

## 柔性机械臂的双时间尺度组合控制

杨春雨<sup>†</sup>, 许一鸣, 代伟, 周林娜

(中国矿业大学 信息与控制工程学院, 江苏 徐州 221116)

**摘要:** 本文研究柔性机械臂的轨迹跟踪和振动抑制问题. 首先, 利用Lagrange法和假设模态法建立柔性机械臂的动态模型, 进而利用奇异摄动理论得到柔性机械臂的双时间尺度模型. 然后, 基于慢时间尺度模型利用滑模控制理论设计轨迹跟踪控制器; 借助于快时间尺度模型利用自适应动态规划设计参数不精确已知情况下的最优振动抑制控制器; 将二者相结合, 构造双时间尺度组合控制器, 利用奇异摄动理论证明闭环系统稳定. 最后, 在MATLAB/Simulink环境下进行实验, 与现有方法相比, 本文设计的控制器对柔性振动具有更好的振动抑制效果, 跟踪精度更高.

**关键词:** 柔性机械臂; 奇异摄动; 滑模控制; 自适应动态规划; 组合控制

**引用格式:** 杨春雨, 许一鸣, 代伟, 等. 柔性机械臂的双时间尺度组合控制. 控制理论与应用, 2019, 36(4): 659–665  
DOI: 10.7641/CTA.2018.80005

## Two-time-scale composite control of flexible manipulators

YANG Chun-yu<sup>†</sup>, XU Yi-ming, DAI Wei, ZHOU Lin-na

(School of Information and Control Engineering, China University of Mining and Technology, Xuzhou Jiangsu 221116, China)

**Abstract:** This paper studies the problems of trajectory tracking and vibration suppression of flexible manipulators. Firstly, the dynamic model of the flexible manipulator is established using Lagrange and assumed-mode method, and a two-time scale model of the flexible manipulator is obtained by singular perturbation theory. Then, a trajectory tracking controller is designed based on the slow-time scale model by using sliding mode control theory. An optimal vibration suppression controller with inaccurate known parameters is designed based on the fast-time scale model by using adaptive dynamic programming (ADP). A two-time scale controller is formed by combining the trajectory tracking controller and the optimal vibration suppression controller, and the stability of closed-loop system is proved by singular perturbation theory. Finally, the performance of the composite controller is verified by simulation in MATLAB/Simulink environment. Compared with the existing methods, the controller designed in this paper leads to a better vibration suppression effect and higher tracking accuracy.

**Key words:** flexible manipulator; singular perturbation; sliding mode control; adaptive dynamic programming; composite control

**Citation:** YANG Chunyu, XU Yiming, DAI Wei, et al. Two-time-scale composite control of flexible manipulators. *Control Theory & Applications*, 2019, 36(4): 659–665

### 1 引言

柔性机械臂由于具有质量轻、速度快、成本低、能耗低等优点被广泛应用于现代工业<sup>[1-2]</sup>. 柔性机械臂的运动包括宏观的刚体运动和微观的柔性振动, 总体动态过程易受外界干扰影响, 且具有刚柔耦合、非线性、无限维、时变、模型参数难以准确测量等复杂特性. 因此, 柔性机械臂的运动控制一直是机器人控制领域的热点难题<sup>[3]</sup>.

柔性机械臂的运动控制包括刚性运动的轨迹跟踪和柔性振动的抑制<sup>[4]</sup>. 现有研究成果可以分为两类, 一类是基于柔性机械臂刚柔耦合模型直接设计控制器, 这类方法的优点是充分考虑并利用柔性机械臂动态特性, 可应用传统PID控制<sup>[5]</sup>、变结构控制<sup>[6-7]</sup>、鲁棒控制<sup>[8]</sup>、神经网络控制<sup>[9-10]</sup>、模糊控制<sup>[11]</sup>、自适应控制<sup>[12-13]</sup>等方法设计控制器. 缺点是模型结构复杂, 控制器设计过程往往需要主观确定多个参数<sup>[14]</sup>, 难以

收稿日期: 2018-01-02; 录用日期: 2018-08-13.

<sup>†</sup>通信作者. E-mail: chunyuang@cumt.edu.cn; Tel.: +86 18852109885.

本文责任编辑: 武玉强.

国家自然科学基金项目(61741318, 61603392)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (61741318, 61603392).

获得最优性能,当参数选择不合适时,控制精度低下;另一类方法是基于柔性机械臂的解耦模型,分别考虑机械臂的轨迹跟踪和振动抑制.这类方法主要思路是利用奇异摄动理论对柔性机械臂进行双时间尺度刚柔耦合分解,在慢时间尺度下设计机械臂刚性运动轨迹跟踪控制器,快时间尺度下设计机械臂柔性振动抑制控制器.模型简单,便于控制器设计.基于慢时间尺度模型设计轨迹跟踪控制器可参照传统刚性机械臂控制策略设计,主要包括PID控制<sup>[15]</sup>、滑模变结构控制<sup>[16-17]</sup>等.关于振动抑制问题,文献[18]设计一种基于神经网络和扰动观测器的组合学习方法,并利用滑模控制实现对振动的抑制;文献[19]针对负载变化情况设计一种间接自适应模糊模型参考控制器,能解决振动模型参数难以准确测量问题,提高振动抑制效果,实现对振动的快速抑制;文献[20]提出神经网络控制方法,克服了对模型参数线性化条件的要求,具有模型推广能力和很强的鲁棒性.文献[17,21-22]基于分解后子系统模型利用线性二次型最优控制方法设计振动抑制控制器,实验表明该方法控制性能很好,但前提是系统参数精确已知,如果系统参数误差较大,控制效果会受到严重影响.因此,研究参数不精确已知情况下的振动抑制控制器设计方法有重要意义.

