2, a_2=a_4=0.057\ \mathrm{cm}^2, k_\mathrm{c}=0.5\ \mathrm{V/cm}, \mathrm{g}=9.81\ \mathrm{m/s^2}$. 设仿真采样周期为$\mathrm{d}t=1\ \mathrm{s}$, 对四容水箱系统利用欧拉一步法进行离散化, 考虑系统受到的未知过程干扰和测量噪声并假设系统发生传感器故障, 则可得到形式如式(1)的离散系统, 相关的参数矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}0.9841 & 0 & 0.0419 & 0\\ 0 & 0.9888 & 0 & 0.0294\\ 0 & 0 & 0.9581 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0.9706\end{bmatrix},$$

$$B=\begin{bmatrix}0.0796 & 0\\ 0 & 0.0593\\ 0 & 0.0519\\ 0.0351 & 0\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}0.5 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0.5 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

$$D_1=\begin{bmatrix}0.0718\\ 0\\ 0.0718\\ 0\end{bmatrix},\ D_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\ F=\begin{bmatrix}1.2\\ 1.5\end{bmatrix},$$

则可得广义系统(5)的矩阵参数为

$$\bar{A}=\begin{bmatrix}0.9841 & 0 & 0.0419 & 0 & 0\\ 0 & 0.9888 & 0 & 0.0294 & 0\\ 0 & 0 & 0.9581 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0.9706 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

$$\bar{B}=\begin{bmatrix}0.0796 & 0\\ 0 & 0.0593\\ 0 & 0.0519\\ 0.0351 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\ \bar{C}=\begin{bmatrix}0.5 & 0 & 0 & 0 & 1.2\\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 1.5\end{bmatrix},$$

$$\bar{D}_1=\begin{bmatrix}0.0718\\ 0\\ 0.0718\\ 0\\ 0\end{bmatrix},\ E=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix},\ D_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}.$$

在仿真中, 选取S矩阵为

$$S=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0\end{bmatrix}.$$

经过式(11)求解计算可以得到矩阵T和矩阵N分别为

$$T=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ -0.1626 & -0.2033 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

$$N=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\\ 0.3252 & 0.4065\end{bmatrix}.$$

然后通过求解线性矩阵不等式(15)可得矩阵P和矩阵W分别为

$$P=\begin{bmatrix}62.2480 & -12.0041 & -52.5381\\ -12.0041 & 214.0702 & 12.8367\\ -52.5381 & 12.8367 & 211.2192\\ -3.8177 & 54.5329 & 20.4694\\ 8.5286 & 10.6271 & 0.3801\end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} -3.8177 & 8.5286 \\ 54.5329 & 10.6271 \\ 20.4694 & 0.3801 \\ 286.2931 & -0.0402 \\ -0.0402 & 52.3004 \end{matrix}\right],$$

$$W = \begin{bmatrix} 5.8081 & -4.8365 \\ -4.6053 & 3.7006 \\ -0.2381 & 0.4198 \\ 0.0134 & -0.0770 \\ 0.2854 & 0.0398 \end{bmatrix}.$$

再由等式$L = P^{-1}W$可得

$$L = \begin{bmatrix} 0.1156 & -0.0962 \\ -0.0169 & 0.0132 \\ 0.0284 & -0.0225 \\ 0.0028 & -0.0024 \\ -0.0102 & 0.0139 \end{bmatrix}.$$

本文取输入向量$u_k = [0.3\ \ 0.3]^{\mathrm{T}}$, 设系统所受干扰和噪声为$w_k = 0.05\sin k$和$v_k = [0.05\ \ 0.05]\cos k$, 则可得到$w_k$和$v_k$的上界和下界分别为$w_k^+ = 0.05$, $w_k^- = -w_k^+$, $v_k^+ = [0.05\ 0.05]^{\mathrm{T}}$, $v_k^- = -v_k^+$. 取系统的初始状态向量为$x_0 = [0.1\ \ 0.1\ \ 0.1\ \ 0.1]^{\mathrm{T}}$. 假设系统传感器故障$f_k$的形式如下:

$$f_k = \begin{cases} 0, & k \leqslant 40, \\ 2\sin(0.2k), & k > 40. \end{cases}$$

区间估计的仿真结果如图2所示. 仿真结果表明本文提出的方法能够在系统传感器发生故障时, 快速的对故障做出一个较为精确的区间估计.

