

# 一类非线性多变量系统的多模型自适应控制

黄 帅<sup>1</sup>, 王 昕<sup>2†</sup>, 王振雷<sup>1</sup>

(1. 华东理工大学 化工过程先进控制和优化技术教育部重点实验室, 上海 200237;

2. 上海交通大学 电工与电子技术中心, 上海 200240)

**摘要:** 针对一类不确定的非线性多变量离散时间动态系统, 提出了一种基于切换的多模型自适应控制方法。该控制方法的特点在于以下两个方面: 首先, 引入一个高阶差分算子使得非线性系统的非线性项的限制条件不再要求全局有界; 其次, 提出的控制方法由线性自适应控制器、神经网络非线性自适应控制器以及切换机构组成: 线性控制器用来保证闭环系统的输入输出信号有界, 神经网络非线性控制器用来改善闭环系统的性能, 基于性能指标的切换机构在每一时刻选择性能指标较好的控制器对系统进行控制。理论分析和仿真实验说明了提出的多模型自适应控制方法的有效性。

**关键词:** 非线性系统; 多变量; 神经网络; 多模型自适应控制; 高阶差分算子

**引用格式:** 黄帅, 王昕, 王振雷. 一类非线性多变量系统的多模型自适应控制. 控制理论与应用, 2020, 37(4): 829 – 836

DOI: 10.7641/CTA.2019.80102

## Multiple model adaptive control for a class of nonlinear multivariable systems

HUANG Shuai<sup>1</sup>, WANG Xin<sup>2†</sup>, WANG Zhen-lei<sup>1</sup>

(1. Key Laboratory of Advanced Control and Optimization for Chemical Processes, East China University of Science and Technology, Shanghai 200237, China;

2. Center of Electrical & Electronic Technology, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China)

**Abstract:** A multiple model adaptive control method based on switching is proposed for a class of uncertain nonlinear multivariable discrete-time dynamical systems. The control method is characterized by the following two aspects. Firstly, the restriction of the nonlinear terms of the nonlinear systems is not required to be global-bounded by introducing the high-order difference operator. Secondly, the proposed control method is composed of a linear adaptive controller, a neural network based nonlinear adaptive controller and a switching mechanism: the linear controller can ensure the boundness of the input and output signals of the closed loop system, the neural network nonlinear controller can improve the performance of the closed loop system, and the performance-based switching mechanism selects the controller which has the better performance to control system at any moment. Theoretic analysis and simulation experiments are presented to show the effectiveness of the proposed method.

**Key words:** nonlinear systems; multivariable; neural networks; multiple model adaptive control; high-order difference operator

**Citation:** HUANG Shuai, WANG Xin, WANG Zhenlei. Multiple model adaptive control for a class of nonlinear multivariable systems. *Control Theory & Applications*, 2020, 37(4): 829 – 836

收稿日期: 2018–02–03; 录用日期: 2019–09–27.

†通信作者. E-mail: wangxin26@sjtu.edu.cn; Tel.: +86 21-34204622.

本文责任编辑: 胡跃明.

国家自然科学基金项目(61673268), 国家自然科学基金重大项目(61590922), 国家自然科学基金青年项目(61503138), 中央高校基本科研业务费专项资金, 上海市自然科学基金项目(16ZR1407300)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (61673268), the National Natural Science Foundation Major Project of China (61590922), the National Natural Science Foundation Youth Project of China (61503138), the Special Funds for Basic Scientific Research Operations of Central Universities and the Natural Science Foundation of Shanghai (16ZR1407300).

## 1 引言

在复杂的实际工业生产过程中,大多数工业对象通常是非线性、多变量、强耦合、大时滞、多工况的动态系统。由此,非线性动态系统的输出跟踪问题成为控制领域非常重要的研究课题<sup>[1-2]</sup>。

对于复杂的控制系统,其数学模型难以事先确定,因此基于模型的经典控制理论不再适用<sup>[3]</sup>。自适应控制是针对复杂工业生产过程提出的一种重要的先进控制方法,它将模型参数辨识与控制器设计有机结合,在对被控系统参数进行辨识的基础上实时调整控制器参数,可以很大程度上降低模型不确定性带来的影响。非线性自适应控制作为解决一类不确定非线性系统控制问题的有效方法,得到了深入且广泛的研究。文献[4-5]分别针对带有未知死区的单输入单输出(single input single output, SISO)和多输入多输出(multiple input multiple output, MIMO)非线性连续时间系统采用自适应控制,均能确保闭环系统的稳定性。文献[6-7]将自适应模糊控制应用于带有时滞的非线性连续时间系统,能保证闭环系统的所有信号有界。随着计算机技术的不断发展以及神经网络等智能方法的引入,出现了针对非线性离散时间系统的基于神经网络的自适应控制方法。文献[8]采用神经网络与自适应控制相结合的方法确保了非线性系统的稳定性和追踪误差的渐进收敛。文献[9]针对带有输入时滞的离散非线性系统,采用神经网络自适应预测控制方法实现了同步目标跟踪。文献[10]针对非线性离散时间系统的事件触发数据驱动控制问题,采用基于神经网络的事件触发的无模型自适应控制,实现了闭环系统和估计误差的最终有界性。这些非线性系统的不确定性较小,自适应控制都能达到较好的控制效果。但当对象的操作环境改变、部件老化损坏或对象的动态突然改变等因素引起大不确定性时,单个辨识器有限的辨识能力会导致不良的暂态响应。为了提高系统的控制性能,减小暂态误差,采用了多模型自适应控制方法<sup>[11]</sup>。