本文针对上述问题利用Lagrange法和假设模态法建立柔性机械臂动态模型,鉴于柔性机械臂具有双时间尺度特性,利用奇异摄动理论建立柔性机械臂的双时间尺度模型.由于柔性机械臂的参数不确定性是客观存在的,基于滑模控制理论的轨迹跟踪控制器,对满足匹配条件的参数不确定性和外界干扰具有一定鲁棒性和抗干扰性<sup>[16-17,23]</sup>.因此,本文基于慢时间尺度模型,设计基于准滑动模态的滑模变结构控制器,实现轨迹跟踪控制.由于与机械臂柔性特性相关的参数随运动过程不断变化,测量过程复杂,且分解后的振动频率与原系统振动频率存在较大误差,难以求得精确的快时间尺度模型,完全依赖精确的快时间尺度模型设计的控制器自适应性较差.本文通过测量机械臂弹性振动,利用自适应动态规划(adaptive dynamic programming, ADP)设计最优振动抑制控制器.控制器设计过程不依赖于系统数学模型,使得控制器设计简单,自适应性强.最后,将两种控制器组合在一起实现对柔性机械臂的轨迹跟踪和振动抑制的双重控制目标,并证明闭环系统的稳定性.在柔性机械臂测量值与实际值存在误差的情况下,仿真实验表明本文设计的组合控制器具有较好的轨迹跟踪和振动抑制效果,整体控制精度更高.

## 2 动力学模型及双时间尺度分解

本文研究单杆柔性机械臂的运动控制,其结构模型如图1所示.柔性机械臂的一端与电机转轴连接,另一端为自由端,末端负载视为质点.

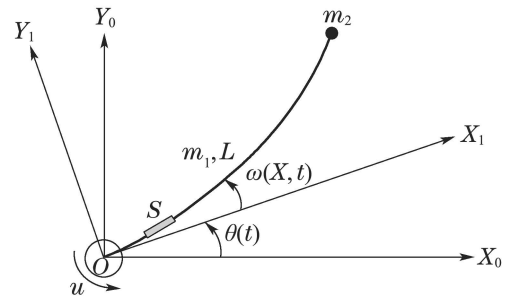


图1 柔性机械臂模型图

Fig. 1 Model diagram of flexible manipulator

图1中:  $X_0OY_0$ 为地球坐标系,  $X_1OY_1$ 为动态坐标系,  $m_1$ 为柔性机械臂杆质量,  $m_2$ 为末端负载质量,  $L$ 为柔性杆长度,  $u$ 为电机控制转矩,  $\theta$ 为柔性机械臂对应刚性旋转角度,  $\omega$ 为柔性机械臂在 $X_1OY_1$ 坐标系下任意点对应的弹性形变,  $S$ 为检测振动的压电传感器.

在Lagrange原理基础上利用假设模态法建立柔性机械臂数学模型<sup>[24]</sup>

$$M \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_{\theta}(\theta, \dot{\theta}, q, \dot{q}) \\ G_q(\theta, \dot{\theta}, q, \dot{q}) + Kq \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} (u + d), \quad (1)$$

其中:  $M$ 为系统质量矩阵; 矢量矩阵 $G$ 包含系统哥氏力、阻尼力和离心力的非线性项; 正定对角阵矩阵 $K$ 为系统刚度矩阵;  $\theta$ 为臂杆转角;  $q$ 为描述柔性形变 $\omega$ 的广义模态坐标矢量;  $d$ 为外界干扰, 满足 $|d| < D$ ,  $D$ 为正实数.

由柔性臂的特性可知, 矩阵 $M$ 正定<sup>[24]</sup>, 记 $H = M^{-1}$ , 对式(1)左乘 $H$ 得到

$$HM \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{q} \end{bmatrix} + H \begin{bmatrix} G_{\theta}(\theta, \dot{\theta}, q, \dot{q}) \\ G_q(\theta, \dot{\theta}, q, \dot{q}) + Kq \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} (u + d), \quad (2)$$

式(1)可改写为

$$\ddot{\theta} = -H_{11}(\theta, q)G_{\theta}(\theta, \dot{\theta}, q, \dot{q}) - H_{12}(\theta, q)G_q(\theta, \dot{\theta}, q, \dot{q}) - H_{12}(\theta, q)Kq + H_{11}(\theta, q)(u+d), \quad (3)$$

$$\ddot{q} = -H_{21}(\theta, q)G_{\theta}(\theta, \dot{\theta}, q, \dot{q}) - H_{22}(\theta, q)G_q(\theta, \dot{\theta}, q, \dot{q}) - H_{22}(\theta, q)Kq + H_{21}(\theta, q)(u+d). \quad (4)$$

由于柔性机械臂系统具有双时间尺度特性, 利用奇异摄动理论, 引入奇异摄动参数<sup>[22]</sup> $\varepsilon = 1/k$ ,  $k$ 为最小的刚度系数. 定义 $\tilde{K} = \varepsilon K$ ,  $z = q/\varepsilon$ , 则由式(3)和式(4)可得