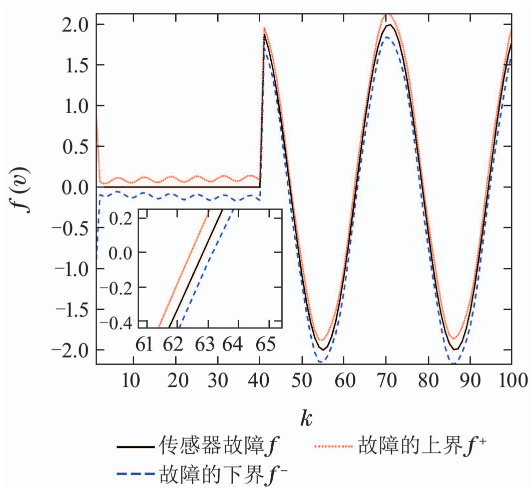

图 2 四容水箱系统的传感器故障及其区间估计结果

Fig. 2 Sensor fault and its interval estimation result of the quadruple-tanks system

为了说明定理2所提方法的优越性, 将本文所提方法与文献[24]中提出的方法进行对比. 文献[24]中提出的区间观测器设计方法同样需要对增广系统(5)求解出矩阵T和N, 求解的方法同引理1. 但是文献中要求解得的T必须满足矩阵$T\bar{A}$为Schur矩阵且矩阵中的每个元素全为非负或全为负, 此时才可以使用无反馈框架的区间观测器设计方法进行设计. 然而在实际的系统求解过程中, 这样的条件是往往很难满足的, 故使得该种设计方法的应用得到了限制. 为了解决该问题, 文献[24]中提出了一种有反馈框架的区间观测器设计方法, 具体的是选取矩阵M和U使得矩阵$M(T\bar{A} - LU)M^{-1}$是Schur矩阵且矩阵的每个元素均为非负. 矩阵M和U可以通过求解如下的Sylvester方程

$$MT\bar{A} - RM = Q\bar{C} \tag{26}$$

得到. 式(26)中, R与Q是由设计者选取的矩阵. 该方法需要先求解出矩阵T, 然后确定一个矩阵R, 若矩阵R和$T\bar{A}$没有相同的特征值, 则对于任意矩阵Q, Sylvester方程(26)存在唯一的解M和U[25]. 本文中给出的方法则没有这样的要求, 只需矩阵T和N存在即可, 不涉及其他的附加设计条件, 适用范围更广且区间估计边界更精确.

注 1 对于一个常值矩阵A, 若A的所有特征值均小于1, 即A的谱半径小于1, 则称矩阵A是一个Schur矩阵.

为了验证本文所提方法的性能, 将其与文献[24]中的有反馈框架的区间观测器设计方法进行比较. 同样考虑上述的四容水箱系统, 所有参数选取同上, 通过求解可得到相同的T和N. 可以看到, 虽然矩阵$T\bar{A}$是Schur矩阵, 但是$T\bar{A}$中的元素有正有负, 无法使用无反馈框架的区间观测器设计方法估计故障的上、下界, 故采用有反馈框架的区间观测器设计方法来估计故障的上、下界, 选取矩阵R和Q为

$$R = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix},\ Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

通过求解式(26)可得

$$M = \begin{bmatrix} 2.7375 & 2.7134 & -0.0384 & -0.0093 & 12.00 \\ 1.5306 & 2.5448 & -0.0172 & -0.0389 & 7.50 \\ 1.6665 & 1.1671 & -0.0647 & -0.0155 & 4.00 \\ 1.0273 & 2.1292 & -0.0313 & -0.0704 & 3.75 \\ 1.8261 & 0.9868 & -0.1313 & -0.0312 & 2.40 \end{bmatrix},$$

$$U = \begin{bmatrix} 1.8061 & -0.6508 \\ -0.8261 & 1.8912 \\ 11.5532 & -4.8719 \\ -9.7597 & 20.8101 \\ -0.1124 & -0.2787 \end{bmatrix}.$$

文献[24]中的方法在得到矩阵T, N, M和U后, 还需通过下式得到$\bar{x}$的区间估计$\bar{x}_k^+$和$\bar{x}_k^-$:

$$\begin{cases}\bar{x}_k^+ = z_k^+ + Ny_k,\\ \bar{x}_k^- = z_k^- + Ny_k,\end{cases} \tag{27}$$

$$\begin{cases}z_k^+ = (T^{-1})^+v_k^+ - (T^{-1})^-v_k^-,\\ z_k^- = (T^{-1})^+v_k^- - (T^{-1})^-v_k^+,\end{cases} \tag{28}$$

$$\begin{cases}v_{k+1}^+ = M(T\bar{A}-U\bar{C})M^{-1}v_k^+ + MT\bar{B}u_k+\\ \qquad MT\bar{A}Ny_k + MU(I-\bar{C}N)y_k+\\ \qquad (MT\bar{D}_1)^+w^+ - (MT\bar{D}_1)^-w^-+\\ \qquad (MN)^-v^+ - (MN)^+v^-+\\ \qquad (MU)^-v^+ - (MU)^+v^-,\\ v_{k+1}^- = M(T\bar{A}-U\bar{C})M^{-1}v_k^- + MT\bar{B}u_k+\\ \qquad MT\bar{A}Ny_k + MU(I-\bar{C}N)y_k+\\ \qquad (MT\bar{D}_1)^+w^- - (MT\bar{D}_1)^-w^++\\ \qquad (MN)^-v^- - (MN)^+v^++\\ \qquad (MU)^-v^- - (MU)^+v^+.\end{cases} \tag{29}$$