多模型自适应控制的思想最早可以追溯到20世纪70年代,Lainiotis<sup>[12]</sup>提出了加权多模型自适应控制,但是这种方法的稳定性证明很难得到。进入20世纪90年代,美国耶鲁大学的Narendra教授领导的科研小组提出了基于切换的多模型自适应控制方法,该方法采用多个初始值不同的线性自适应模型和多个覆盖参数变化范围的固定模型构成模型集,然后根据相应的切换指标选择出最优模型,进而选择将与之相对应的控制器切换到闭环系统中<sup>[13-14]</sup>,并对其稳定性进行了证明。但是对于非线性较强的系统,线性模型辨识能力是有限的,难以实现满意的控制性能。文献[15-16]利用神经网络的非线性逼近能力,提出基于神

经网络的多模型自适应控制,该方法能保证非线性最小相位系统的输入输出稳定性,并提高系统的控制性能。文献[17]将广义最小方差控制与多模型自适应控制相结合,将稳定性结论推广到非线性非最小相位系统。文献[18]通过引入修正的Clark指数来减小非线性部分对控制的干扰。文献[19]通过引入非线性鲁棒自适应模型将非线性项的限制条件放宽到零阶接近有界。文献[20]通过引入带动态正则化的鲁棒自适应律将非线性项的假设条件放宽到线性有界。在文献[20]的基础上,文献[21-22]通过引入增量模型将非线性项的假设条件放宽到差分线性有界。但是,上述文献中的多模型自适应控制方法针对非线性项的假设条件进行了逐步放宽,但都是针对单变量非线性系统进行研究。而文献[23-25]将单变量系统推广到多变量系统,应用范围得以很大扩展,但对于非线性项的假设条件仍然要求非常严格。

考虑到上述问题,本文的重点在于将非线性单变量系统的多模型自适应控制推广到非线性多变量系统,进而提出一种多模型自适应控制器设计方法,同时,通过引入高阶差分算子将非线性项有界条件放宽至差分有界。该多模型自适应控制器具有一个线性鲁棒自适应控制器和一个非线性神经网络自适应控制器。系统控制信号通过两个控制器切换产生,由线性鲁棒自适应控制器保证闭环系统输入输出信号有界,非线性神经网络自适应控制器提高系统的暂态性能。最后,分析了闭环系统的稳定性,并且通过仿真实验进行了有效性验证。

## 2 问题描述

考虑如下的多输入多输出非线性离散时间动态系统:

$$\mathbf{A}(q^{-1})\mathbf{y}(k+d) = \mathbf{B}(q^{-1})\mathbf{u}(k) + \mathbf{f}(\mathbf{X}(k)), \quad (1)$$

式中:  $\mathbf{u}(k), \mathbf{y}(k)$  表示的是系统输入向量和输出向量,其维数均为  $m \times 1$ ;  $d$  为系统时滞;  $\mathbf{A}(q^{-1}) = \mathbf{I} + \mathbf{A}_1 q^{-1} + \cdots + \mathbf{A}_n q^{-n}$ ,  $\mathbf{B}(q^{-1}) = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1 q^{-1} + \cdots + \mathbf{B}_{n-d} q^{-n+d}$  是矩阵多项式;  $\mathbf{I}$  是维数为  $m \times m$  的单位矩阵;  $\mathbf{A}_i (i = 1, \dots, n)$  和  $\mathbf{B}_j (j = 0, \dots, n-d)$  分别表示维数为  $m \times m$  的未知系统参数矩阵;  $\mathbf{X}(k) = [\mathbf{y}^T(k) \quad \mathbf{y}^T(k-1) \cdots \mathbf{y}^T(k-n+1) \quad \mathbf{u}^T(k) \cdots \mathbf{u}^T(k-n+1)]^T$ ;  $\mathbf{f}(\cdot)$  是维数为  $m \times 1$  的连续的非线性高阶函数,即  $\mathbf{f}(0) = 0$ ,  $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{X}}|_{\mathbf{X}=0} = 0$ ;  $q^{-1}$  是单位后移算子,即  $q^{-1}\mathbf{y}(k) = \mathbf{y}(k-1)$ 。

系统(1)满足如下假设条件:

**假设1** 系统的阶次  $n$  和时滞  $d$  已知。

**假设2** 组成  $\mathbf{A}(q^{-1}), \mathbf{B}(q^{-1})$  的参数矩阵  $\mathbf{A}_i, i = 1, \dots, n$ ;  $\mathbf{B}_j, j = 0, \dots, n-d$  在紧集  $\Sigma$  中变化,并且  $\mathbf{A}(q^{-1})$  是对角的,  $\mathbf{B}_0$  是非奇异的。

**假设3** 系统具有全局一致渐近稳定的零动态.

定义一个高阶差分算子<sup>[22]</sup>:  $\Delta = 1 - q^{-d}$ . 将式(1)乘以算子 $\Delta$ , 可以变化为以下形式:

$$\mathbf{A}(q^{-1})\Delta\mathbf{y}(k+d) = \mathbf{B}(q^{-1})\Delta\mathbf{u}(k) + \Delta\mathbf{f}(\mathbf{X}(k)), \quad (2)$$

其中 $\Delta\mathbf{f}(\mathbf{X}(k)) = \mathbf{f}(\mathbf{X}(k)) - \mathbf{f}(\mathbf{X}(k-d))$ .

**假设4** 存在已知常数 $\alpha_0, \alpha_1$ 使得高阶非线性项满足

$$\|\Delta\mathbf{f}(\mathbf{X}(k))\| \leq \alpha_0\|\Delta\bar{\mathbf{X}}(k)\| + \alpha_1,$$

式中:  $0 < \alpha_0 < \alpha$ ( $\alpha$ 是已知的正常数),  $0 < \alpha_1 < \infty$ ,

$$\bar{\mathbf{X}}(k) = [\mathbf{y}^T(k) \ \mathbf{y}^T(k-1) \ \cdots \ \mathbf{y}^T(k-n+1) \\ \mathbf{u}^T(k-d+1) \ \mathbf{u}^T(k-d) \ \cdots \\ \mathbf{u}^T(k-n+1)]^T,$$

并且 $\left\|\frac{\partial\Delta\mathbf{f}(\mathbf{X}(k))}{\partial\Delta\mathbf{u}(k)}\right\| = c_0 \geq 0$ .