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} = & -\mathbf{H}_{11}(\theta, \varepsilon z)\mathbf{G}_\theta(\theta, \dot{\theta}, \varepsilon z, \varepsilon \dot{z}) - \\ & \mathbf{H}_{12}(\theta, \varepsilon z)\mathbf{G}_q(\theta, \dot{\theta}, \varepsilon z, \varepsilon \dot{z}) - \\ & \mathbf{H}_{12}(\theta, \varepsilon z)\tilde{\mathbf{K}}z + \mathbf{H}_{11}(\theta, \varepsilon z)(u+d), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon \ddot{z} = & -\mathbf{H}_{21}(\theta, \varepsilon z)\mathbf{G}_\theta(\theta, \dot{\theta}, \varepsilon z, \varepsilon \dot{z}) - \\ & \mathbf{H}_{22}(\theta, \varepsilon z)\mathbf{G}_q(\theta, \dot{\theta}, \varepsilon z, \varepsilon \dot{z}) - \\ & \mathbf{H}_{22}(\theta, \varepsilon z)\tilde{\mathbf{K}}z + \mathbf{H}_{21}(\theta, \varepsilon z)(u+d). \end{aligned} \quad (6)$$

为建立慢变子系统模型, 令式(6)中摄动参数 $\varepsilon=0$ , 则有

$$z_s = \tilde{\mathbf{K}}^{-1}\mathbf{H}_{22s}^{-1}[-\mathbf{H}_{21s}\mathbf{G}_{\theta s} - \mathbf{H}_{22s}\mathbf{G}_{qs} + \mathbf{H}_{21s}(u_s + d)], \quad (7)$$

其中有下标  $s$  的变量为柔性机械臂系统的慢变分量. 将式(7)代入式(5), 得到柔性机械臂慢变子系统模型

$$\mathbf{J}\ddot{\theta} = u_s + d, \quad (8)$$

其中:

$$\mathbf{J} = (-\mathbf{H}_{12s}\mathbf{H}_{22s}^{-1}\mathbf{H}_{21s} + \mathbf{H}_{11s})^{-1}, \quad (9)$$

$\mathbf{H}_{12s}, \mathbf{H}_{22s}, \mathbf{H}_{21s}, \mathbf{H}_{11s}$  为常值矩阵,  $\bar{\theta}$  为  $\theta$  的近似值. 由于电机存在的外界干扰相对于系统动态变化缓慢, 故可认为干扰  $d$  只存在于系统的慢时间尺度模型当中<sup>[25]</sup>.

考虑到柔性机械臂系统状态变量转角和振动量  $q$  存在多时间尺度特性, 引入时间尺度  $\tau = t/\sqrt{\varepsilon}$ , 在  $\tau$  时间尺度下, 慢变量可视为常量<sup>[26]</sup>, 即

$$\frac{d\bar{\theta}}{d\tau} = \frac{d^2\bar{\theta}}{d\tau^2} = 0, \quad \frac{dz_s}{d\tau} = \frac{d^2z_s}{d\tau^2} = 0.$$

定义新的变量  $z_f = z - z_s$ , 于是, 由式(6)-(7)可得柔性机械臂快变子系统模型

$$\frac{d^2z_f}{d\tau^2} = -\mathbf{H}_{22s}\tilde{\mathbf{K}}z_f + \mathbf{H}_{21s}u_f. \quad (10)$$

根据Tikhonov定理, 有

$$\theta = \bar{\theta} + O(\varepsilon), \quad (11)$$

$$q = \varepsilon(z_s + z_f) + O(\varepsilon). \quad (12)$$

式(11)和式(12)给出了分解后子系统与原系统状态量之间的关系.  $O(\varepsilon)$ 为 $\varepsilon$ 的高阶无穷小.

本文目标是设计控制器实现对柔性机械臂的轨迹跟踪和振动抑制.

### 3 控制器设计

首先, 设计基于准滑动模态的滑模变结构控制器, 实现对柔性机械臂的轨迹跟踪控制. 然后, 通过测量机械臂弹性振动, 利用自适应动态规划(ADP)设计最优振动抑制控制器. 最后, 将两种控制器组合实现柔性机械臂轨迹跟踪和振动抑制的双重控制目标, 并证明闭环系统的稳定性.

#### 3.1 轨迹跟踪控制器设计

考虑外界干扰的存在, 基于慢时间尺度模型设计轨迹跟踪控制器. 滑模控制对于满足匹配条件的参数不确定性和外界扰动具有良好的鲁棒性<sup>[27-28]</sup>, 因而设计滑模变结构控制器实现对柔性机械臂的轨迹跟踪. 对于描述刚性运动的慢时间尺度子系统, 其动力学模型为式(8)所示. 定义轨迹跟踪误差

$$e(t) = \bar{\theta}(t) - \theta_d(t), \quad (13)$$

其中:  $e(t)$ 为跟踪误差,  $\theta_d$ 为期望角度信号. 设计滑模函数

$$s(t) = ce(t) + \dot{e}(t), \quad (14)$$

其中  $c > 0$ . 设计滑模变结构控制律

$$u_s(t) = \mathbf{J}(-c\dot{e} + \ddot{\theta}_d - \eta \operatorname{sgn} s) - D \operatorname{sgn} s. \quad (15)$$

定义Lyapunov函数

$$V = \frac{1}{2}s^2. \quad (16)$$

由式(14)可以得到

$$s\dot{s} = s(c\dot{e} + \frac{1}{J}(u_s + d) - \ddot{\theta}_d). \quad (17)$$

由式(8)(13)-(15)(17), 得到

$$\begin{aligned} \dot{V} = s\dot{s} = & s(-\eta \operatorname{sgn} s - \frac{1}{J}D \operatorname{sgn} s + \frac{1}{J}d) = \\ & -\eta|s| - \frac{1}{J}D|s| + \frac{1}{J}d \cdot s \leq \\ & -\eta|s| < 0, \quad \forall s \neq 0. \end{aligned} \quad (18)$$

根据LaSalle不变性原理<sup>[28]</sup>, 系统闭环渐近稳定.