注 2　对于一个常值矩阵A, A^+和A^-的定义如下:

$$A^+ = \max\{0, A\},\ A^- = A^+ - A.$$

利用本文定理2所提出的方法和文献[24]中所提出的方法, 可以得到图3所示的估计结果. 在图中, 利用本文所提出方法估计的上、下界都是用点线进行绘制的, 利用文献[24]中的方法估计的上、下界都是用虚线进行绘制的. 可以看出, 定理2所提出的方法可以得到更为准确的估计边界, 表明本文所提出方法的性能更好. 这是因为基于有反馈框架的的区间观测器设计方法的性能受R的取值影响很大, 若R选得不好, 则可能会得到较差的区间估计结果. 但是迄今为止, 文献中对R的选取问题还没有一个系统有效的解决方案, 因此难以保证该设计方法的性能.

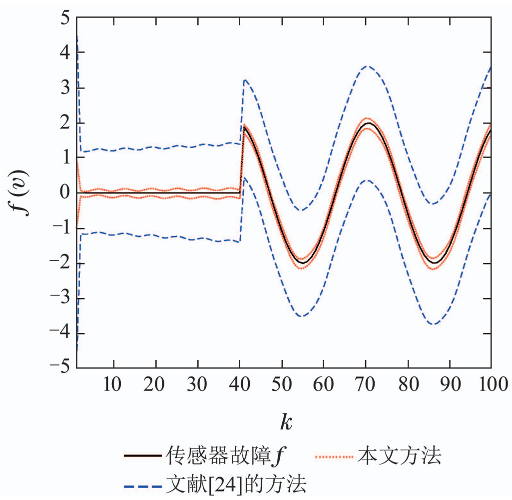

图 3　本文方法和文献[24]中方法对传感器故障的估计结果

Fig. 3　Sensor fualt and its estimation results of the proposed method and that in [24]

6　结论

本文针对离散时间线性系统的传感器故障提出了一种区间估计的设计方法, 通过将传感器故障视为增广状态, 将原始系统转换为一个不受传感器故障影响的等效广义系统. 然后利用H_∞技术设计鲁棒增广状态观测器, 并将其转化为一个可求解的线性矩阵不等式问题, 放宽了区间估计的设计条件, 扩大了设计方法的适用范围. 最后, 使用中心对称多胞体来对传感器故障的上、下界进行估计, 提高了区间估计的精度. 本文所提出的方法在设计过程中对T和N没有特殊要求且完全不涉及到R, 故而不存在参数选取困难的问题. 本文提出的方法通过引入中心对称多胞体可以获得更精确的估计边界, 性能更优.

参考文献:

[1] ZHOU Donghua, LIU Yang, HE Xiao. Review on fault diagnosis techniques for closed-loop systems. *Acta Automatica Sinica*, 2013, 39(11): 1933 – 1943.
(周东华, 刘洋, 何潇. 闭环系统故障诊断技术综述. 自动化学报, 2013, 39(11): 1933 – 1943.)

[2] GAO Z, CECATI C, DING S X. A survey of fault diagnosis and fault-tolerant techniques–part I: fault diagnosis with model-based and signal-based approaches. *IEEE Transactions of Industrial Electronics*, 2015, 62(6): 3757 – 3767.

[3] HWANG I, KIM S, KIM Y, et al. A survey of fault detection, isolation and reconfiguration methods. *IEEE Transactions of Control Systems Technology*, 2010, 18(3): 636 – 653.

[4] CARULLI A, VICINO A. Set membership localization of mobile robots via angle measurements. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 2001, 17(4): 450 – 463.

[5] ZHOU Bo, HAN Jianda. A UD factorization-based adaptive extended set-membership filter. *Acta Automatica Sinica*, 2008, 34(2): 150 – 158.
(周波, 韩建达. 基于UD分解的自适应扩展集员估计方法. 自动化学报, 2008, 34(2): 150 – 158.)

[6] SONG Dalei, WU Chong, QI Juntong, et al. A MIT-based nonlinear adaptive set-membership filter for ellipsoidal estimation. *Acta Automatica Sinica*, 2012, 38(11): 1847 – 1860.
(宋大雷, 吴冲, 齐俊桐, 等. 基于MIT规则的自适应扩展集员估计方法. 自动化学报, 2012, 38(11): 1847 – 1860.)