**注1** 假设4是在文献[18]的假设3基础上引入高阶差分算子, 将假设条件放宽到差分有界. 在满足上述假设条件的基础上, 设计多模型自适应控制器, 使系统输出可以跟踪有界的参考输入, 并保证整个闭环系统的输入输出有界.

引入如下一步超前最优性能指标<sup>[26]</sup>:

$$J_c = \|\mathbf{T}(q^{-1})\mathbf{y}(k+d) - \mathbf{R}(q^{-1})\mathbf{w}(k+d)\|^2, \quad (3)$$

其中:  $\mathbf{w}(k)$ 是维数为 $m \times 1$ 的已知有界的参考输入向量;  $\mathbf{T}(q^{-1})$ 是维数为 $m \times m$ 的稳定的对角加权多项式矩阵, 满足 $\mathbf{T}(0)$ 非奇异;  $\mathbf{R}(q^{-1})$ 是对角加权多项式矩阵.

引入丢番图方程

$$\mathbf{T}(q^{-1}) = \mathbf{F}(q^{-1})\mathbf{A}(q^{-1}) + q^{-d}\mathbf{G}(q^{-1}), \quad (4)$$

其中:  $\mathbf{F}(q^{-1})$ 为 $d-1$ 阶的多项式矩阵;  $\mathbf{G}(q^{-1})$ 为 $n-1$ 阶的多项式矩阵.

式(2)乘以 $\mathbf{F}(q^{-1})$ 并联立式(4), 可得

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(q^{-1})\Delta\mathbf{y}(k+d) = \\ \mathbf{G}(q^{-1})\Delta\mathbf{y}(k) + \mathbf{F}(q^{-1})\mathbf{B}(q^{-1})\Delta\mathbf{u}(k) + \\ \mathbf{F}(q^{-1})\Delta\mathbf{f}(\mathbf{X}(k)). \end{aligned} \quad (5)$$

通过极小化性能指标式(3), 可得控制律 $\mathbf{u}(k)$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(q^{-1})\mathbf{B}(q^{-1})\Delta\mathbf{u}(k) + \\ \mathbf{F}(q^{-1})\Delta\mathbf{f}(\mathbf{X}(k)) + \mathbf{G}(q^{-1})\Delta\mathbf{y}(k) = \\ \mathbf{R}(q^{-1})\mathbf{w}(k+d) - \mathbf{T}(q^{-1})\mathbf{y}(k). \end{aligned} \quad (6)$$

为简便起见, 令

$$\phi(k+d) = \mathbf{T}(q^{-1})\mathbf{y}(k+d), \quad (7)$$

$$\mathbf{G}(q^{-1}) = \mathbf{G}_0 + \mathbf{G}_1q^{-1} + \cdots + \mathbf{G}_{n-1}q^{-n+1}, \quad (8)$$

$$\mathbf{H}(q^{-1}) = \mathbf{F}(q^{-1})\mathbf{B}(q^{-1}) =$$

$$\mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_1q^{-1} + \cdots + \mathbf{H}_{n-1}q^{-n+1}, \quad (9)$$

$$\boldsymbol{\theta} = [\mathbf{G}_0 \ \cdots \ \mathbf{G}_{n-1} \ \mathbf{H}_0 \ \cdots \ \mathbf{H}_{n-1}]^T, \quad (10)$$

$$\psi(k) = \Delta\mathbf{X}(k) =$$

$$[\Delta\mathbf{y}^T(k) \ \cdots \ \Delta\mathbf{y}^T(k-n+1) \ \Delta\mathbf{u}^T(k) \ \cdots \\ \Delta\mathbf{u}^T(k-n+1)]^T, \quad (11)$$

$$\zeta(\mathbf{X}(k)) = \mathbf{F}(q^{-1})\Delta\mathbf{f}(\mathbf{X}(k)), \quad (12)$$

则式(5)–(6)可以重新写为

$$\phi(k+d) = \boldsymbol{\theta}^T\psi(k) + \zeta(\mathbf{X}(k)) + \phi(k), \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\theta}^T\psi(k) + \zeta(\mathbf{X}(k)) = \\ \mathbf{R}(q^{-1})\mathbf{w}(k+d) - \mathbf{T}(q^{-1})\mathbf{y}(k). \end{aligned} \quad (14)$$

**注2** 由于高阶非线性项依赖于 $\mathbf{u}(k)$ 且存在于式(14)的两边, 因此 $\mathbf{u}(k)$ 与参考输入信号 $\mathbf{w}(k+d)$ 、输出信号 $\mathbf{y}(k)$ 、输入信号 $\mathbf{u}(k-1)$ 以及它们的过去值有关, 即 $\mathbf{u}(k)$ 是 $\Psi(k) = \{\mathbf{w}^T(k+d) \ \mathbf{w}^T(k+d-1) \ \cdots \ \Delta\mathbf{y}^T(k) \ \Delta\mathbf{u}^T(k-1) \ \cdots \\ \Delta\mathbf{u}^T(k-1) \ \Delta\mathbf{u}^T(k-2) \ \cdots\}^T$ 的函数 $\mathbf{u}(k) = \mathbf{F}[\Psi(k)]$ .

### 3 非线性多变量多模型自适应控制

本文所提出的多模型自适应控制系统, 如图1所示. 在图1中:  $P$ 表示被控对象,  $M_1$ 和 $M_2$ 分别是被控对象的线性模型和基于神经网络的非线性模型,  $C_1$ 和 $C_2$ 分别是模型所对应的线性和非线性自适应控制器,  $S$ 为切换机构.