**定理 1** 慢变子系统式(8)在式(15)设计的滑模控制律作用下渐近稳定. 即当  $t \rightarrow \infty$  时,  $e \rightarrow 0, \dot{e} \rightarrow 0$ .

为消除滑模抖振对系统影响, 使用饱和函数代替式(15)中的符号函数  $\operatorname{sgn} s$ . 设计准滑动模态, 边界层外采用切换控制, 边界层内采用线性反馈控制, 使运动轨迹限制在理想滑动模态的某一邻域内<sup>[28]</sup>. 饱和函数方程  $\operatorname{sat}(s)$  设计为

$$\operatorname{sat}(s) = \begin{cases} 1, & s > \Delta, \\ (1/\Delta)s, & |s| \leq \Delta, \\ -1, & s < -\Delta, \end{cases} \quad (19)$$

$\Delta$ 为边界层. 控制律(15)改进为

$$u_s(t) = \mathbf{J}(-c\dot{e} + \ddot{\theta}_d - \eta \operatorname{sat}(s)) - D \operatorname{sat}(s). \quad (20)$$

#### 3.2 最优振动抑制控制器设计

式(10)给出了描述系统振动特性的快时间尺度模

型,令

$$x = [z_f \quad \dot{z}_f]^T, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ -\mathbf{H}_{22s} \tilde{\mathbf{K}} & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{H}_{21s} \end{bmatrix},$$

则式(10)可化为状态空间表达式

$$\dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}u_f. \quad (21)$$

设计最优控制律

$$u_f = -\mathbf{K}x, \quad (22)$$

使性能指标式(23)最小:

$$J = \int_0^\infty (x^T \mathbf{Q}x + u_f^T \mathbf{R}u_f) dt, \quad (23)$$

其中:  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T \geq 0$ ,  $\mathbf{R} = \mathbf{R}^T > 0$ ,  $(\mathbf{A}, \mathbf{Q}^{1/2})$  可观.

当式(21)中 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 不精确已知时,根据文献[29],可以利用如下算法设计最优控制器.

### 算法 1 ADP算法.

**第1步** 针对快时间尺度模型,给定初始控制律

$$u_f = -\mathbf{K}_0 x + \kappa, \quad (24)$$

$u_f \in \mathbb{R}^m$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $m=1$ ,  $n=4$ .  $\mathbf{K}_0$ 是使得系统(21)稳定的初始增益矩阵,  $\kappa$ 为探测噪声,用来增加采集数据的丰富性.采集信号计算 $\delta_{xx}$ ,  $\mathbf{I}_{xx}$ ,  $\mathbf{I}_{xu_f}$ ,直到满足

$$\text{rank}[\mathbf{I}_{xx}, \mathbf{I}_{xu_f}] = \frac{n(n+1)}{2} + mn, \quad (25)$$

式中 $\delta_{xx}$ ,  $\mathbf{I}_{xx}$ ,  $\mathbf{I}_{xu_f}$ 为学习过程中用来收集状态和输入信息的矩阵.  $\delta_{xx}$ ,  $\mathbf{I}_{xx}$ ,  $\mathbf{I}_{xu_f}$ 具体为

$$\delta_{xx} = [\mu(x(t_1)) - \mu(x(t_0)) \quad \mu(x(t_2)) - \mu(x(t_1)) \\ \cdots \quad \mu(x(t_l)) - \mu(x(t_{l-1}))]^T,$$

$$\mathbf{I}_{xx} =$$

$$\left[ \int_{t_0}^{t_1} x \otimes x d\tau \quad \int_{t_1}^{t_2} x \otimes x d\tau \quad \cdots \quad \int_{t_{l-1}}^{t_l} x \otimes x d\tau \right]^T,$$

$$\mathbf{I}_{xu_f} =$$

$$\left[ \int_{t_0}^{t_1} x \otimes u_f d\tau \quad \int_{t_1}^{t_2} x \otimes u_f d\tau \quad \cdots \quad \int_{t_{l-1}}^{t_l} x \otimes u_f d\tau \right]^T,$$

$$\mu(x) =$$

$$[x_1^2 \quad x_1 x_2 \quad \cdots \quad x_1 x_n \quad x_2^2 \quad x_2 x_3 \quad \cdots \quad x_{n-1} x_n \quad x_n^2]^T,$$

$$0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_l,$$

其中 $\otimes$ 表示克罗内积.