[7] ZHOU Bo, QIAN Kun, MA Xudong, et al. A new nonlinear set membership filter based on guaranteed bounding ellipsoid algorithm. *Acta Automatica Sinica*, 2013, 39(2): 150 – 158.
(周波, 钱堃, 马旭东, 等. 一种新的基于保证定界椭球算法的非线性集员滤波器. 自动化学报, 2013, 39(2): 150 – 158.

[8] SCOTT J K, RAIMONDO D M, MARSEGLIA G R, et al. Constrained zonotopes: a new tool for set-based estimation and fault detection. *Automatica*, 2016, 69: 126 – 136.

[9] ALAMO T, BRAVO J M, CAMACHO E F. Guaranteed state estimation by zonotopes. *Automatica*, 2005, 41(6): 1035 – 1043.

[10] COMBASTEL C. A state bounding observer for uncertain non-linear continuous-time systems based on zonotopes. *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference*. Seville: IEEE, 2005: 7228 – 7234.

[11] LE V T H, STOICA C, ALAMO T, et al. Zonotope-based set-membership estimation for multi-output uncertain systems. *Proceedings of the 2013 IEEE International Symposium on Intelligent Control*. Hyderabad: IEEE, 2013: 212 – 217.

[12] COMBASTEL C. Merging Kalman filtering and zonotopic state bounding for robust fault detection under noisy environment. *International Federation of Automatic Control*, 2015, 48(21): 289 – 295.

[13] COMBASTEL C. An extended zonotopic and Gaussian Kalman filter (EZGKF) merging set-membership and stochastic paradigms: toward non-linear filtering and fault detection. *Annual Reviews in Control*, 2016, 42: 232 – 243.

[14] PUIG V, CUGUERO P, QUEVEDO J. Worst-case state estimation and simulation of uncertain discrete-time systems using zonotopes. *Proceedings of the European Control Conference 2001*. Porto: IEEE, 2001: 1691 – 1697.

[15] LE V T H, STOICA C, ALAMO T, et al. Zonotopic guaranteed state estimation for uncertain systems. *Automatica*, 2013, 49(11): 3418 – 3424.

[16] Xu F, PUIG V, OCAMPO–MARTINEZ C, et al. Actuator-fault detection and isolation based on settheoretic approaches. *Journal of Process Control*, 2014, 24(6): 947 – 956.

[17] TANG Wentao, WANG Zhenhua, WANG Ye, et al. Fault diagnosis for uncertain systems based on unknown input set-membership filters. *Acta Automatica Sinica*, DOI: 10.26383/j.aas.2018.c170123.
(汤文涛, 王振华, 王烨, 等. 基于未知输入集员滤波器的不确定系统故障诊断. 自动化学报, DOI: 10.26383/j.aas.2018.c170123.)

[18] WANG Z, RODRIGUES M, THEILLIOL D, et al. Actuator fault estimation observer design for discrete-time linear parameter-varying descriptor systems. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 2015, 29(2): 242 – 258.

[19] Xu S, LAM J. *Robust Control and Filtering of Singular Systems*. Berlin: Springer, 2006.

[20] BOYD S, EL GHAOUI L, FERON E, et al. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. New York: SIAM, 1994.

[21] COMBASTEL C. Zonotopes and Kalman observers: gain optimality under distinct uncertainty paradigms and robust convergence. *Automatica*, 2015, 55: 265 – 273.

[22] ALAMO T, BRAVO J M, CAMACHO E F. Guaranteed state estimation by zonotopes. *Automatica*, 2005, 41(6): 1035 – 1043.

[23] JOHANSSON K H. The quadruple-tank process: a multivariable laboratory process with an adjustable zero. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2000, 8(3): 456 – 465.

[24] GUO S, ZHU F, ZHU S, et al. State and sensor fault interval estimations for discrete-time systems. *Proceedings of the 36th Chinese Control Conference*. Dalian: IEEE, 2017: 7280 – 7284.

[25] GUO Shenghui, ZHU Fanglai. Actuator fault detection based on interval observers. *Control and Decision*. 2016, 31(6): 1118 – 1122.
(郭胜辉, 朱芳来. 基于区间观测器的执行器故障检测. 控制与决策, 2016, 31(6): 1118 – 1122.)

作者简介:

张文瀚 硕士研究生, 主要研究方向为故障诊断与容错控制技术, E-mail: zhangwenhan_hit@163.com;

王振华 讲师, 主要研究方向为故障诊断与容错控制技术, E-mail: zhenhua.wang@hit.edu.cn;

沈 毅 教授, 博士生导师, 主要研究方向为故障诊断、飞行器控制、超声信号处理, E-mail: yishen_hit@126.com.