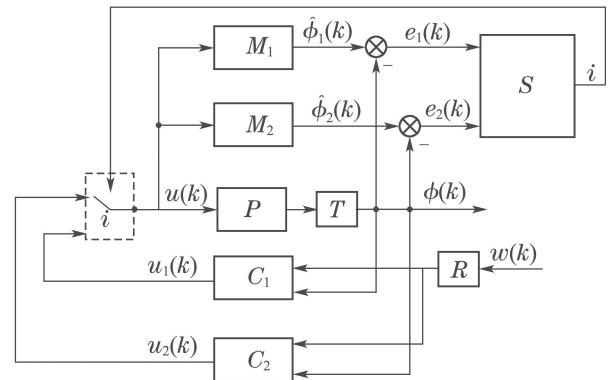


图1 多模型自适应控制系统的结构图

Fig. 1 The structure of multiple models adaptive control system

#### 3.1 线性鲁棒自适应控制器

针对参数辨识方程(13)建立一个线性鲁棒自适应模型 $M_1$ :

$$\hat{\phi}_1(k+d) = \hat{\theta}_1^T(k)\psi(k) + \phi(k), \quad (15)$$

式中:  $\hat{\phi}_1(k+d)$ 是 $m \times 1$ 维的模型输出向量,  $\hat{\phi}_1(k)$ 是 $m \times (2n)$ 行 $m$ 列的参数矩阵,

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_1(k) = [\hat{G}_{1,0}(k) \ \cdots \ \hat{G}_{1,n-1}(k) \ \hat{H}_{1,0}(k) \\ \cdots \ \hat{H}_{1,n-1}(k)]^T, \end{aligned} \quad (16)$$

$\hat{\mathbf{G}}_{1,i}, \hat{\mathbf{H}}_{1,i}$ 是 $m \times m$ 的估计参数向量;  $\psi(k)$ 是 $m \times (2n)$ 行1列的回归向量组成的矩阵.

采用下面的辨识算法在线校正 $\hat{\theta}_1(k)$ :

$$\hat{\theta}_1(k) = \hat{\theta}_1(k-d) + \frac{a_1(k)\psi(k-d)e_1^T(k)}{1 + \psi^T(k-d)\psi(k-d)}, \quad (17)$$

$$\hat{\theta}_1(k) = \text{proj}\{\hat{\theta}'_1(k)\}, \quad (18)$$

$$a_1(k) = \begin{cases} 1, & \|\mathbf{e}_1(k)\| > 2M(k-d), \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \quad (19)$$

$$\mathbf{e}_1(k) = \phi(k) - \hat{\phi}_1(k), \quad (20)$$

其中:  $M(k-d)$ 为 $\|\zeta(\mathbf{X}(k))\|$ 的上界;  $\hat{\theta}'_1(k) = [\hat{\mathbf{G}}_{1,0}(k) \cdots \hat{\mathbf{G}}_{1,n-1}(k) \quad \hat{\mathbf{H}}'_{1,0}(k) \cdots \hat{\mathbf{H}}'_{1,n-1}(k)]^T$ ;  $\text{proj}\{\cdot\}$ 是一投影算子, 满足

$$\text{proj}\{\hat{\theta}'_1(k)\} = \begin{cases} \hat{\theta}'_1(k), \hat{\mathbf{H}}'_{1,0}(k), & \text{非奇异}, \\ [\cdots \hat{\mathbf{H}}_{1,0}(k-1) \cdots]^T, & \text{其他}. \end{cases} \quad (21)$$

由式(14)和确定性等价原则可得线性鲁棒自适应控制器 $\mathbf{u}_1(k)$ :

$$\hat{\theta}_1^T(k)\psi(k) = \mathbf{R}(q^{-1})\mathbf{w}(k+d) - \mathbf{T}(q^{-1})\mathbf{y}(k). \quad (22)$$

### 3.2 神经网络非线性自适应控制器

针对参数辨识方程(13)建立一个基于神经网络的非线性自适应模型 $M_2$ :

$$\hat{\phi}_2(k+d) = \hat{\theta}_2^T(k)\psi(k) + \hat{\zeta}(\mathbf{X}(k)) + \phi(k), \quad (23)$$

式中:  $\hat{\phi}_2(k+d)$ 是 $m \times 1$ 维的模型输出向量,  $\hat{\phi}_2(k)$ 是 $m \times (2n)$ 行 $m$ 列的参数矩阵,

$$\hat{\theta}_2(k) = [\hat{\mathbf{G}}_{2,0}(k) \cdots \hat{\mathbf{G}}_{2,n-1}(k) \quad \hat{\mathbf{H}}_{2,0}(k) \cdots \hat{\mathbf{H}}_{2,n-1}(k)]^T, \quad (24)$$

$\hat{\zeta}(\mathbf{X}(k))$ 是 $\zeta(\mathbf{X}(k))$ 的神经网络估计, 其中 $\zeta(\mathbf{X}(k)) = \Delta\phi(k+d) - \hat{\theta}_2(k)^T\psi(k)$ . 同时根据注2可知

$$\hat{\zeta}(\mathbf{X}(k)) = \mathbf{NN}[\hat{\mathbf{W}}(k), \Psi(k)], \quad (25)$$

其中:  $\mathbf{NN}[\cdot]$ 表示神经网络结构;  $\hat{\mathbf{W}}(k)$ 为 $k$ 时刻理想权矩阵 $\mathbf{W}^*$ 的估计;  $\Psi(k)$ 是神经网络的输入向量.