**第2步** 通过式(26)求解 $\mathbf{P}_k$ 和 $\mathbf{K}_{k+1}$ ,  $\mathbf{P}_k$ 为迭代过程中求出的Riccati方程正定解,  $\mathbf{K}_k$ 为迭代过程中的反馈增益矩阵.

$$\begin{bmatrix} \gamma(\mathbf{P}_k) \\ \text{vec}(\mathbf{K}_{k+1}) \end{bmatrix} = (\theta_k^T \theta_k)^{-1} \theta_k^T \Xi_k, \quad (26)$$

其中:

$$\theta_k = [\delta_{xx} \quad -2\mathbf{I}_{xx}(\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{K}_k^T \mathbf{R}) - 2\mathbf{I}_{xu_f}(\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{R})],$$

$$\Xi_k = -\mathbf{I}_{xx} \text{vec}(\mathbf{Q}_k), \quad \mathbf{Q}_k = \mathbf{Q} + \mathbf{K}_k^T \mathbf{R} \mathbf{K}_k,$$

$$\gamma(\mathbf{P}_k) =$$

$$[p_{11} \quad p_{12} \quad \cdots \quad 2p_{1n} \quad p_{22} \quad 2p_{23} \quad \cdots \quad 2p_{n-1} \quad p_{nn}]^T,$$

$\text{vec}(M)$ 表示矩阵 $M$ 的向量化,即

$$\text{vec}(\mathbf{M}_{g \times h}) = [m_{11} \quad m_{21} \quad \cdots \quad m_{1h} \quad m_{2h} \quad \cdots \quad m_{gh}]^T.$$

**第3步** 令 $k \leftarrow k+1$ ,迭代求解 $\mathbf{P}_k$ 和 $\mathbf{K}_{k+1}$ ,直到满足 $\|\mathbf{P}_k - \mathbf{P}_{k-1}\| \leq \alpha$ ,  $\alpha > 0$ ,如果条件不满足,返回第2步.

**第4步** 令 $\mathbf{K}^* = \mathbf{K}_k$ ,得到

$$u_f = -\mathbf{K}^* x \quad (27)$$

作为最优控制律.

根据文献[30],当给定初始增益 $\mathbf{K}_0$ 能够使系统(21)稳定,且 $x$ 可测时,利用上述ADP算法,经过迭代后,能够得到最优控制律 $\mathbf{K}^*$ ,且能够保证闭环系统渐近稳定.然而,这里的变量 $x$ 不能直接测量,根据式(12), $x \approx [q/\varepsilon - z_s \quad \dot{q}/\varepsilon - \dot{z}_s]^T$ ,这表明通过测量获得的振动量能够获取 $x$ 的近似值.

**定理 2** 令 $x = [q/\varepsilon - z_s \quad \dot{q}/\varepsilon - \dot{z}_s]^T$ ,利用基于ADP的最优控制器设计算法,经过迭代后能得到最优控制器 $\mathbf{K}^*$ ,所得闭环系统(10)渐近稳定.

### 3.3 双时间尺度组合控制器设计

本节基于奇异摄动理论,设计滑模变结构控制与最优振动抑制控制相结合的双时间尺度控制器.将控制律(20)与(27)组合得到

$$u(t) = u_s(t) + u_f(t), \quad (28)$$

其中:  $u_s$ 实现对柔性机械臂的轨迹跟踪控制,  $u_f$ 实现对柔性机械臂的振动抑制.图2为组合控制结构图.

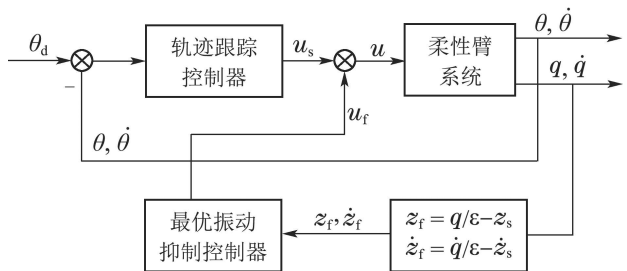


图2 组合控制器结构图

Fig. 2 Structure diagram of the composite controller

式(11)和式(12)给出分解后子系统与原系统状态量之间的关系.结合图2可以看出,柔性机械臂实际旋转角度可近似为机械臂刚体运动位置信息,因此,在慢时间尺度下,可直接利用柔性机械臂实际角度信号设计轨迹跟踪控制器.同样的,描述柔性机械臂振动特性的模态位移同样可直接从原系统测量获得,基于柔性机械臂系统振动量输出可以获得快子系统状态近似值,利用ADP设计最优振动抑制控制器.

双时间尺度控制器 (28) 能够使慢、快时间尺度子系统都渐近稳定, 根据奇异摄动理论<sup>[31]</sup>和Tikhonov定理<sup>[32]</sup>, 组合控制器能够使原系统闭环稳定。

**定理 3** 原系统(1)在双时间尺度控制器(28)作用下是渐近稳定的。

### 4 仿真实验

本节在MATLAB环境下进行仿真实验, 柔性机械臂参数的实际值和测量值如表1所示, 仿真实验中充分考虑参数不确定性(假设实际参数和测量参数有一定偏差)对系统影响. 选取理想跟踪轨迹为  $\theta_d = \tanh t$ .

表 1 柔性机械臂参数

Table 1 Parameters of the flexible manipulator

物理参数/单位	实际值	测量值
长度/m	1.2	1.1
横截面积/mm <sup>2</sup>	240	248
电机转动惯量/kg·m <sup>2</sup>	1.0	1.0
臂杆密度/(kg·m <sup>-3</sup> )	$7.8 \times 10^3$	$7.8 \times 10^3$
弯曲刚度/N·m <sup>3</sup>	$1.44 \times 10^3$	$1.5 \times 10^3$
末端质量/kg	1.0	1.0

由于高阶模态在柔性机械臂的振动模式中所占的比重较小, 因此选取前两阶模态来描述机械臂的振动特性<sup>[8]</sup>. 为验证本文设计的振动抑制控制器的性能, 本文把基于ADP算法设计的最优振动抑制控制器与现有典型的模糊控制器(fuzzy logic controller, FLC)<sup>[33]</sup>和基于模型参数设计的线性二次型 (linear quadratic regulator, LQR)控制器<sup>[34]</sup>实验结果进行对比分析。

根据文献[33]设计模糊振动抑制控制器(控制器设计具体设计过程见文献[33]). 根据文献[34]中LQR设计方法设计振动抑制控制器, 利用表1中柔性机械臂参数测量值, 选取评价矩阵  $Q = \text{diag}\{1, 0.1, 1, 0.1\}$ ,  $R = I$ , 得到最优反馈增益  $\hat{K} = [-0.1084 \quad -0.6578 \quad 0.1293 \quad 0.1856]$ .

为应用本文方法, 首先基于慢时间尺度模型, 设计式(20)所示的滑模变结构控制律, 参数为  $c = 12, \eta = 0.5, \Delta = 0.2$ . 在保证慢子系统稳定基础上, 基于测量得到的柔性机械臂振动量, 利用算法1设计最优振动抑制控制器, 选取前面所得反馈增益矩阵  $\hat{K}$  作为初始反馈增益矩阵, 即  $K_0 = \hat{K}$ , 评价矩阵  $Q = \text{diag}\{1 \quad 0.1 \quad 1 \quad 0.1\}$ ,  $R = I$ , 采样时间  $T = 0.001$  s.

图3-4给出求解振动抑制控制器最优值的迭代过程.  $K_k$ 为状态反馈矩阵,  $P_k$ 为Riccati方程的解. 从图中可以看出, 经过2次迭代后, 振动抑制控制器能够收敛到最优值. 最终的最优反馈增益矩阵为  $K^* = [-0.1161 \quad -0.6276 \quad 0.1261 \quad 0.1272]$ .

图5给出柔性机械臂在组合控制器作用下的运动轨迹. 从图中可以看出, 利用本文设计的基于准滑动模态的滑模变结构控制与基于ADP最优控制相结合的组合控制器能够实现对柔性机械臂的实时跟踪控制, 跟踪速度快且跟踪误差小. 同时, 通过局部放大图对比可以看出, 当系统到达稳定状态之前, 相对于其他两种控制器, 在本文设计的组合控制器作用下柔性机械臂跟踪误差较小, 跟踪响应速度快; 当系统到达稳定状态之后, 基于ADP和LQR设计的组合控制器轨迹跟踪误差明显小于基于FLC设计的组合控制器。

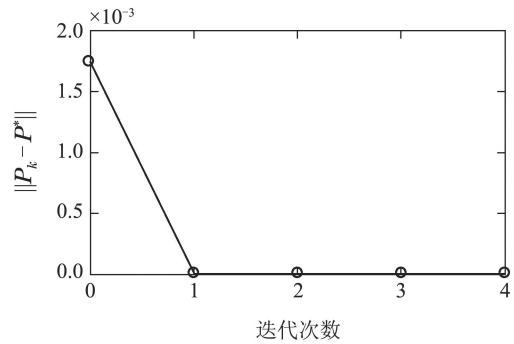


图 3  $P_k$ 收敛到最优值 $P^*$ 迭代过程

Fig. 3 Convergence of  $P_k$  to its optimal value  $P^*$  during the learning process

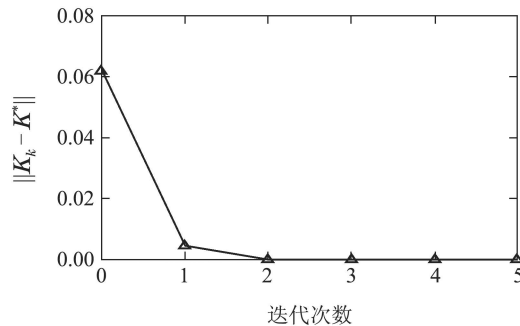


图 4  $K_k$ 收敛到最优值 $K^*$ 迭代过程

Fig. 4 Convergence of  $K_k$  to its optimal value  $K^*$  during the learning process