因为对没有界限要求,  $\zeta(\mathbf{X}(k))$ 通常不直接使用神经网络进行估计. 首先使用神经网络估计 $\bar{\zeta}(\mathbf{X}(k)) = \zeta(\mathbf{X}(k))/(\mathbf{F}(q^{-1})(\alpha_0\|\Delta\bar{\mathbf{X}}(k)\| + \alpha_1))$ , 然后把 $\mathbf{F}(q^{-1})\bar{\zeta}(\mathbf{X}(k))(\alpha_0\|\Delta\bar{\mathbf{X}}(k)\| + \alpha_1)$ 作为 $\zeta(\mathbf{X}(k))$ 的估计. 其中 $\hat{\zeta}(\mathbf{X}(k))$ 是 $\bar{\zeta}(\mathbf{X}(k))$ 的神经网络估计, 即

$$\hat{\zeta}(\mathbf{X}(k)) = \mathbf{F}(q^{-1})\hat{\zeta}(\mathbf{X}(k))(\alpha_0\|\Delta\bar{\mathbf{X}}(k)\| + \alpha_1). \quad (26)$$

与文献[18]和文献[24]类似, 除了要求参数矩阵的估计 $\hat{\theta}_2(k)$ 和权矩阵的估计 $\hat{\mathbf{W}}(k)$ 位于一个预先定义的紧集 $\Xi$ 内,  $\hat{\mathbf{H}}_{2,0}(k)$ 非奇异, 并未对 $\hat{\theta}_2(k)$ 的辨识算法和神经网络的结构及权阵更新算法有任何限制, 即

$$\hat{\theta}_2(k), \hat{\mathbf{W}}(k) \in \Xi; \hat{\mathbf{H}}_{2,0}(k) \text{非奇异}, \forall k. \quad (27)$$

非线性辨识误差为

$$\mathbf{e}_2(k) = \phi(k) - \hat{\phi}_2(k). \quad (28)$$

由式(14)和确定性等价原则可得基于神经网络的非线性自适应控制器 $\mathbf{u}_2(k)$ :

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_2^T(k)\psi(k) + \hat{\zeta}(\mathbf{X}(k)) = \\ \mathbf{R}(q^{-1})\mathbf{w}(k+d) - \mathbf{T}(q^{-1})\mathbf{y}(k). \end{aligned} \quad (29)$$

### 3.3 切换机构

采用如下的控制器切换性能指标函数:

$$\begin{aligned} J_j(k) = \sum_{l=d}^k \frac{a_j(l)[\|\mathbf{e}_j(l)\|^2 - 4M(k-d)^2]}{2[1 + \psi(k-d)^T\psi(k-d)]} + \\ c \sum_{l=k-N+1}^k [1 - a_j(l)]\|\mathbf{e}_j(l)\|^2, \end{aligned} \quad (30)$$

式中:  $\mathbf{e}_j(k) = \phi(k) - \hat{\phi}_j(k)$ ;  $c \geq 0$ 是一个预先确定的正常数;  $N$ 是正整数.

$$a_j(k) = \begin{cases} 1, & \|\mathbf{e}_j(k)\| > 2M(k-d), \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} \quad (31)$$

比较 $k$ 时刻两个模型的性能指标函数值, 选择函数值较小的模型对应的控制器应用于被控系统.

$$\mathbf{u}(k) = \begin{cases} \mathbf{u}_1(k), & J_1(k) \leq J_2(k), \\ \mathbf{u}_2(k), & J_1(k) > J_2(k). \end{cases} \quad (32)$$

### 3.4 多模型自适应控制算法

本文设计的多模型自适应控制算法的具体步骤如下:

- 1) 测取 $\mathbf{y}(k)$ , 形成数据向量 $\psi(k-d)$ ;
- 2) 利用式(17)–(21)和式(25)–(28)估计控制器参数, 并更新神经网络权阵;
- 3) 利用上一步得到的辨识结果和式(22)(29)分别设计控制器 $\mathbf{u}_1(k)$ 和 $\mathbf{u}_2(k)$ ;
- 4) 利用式(30)和(32)分别设计多模型自适应控制系统的性能指标和切换律;
- 5) 令 $k = k + 1$ , 返回1), 依次重复.

### 4 稳定性分析

**定理1** 系统(1)满足假设1–4, 则当采用线性鲁棒自适应控制算法(17)–(21)作用于系统(1)时, 闭环系统具有有界输入有界输出稳定性.

**证** 定义 $\tilde{\theta}_1(k) = \hat{\theta}_1(k) - \theta$ , 由式(13)(15)和(20)可知

$$\begin{aligned} e_1(k) &= \phi(k) - \hat{\phi}_1(k) = \\ \Delta\phi(k) - \hat{\theta}_1^T(k-d)\psi(k-d) &= \\ -\tilde{\theta}_1(k-d)\psi(k-d) + \zeta(\mathbf{X}(k-d)). \end{aligned} \quad (33)$$