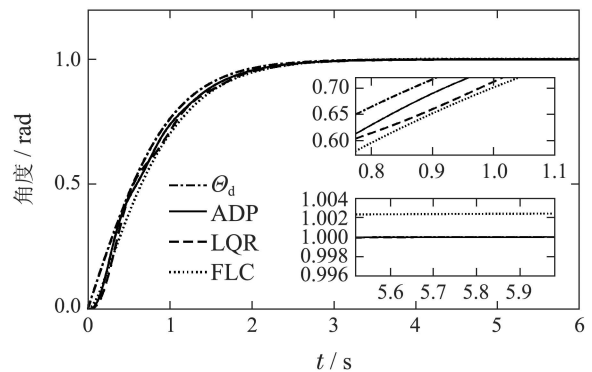


图 5 组合控制器作用下的位置跟踪曲线

Fig. 5 The curve of position tracking under the action of composite controller

利用模态位移欧氏范数能够将前两阶模态整合在一起描述柔性机械臂整体振动情况,更加直观对比出振动量、抑制快慢之间的差别.因此,图6给出不同振动抑制控制器作用下,柔性机械臂的模态位移欧氏范数曲线.从图中可以看出,在模糊振动抑制控制器作用下,柔性机械臂模态振动位移能够得到抑制,但抑制过程振幅较大,且振动频率过高,较大的振动频率会对电机造成损坏.与LQR控制器相比,在本文设计的控制器作用下,柔性臂振动抑制速度更快,约为1.15 s,而在LQR控制器作用下,系统稳定时间约为1.35 s.利用从原系统振动信号转换得到的状态变量设计ADP最优控制器,通过迭代求得系统最优值,能够减小分解过程与原系统之间的误差,振动抑制效果更好.

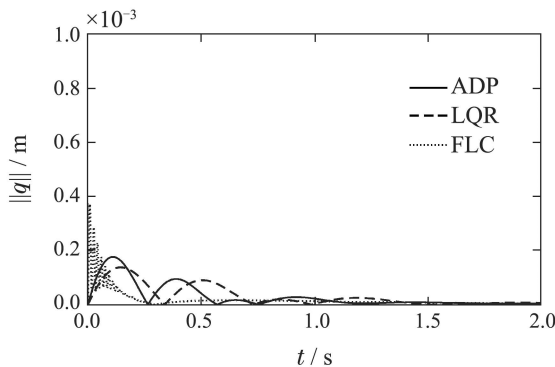


图6 柔性机械臂模态位移欧氏范数曲线

Fig. 6 Trajectory of the Euclidean norm of the modal displacement of the flexible manipulator

## 5 结论

本文利用Lagrange法和假设模态法描述柔性机械臂的动力学方程.根据奇异摄动理论将模型分解为描述刚体运动的慢时间尺度模型和描述柔性变形的快时间尺度模型.针对慢时间尺度模型,由于参数不确定性客观存在,加上外界扰动对系统影响,本文设计基于准滑动模态的滑模控制器,实现轨迹跟踪控制.在快时间尺度下,当模型参数不精确已知,利用自适应动态规划设计振动抑制控制器,实现对机械臂的柔性振动抑制.通过相关理论证明,本文设计的组合控制器能够使系统稳定.仿真实验中考虑了系统参数测量值与实际值之间的偏差,实验结果表明,与已有的控制方法相比,本文所提出的方法具有更好的振动抑制效果,控制精度更高.

## 参考文献:

[1] REIS J C P, DA COSTA J S. Motion planning and actuator specialization in the control of active-flexible link robots. *Journal of Sound and Vibration*, 2012, 331(14): 3255 – 3270.  
 [2] SABATINI M, GASBARRI P, MONTI R, et al. Vibration control of a flexible space manipulator during on orbit operations. *Acta Astronautica*, 2012, 73(2): 109 – 121.

[3] MALEKZADEH M, NAGHASH A, TALEBI H A. A robust nonlinear control approach for tip position tracking of flexible spacecraft. *IEEE Transactions on Aero-space and Electronic Systems*, 2011, 47(4): 2423 – 2434.  
 [4] DOG M, ISTEфанOPULOS Y. Optimal nonlinear controller design for flexible robot manipulators with adaptive internal model. *IET Control Theory & Applications*, 2007, 1(3): 770 – 778.  
 [5] LOU Junqiang, WEI Yanding, YANG Yiling, et al. Modeling and active vibration control of an intelligent flexible manipulator system. *Robot*, 2014, 36(5): 552 – 559, 575.  
 (娄军强, 魏燕定, 杨依领, 等. 智能柔性机械臂的建模和振动主动控制研究. *机器人*, 2014, 36(5): 552 – 559, 575.)  
 [6] DAR N U, FAROOQ M, WANG D. Improved hybrid position/force controller design of a flexible robot manipulator using a sliding observer. *Journal of Systems Engineering and Electronics*, 2009, 240(1): 146 – 158.  
 [7] FAN Xiaoping, XU Jianmin, MAO Zongyuan, et al. Robust variable structure hybrid position force control for constrained flexible-link manipulator. *Acta Automatica Sinica*, 2000, 26(2): 176 – 183.  
 (樊晓平, 徐建闽, 毛宗源, 等. 受限柔性机器人臂的鲁棒变结构混合位置/力控制. *自动化学报*, 2000, 26(2): 176 – 183.)  
 [8] WU Xinsheng, DENG Jun. Robust boundary control of a distributed-parameter flexible manipulator with tip unknown disturbance. *Control Theory & Applications*, 2011, 28(4): 511 – 518.  
 (吴忻生, 邓军. 末端有未知扰动的分布参数柔性机械臂的鲁棒边界控制. *控制理论与应用*, 2011, 28(4): 511 – 518.)  
 [9] RIAD A, MEDDAHI H. A fast adaptive artificial neural network controller for flexible link manipulators. *International Journal of Advanced Computer Science & Applications*, 2016, 7(1): 298 – 308.  
 [10] XU B, YUAN Y. Two performance enhanced control of flexible-link manipulator with system uncertainty and disturbances. *Science China Information Sciences*, 2017, 60(5): 0502021 – 05020211.  
 [11] PENG G, WANG X, YANG X. Study on fuzzy PD control of planar two-link flexible manipulator // *2002 IEEE Region 10 Conference on Computers, Communications, Control and Power Engineering*. New Jersey: IEEE, 2002: 1542 – 1545.  
 [12] FELIU V, RATTAN K S, BROWN H B J. Adaptive control of a single-link flexible manipulator. *IEEE Control Systems Magazine*, 1990, 10(2): 29 – 33.  
 [13] CHEN Mingjin, LI Shurong, CAO Qianlei. Adaptive motion/force control for rigid-link flexible-joint manipulators with time delay. *Control Theory & Applications*, 2015, 32(2): 217 – 223.  
 (陈明金, 李树荣, 曹乾磊. 时滞柔性关节机械臂自适应位置/力控制. *控制理论与应用*, 2015, 32(2): 217 – 223.)  
 [14] CHEN X, FUKUDA T. Robust sliding-mode tip position control for flexible arms. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2000, 48(6): 1048 – 1056.  
 [15] SUBUDHI B, MORRIS A S. Dynamic modelling, simulation and control of a manipulator with flexible links and joints. *Robotics & Autonomous Systems*, 2002, 41(4): 257 – 270.  
 [16] XU B, ZHANG P. Composite learning sliding mode control of flexible-link manipulator. *Complexity*, 2017, 2017(3): 1 – 6.  
 [17] SUN T, LIANG D, SONG Y. Singular-perturbation-based nonlinear hybrid control of redundant parallel robot. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2018, 65(4): 3326 – 3336.  
 [18] XU B. Composite learning control of flexible-link manipulator using NN and DOB. *IEEE Transactions on Systems Man & Cybernetics Systems*, 2017, PP(99): 1 – 7.  
 [19] MOUDGAL V G, PASSINO K M, YURKOVICH S. Rule-based control for a flexible-link robot. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 1994, 2(4): 392 – 405.