由式(17)–(18)(21)和(33)可知

$$\begin{aligned} \|\tilde{\theta}_1(k)\|^2 &= \\ \|\tilde{\theta}_1(k-d)\|^2 + \frac{2a_1(k)\psi^T(k-d)\tilde{\theta}_1(k-d)e(k)}{1+\psi^T(k-d)\psi(k-d)} + \\ \frac{a_1(k)^2\psi^T(k-d)\psi(k-d)\|e(k)\|^2}{[1+\psi^T(k-d)\psi(k-d)]^2} &= \\ \|\tilde{\theta}_1(k-d)\|^2 + \frac{2a_1(k)[\zeta(\mathbf{X}^T(k-d))]\mathbf{e}(k)}{1+\psi^T(k-d)\psi(k-d)} - \\ \frac{a_1(k)\|e(k)\|^2}{1+\psi^T(k-d)\psi(k-d)}. & \\ \left[\frac{2}{1} - \frac{a_1(k)\psi^T(k-d)\psi(k-d)}{1+\psi^T(k-d)\psi(k-d)}\right] &\leqslant \\ \|\tilde{\theta}_1(k-d)\|^2 - \frac{a_1(k)\|e(k)\|^2}{1+\psi^T(k-d)\psi(k-d)} + \\ \frac{2a_1(k)[\zeta(\mathbf{X}^T(k-d))]\mathbf{e}(k)}{1+\psi^T(k-d)\psi(k-d)} &\leqslant \\ \frac{1}{1+\psi^T(k-d)\psi(k-d)} & \\ \|\tilde{\theta}_1(k-d)\|^2 - \frac{a_1(k)\|e(k)\|^2}{1+\psi^T(k-d)\psi(k-d)} + \\ \frac{a_1(k)[\|e(k)\|^2/2 + 2\|\zeta(\mathbf{X}(k-d))\|^2]}{1+\psi^T(k-d)\psi(k-d)} &\leqslant \\ \|\tilde{\theta}_1(k-d)\|^2 - & \\ \frac{a_1(k)[\|e(k)\|^2 - 4\|\zeta(\mathbf{X}(k-d))\|^2]}{2[1+\psi^T(k-d)\psi(k-d)]} &\leqslant \\ \|\tilde{\theta}_1(k-d)\|^2 - \frac{a_1(k)[\|e(k)\|^2 - 4M(k-d)^2]}{2[1+\psi^T(k-d)\psi(k-d)]}. & \end{aligned} \quad (34)$$

由式(19)可知: 当  $\|\mathbf{e}_1(k)\| > 2M(k-d)$  时,  $a_1(k) = 1$ ; 当  $\|\mathbf{e}_1(k)\| \leqslant 2M(k-d)$  时,  $a_1(k) = 1$ . 所以  $\{\|\tilde{\theta}_1(k)\|^2\}$  是单调非增序列, 因此  $\hat{\theta}_1(k)$  有界, 并且

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=d}^N \frac{a_1(k)[\|\mathbf{e}_1(k)\|^2 - 4M(k-d)^2]}{2[1+\psi^T(k-d)\psi(k-d)]} < \infty, \quad (35)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{a_1(k)[\|\mathbf{e}_1(k)\|^2 - 4M(k-d)^2]}{2[1+\psi^T(k-d)\psi(k-d)]} \rightarrow 0. \quad (36)$$

由式(20)和式(22), 可得

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1(k) &= \Delta\phi(k) - \hat{\theta}_1^T(k-d)\psi(k-d) = \\ T(q^{-1})\mathbf{y}(k) - \mathbf{T}(q^{-1})\mathbf{y}(k-d) - \\ [\mathbf{R}(q^{-1})\mathbf{w}(k) - \mathbf{T}(q^{-1})\mathbf{y}(k-d)] &= \\ T(q^{-1})\mathbf{y}(k) - \mathbf{R}(q^{-1})\mathbf{w}(k). \end{aligned} \quad (37)$$

由式(37)和  $\mathbf{T}(q^{-1})$  的稳定性, 以及假设3可知, 存在正常数  $C_1, C_2, C_3, C_4$  满足

$$\begin{aligned} |\mathbf{y}_i(k)| &\leqslant C_1 + C_2 \max_{0 \leqslant \tau \leqslant k} |\mathbf{e}_{1i}(\tau)|, \\ i &= 1, 2, \dots, m, \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} |\mathbf{u}_i(k-d)| &\leqslant C_3 + C_4 \max_{0 \leqslant \tau \leqslant k} |\mathbf{y}_i(\tau)|, \\ i &= 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \quad (39)$$

由于  $\mathbf{X}(k-d) = [\mathbf{y}^T(k-d) \cdots \mathbf{y}^T(k-n-d+1) \mathbf{u}^T(k-d) \cdots \mathbf{u}^T(k-n-d+1)]^T$ , 因此, 存在正常数  $C_5, C_6$  满足

$$\|\mathbf{X}(k-d)\| \leqslant C_5 + C_6 \max_{0 \leqslant \tau \leqslant k} \|\mathbf{e}_1(\tau)\|. \quad (40)$$

由式(40)可知, 闭环系统输入、输出信号的有界性由  $\mathbf{e}_1(k)$  的有界性决定.

下面假设  $\mathbf{e}_1(k)$  无界. 由式(19)可知, 存在时刻  $K > 0$ , 当  $k > K$  时,  $\|\mathbf{e}_1(k)\| > 2M(k-d)$  并且  $a_1(k) = 1$ , 即式(36)的分子是正实序列, 于是存在一个单调递增序列  $\{\|\mathbf{e}_1(k_n)\|\}$ , 使得  $\lim_{k_n \rightarrow \infty} \|\mathbf{e}_1(k_n)\| = \infty$ . 由于

$$\begin{aligned} \frac{a_1(k_n)[\|\mathbf{e}_1(k_n)\|^2 - 4M(k_n-d)^2]}{2[1+\psi^T(k_n-d)\psi(k_n-d)]} &= \\ \frac{a_1(k_n)[\|\mathbf{e}_1(k_n)\|^2 - 4M(k_n-d)^2]}{2[1+\|\psi(k_n-d)\|^2]} &\geqslant \\ \frac{a_1(k_n)[\|\mathbf{e}_1(k_n)\|^2 - 4M(k_n-d)^2]}{2[1+(\|\mathbf{X}(k_n-d)\| + \|\mathbf{X}(k_n-2d)\|)^2]} &\geqslant \\ \frac{a_1(k_n)[\|\mathbf{e}_1(k_n)\|^2 - 4M(k_n-d)^2]}{2[1+(2C_5 + 2C_6 \max_{0 \leqslant \tau \leqslant k_n} \{\|\mathbf{e}_1(\tau)\|\})^2]} &= \\ \frac{a_1(k_n)[\|\mathbf{e}_1(k_n)\|^2 - 4M(k_n-d)^2]}{2[1+(2C_5 + 2C_6 \|\mathbf{e}_1(k_n)\|)^2]}, \end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned} \lim_{k_n \rightarrow \infty} \frac{a_1(k_n)[\|\mathbf{e}_1(k_n)\|^2 - 4M(k_n-d)^2]}{2[1+\psi^T(k_n-d)\psi(k_n-d)]} &\geqslant \\ \frac{1}{8C_6^2} &> 0. \end{aligned} \quad (41)$$

这与式(36)矛盾, 假设不成立, 从而  $\mathbf{e}_1(k)$  有界. 因此, 只采用线性鲁棒自适应算法时, 闭环系统具有有界输入输出稳定性.

**定理2** 系统(1)满足假设1–4, 则当采用多模型自适应控制算法(15)–(32)作用于系统(1)时, 闭环切换系统具有有界输入有界输出稳定性.

证 由式(23)(28)–(29)可知

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_2(k) &= \phi(k) - \hat{\phi}_2(k) = \\ \Delta\phi(k) - \hat{\theta}_2(k-d)^T\psi(k-d) - \\ \hat{\zeta}(\mathbf{X}(k-d)) &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{T}(q^{-1})\mathbf{y}(k) - \mathbf{T}(q^{-1})\mathbf{y}(k-d) - \\ & [\mathbf{R}(q^{-1})\mathbf{w}(k) - \mathbf{T}(q^{-1})\mathbf{y}(k-d)] = \\ & \mathbf{T}(q^{-1})\mathbf{y}(k) - \mathbf{R}(q^{-1})\mathbf{w}(k). \end{aligned} \quad (42)$$

由式(42)和 $\mathbf{T}(q^{-1})$ 的稳定性以及假设3可知, 存在正常数 $C_7, C_8, C_9, C_{10}$ 满足; 由式(37)和 $\mathbf{T}(q^{-1})$ 的稳定性以及假设3可知, 存在正常数 $C_1, C_2, C_3, C_4$ 满足

$$|\mathbf{y}_i(k)| \leq C_7 + C_8 \max_{0 \leq \tau \leq k} |\mathbf{e}_{2i}(\tau)|, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (43)$$

$$|\mathbf{u}_i(k-d)| \leq C_9 + C_{10} \max_{0 \leq \tau \leq k} |\mathbf{y}_i(\tau)|, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (44)$$

因此存在正常数 $C_{11}, C_{12}$ 满足

$$\|\mathbf{X}(k-d)\| \leq C_{11} + C_{12} \max_{0 \leq \tau \leq k} \|\mathbf{e}_2(\tau)\|. \quad (45)$$

于是, 在每一时刻 $k$ , 辨识误差 $\mathbf{e}(k) = \mathbf{e}_1(k)$ 或 $\mathbf{e}_2(k)$ , 因此, 结合式(40)和(45)可知, 存在正常数 $D_1, D_2$ 满足

$$\|\mathbf{X}(k-d)\| \leq D_1 + D_2 \max_{0 \leq \tau \leq k} \|\mathbf{e}(\tau)\|. \quad (46)$$

由式(31)和式(35)可知,  $J_1(k)$ 总是有界的. 对于 $J_2(k)$ , 存在以下两种情况:

1)  $J_2(k)$ 无界. 根据 $J_1(k)$ 的有界结论可知, 存在

$$\mathbf{f}(\mathbf{X}(k)) = \begin{bmatrix} 0.4u_1(k) + \sin(y_1^2(k)) + \ln(4 + \sin(y_1^2(k-1) + y_2^2(k) + u_2^2(k-1))) \\ 0.3u_2(k) + \sin(y_2^2(k)) + \ln(4 + \sin(y_1^2(k) + y_2^2(k-1) + u_1^2(k-1))) \end{bmatrix}.$$

系统的阶次 $n = 2$ , 时滞 $d = 2$ . 通过求解矩阵 $\mathbf{B}(q^{-1})$ 行列式的根可知系统是零动态渐近稳定的, 满足假设3; 同时高阶非线性项 $\|\Delta \mathbf{f}(\mathbf{X}(k))\| \leq 0.5\|\Delta \bar{\mathbf{X}}(k)\| + 0.3$ ,  $\bar{\mathbf{X}}(k) = \mathbf{X}(k) = [\mathbf{y}^T(k) \ \mathbf{y}^T(k-1) \ \mathbf{u}^T(k) \ \mathbf{u}^T(k-1)]^T$ , 且 $\left\| \frac{\partial \Delta \mathbf{f}(\mathbf{X}(k))}{\partial \Delta \mathbf{u}(k)} \right\| = 0.5$ 符合假设4.

给定的参考输入信号

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(k+1) = & \\ & [4(\sin \frac{\pi k}{15} + \sin \frac{\pi k}{25}) \ 2(\sin \frac{\pi k}{15} + \sin \frac{\pi k}{25})]^T. \end{aligned}$$

选择加权矩阵多项式

$$\mathbf{T}(q^{-1}) = \begin{bmatrix} 1 - 0.2q^{-1} & 0 \\ 0 & 1 - 0.2q^{-1} \end{bmatrix},$$

使得闭环系统的极点都分布在0.2; 同时选择加权矩阵

$$\text{多项式 } \mathbf{R}(q^{-1}) = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 \\ 0 & 0.8 \end{bmatrix}.$$

式(30)的参数选择为 $c = 1, N = 1$ . 根据多次试验, 神经网络非线性模型选择单隐层BP神经网络, 引

某一时刻 $k_0$ , 对于任意的 $k \geq k_0$ , 有 $J_2 \geq J_1$ . 由切换准则(30)可得, 多模型自适应控制器退化为单一的自适应控制器, 由等价确定原理可知, 当 $k \geq k_0 + 1$ 时, 闭环系统辨识误差 $\mathbf{e}(k) = \mathbf{e}_1(k)$ 满足