- [20] PENG J G. Neural network control of flexible-joint robot manipulators. *Acta Automatica Sinica*, 2007, 33(2): 175 – 180.
- [21] WAI R J, LEE M C. Intelligent optimal control of single-link flexible robot arm. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2004, 51(1): 201 – 220.
- [22] YU X Y, CHEN L. Singular perturbation adaptive control and vibration suppression of free-flying flexible space manipulators. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 2015, 229(11): 1989 – 1997.
- [23] ZHANG J, LIU X, XIA Y, et al. Disturbance observer-based integral sliding-mode control for systems with mismatched disturbances. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2016, 63(11): 7040 – 7048.
- [24] MEHREZ M W, EL-BADAWY A A. Effect of the joint inertia on selection of under-actuated control algorithm for flexible-link manipulators. *Mechanism & Machine Theory*, 2010, 45(7): 967 – 980.
- [25] LIU Z, LIU J, HE W. Adaptive boundary control of a flexible manipulator with input saturation. *International Journal of Control*, 2016, 89(6): 1 – 21.
- [26] SICILIANO B, BOOK W J. A singular perturbation approach to control of lightweight flexible manipulators. *International Journal of Robotics Research*, 1988, 7(4): 79 – 90.
- [27] MA H, WU J, XIONG Z. A novel exponential reaching law of discrete-time sliding-mode control. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2017, 66(5): 3840 – 3850.
- [28] LIU J K. *Sliding Mode Control Design and MATLAB Simulation the Basic Theory and Design Method*. Beijing: Tsinghua University Press, 2015: 33 – 57.  
(刘金琨. 滑模变结构控制MATLAB仿真基本理论与设计方法. 北京: 清华大学出版社, 2015: 33 – 57.)
- [29] JIANG Y, JIANG Z P. Computational adaptive optimal control for continuous-time linear systems with completely unknown dynamics. *Automatica*, 2012, 48(10): 2699 – 2704.
- [30] KLEINMAN D. On an iterative technique for Riccati equation computation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1968, 13(1): 114 – 115.
- [31] XU Kekang. *Singular Perturbation in Control Systems*. Beijing: Science Press, 1986.  
(许可康. 控制系统中的奇异摄动. 北京: 科学出版社, 1986.)
- [32] KOKOTOVIC P V, O'REILLY J, KHALIL H K. *Singular Perturbation Methods in Control: Analysis and Design*. Philadelphia: SIAM, 1999.
- [33] JLIN J, LEWIS F L. Two-time scale fuzzy logic controller of flexible link robot arm. *Fuzzy Sets & Systems*, 2003, 139(1): 125 – 149.
- [34] XU Y, RITZ E. Vision based flexible beam tip point control. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2009, 17(5): 1220 – 1227.

### 作者简介:

**杨春雨** 博士, 教授, 研究领域为直线电机控制技术、电力系统分析与控制、奇异系统优化控制、奇异摄动系统稳定性分析与控制等, E-mail: chunyuang@cumt.edu.cn;

**许一鸣** 硕士研究生, 研究领域为柔性机械臂的轨迹跟踪和振动抑制、自适应动态规划, E-mail: yimingxu@cumt.edu.cn;

**代伟** 博士, 副教授, 研究领域为复杂工业过程建模与运行优化控制、机器学习与数据挖掘, E-mail: weidai@cumt.edu.cn;

**周林娜** 博士, 副教授, 研究领域为T-S模糊控制、奇异系统优化控制、奇异摄动系统稳定性分析与控制, E-mail: linnazhou@cumt.edu.cn.