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{a_1(k)[\|\mathbf{e}(k)\|^2 - 4M(k-d)^2]}{2[1 + \psi^T(k-d)\psi(k-d)]} \rightarrow 0. \quad (47)$$

2)  $J_2(k)$ 有界. 由切换准则(30)可知,  $\mathbf{e}_2(k)$ 满足

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{a_2(k)[\|\mathbf{e}_2(k)\|^2 - 4M(k-d)^2]}{2[1 + \psi^T(k-d)\psi(k-d)]} \rightarrow 0,$$

故闭环系统的辨识误差 $\mathbf{e}(k) = \mathbf{e}_1(k)$ 或 $\mathbf{e}_2(k)$ 满足式(47).

因此, 由式(46)–(47)和引理3.1<sup>[27]</sup>可知, 闭环切换系统具有有界输入有界输出稳定性.

## 5 仿真实验

考虑如下的非线性多变量离散时间动态系统:

$$\begin{bmatrix} 1 - 0.6q^{-1} - 1.5q^{-2} & 0 \\ 0 & 1 - 0.6q^{-1} - 1.5q^{-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(k+1) \\ y_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 0.5q^{-1} & 0.5 - 1.2q^{-1} \\ 0.6q^{-1} & 1.3 + 1.5q^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix} + \mathbf{f}(\mathbf{X}(k)),$$

式中:

$$\mathbf{f}(\mathbf{X}(k)) = \begin{bmatrix} 0.4u_1(k) + \sin(y_1^2(k)) + \ln(4 + \sin(y_1^2(k-1) + y_2^2(k) + u_2^2(k-1))) \\ 0.3u_2(k) + \sin(y_2^2(k)) + \ln(4 + \sin(y_1^2(k) + y_2^2(k-1) + u_1^2(k-1))) \end{bmatrix}.$$

入双曲正切的S型函数的隐层神经元, 且8个隐层神经元即可保证最好的估计效果; 采用线性函数的输出层神经元, 学习率 $\eta = 0.3$ .

图2和图3显示了系统只使用线性鲁棒直接自适应控制器时的输出和输入响应曲线. 由图可知, 系统的输入信号和输出信号是有界的, 但存在输入震荡起伏剧烈、输出跟踪效果较差等问题.

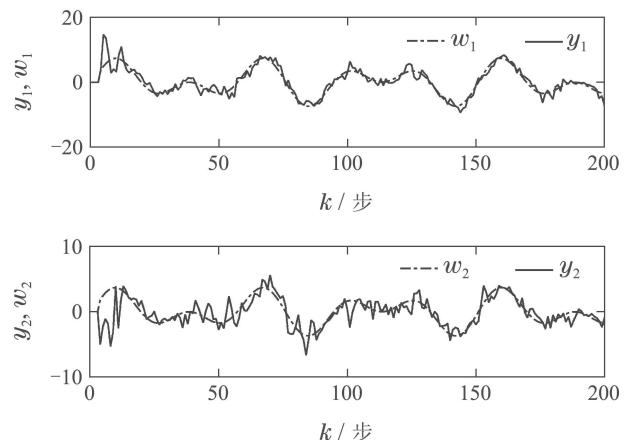


图2 线性鲁棒自适应控制系统的输出

Fig. 2 The output of linear robust adaptive control system

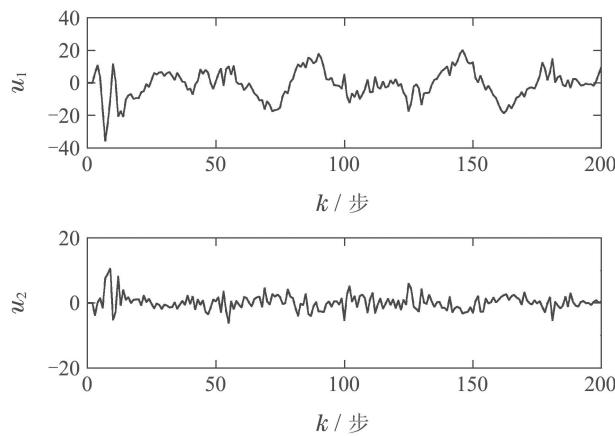


图3 线性鲁棒自适应控制系统的控制输入

Fig. 3 The control input of linear robust adaptive control system

图4和图5显示了系统采用本文提出的多模型自适应控制器时的输出和输入响应曲线。由图可知，系统的输入信号和输出信号都是有界的，且输入震荡相对平缓，输出能在较短的时间周期内达到良好的渐近跟踪性能。在整个控制过程中暂态误差较小，整体性能优于只使用线性鲁棒直接自适应控制器。

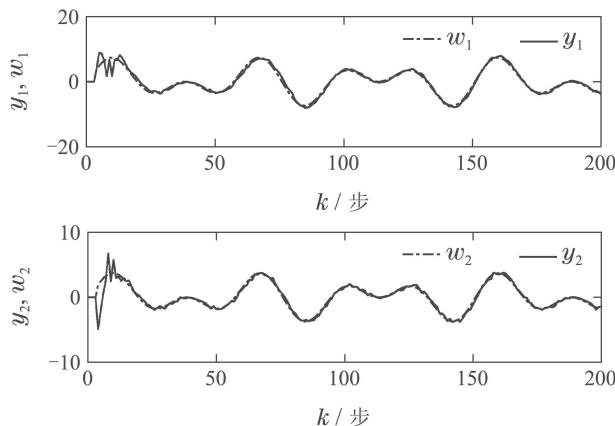


图4 多模型自适应控制系统的输出

Fig. 4 The output of multiple model adaptive control system

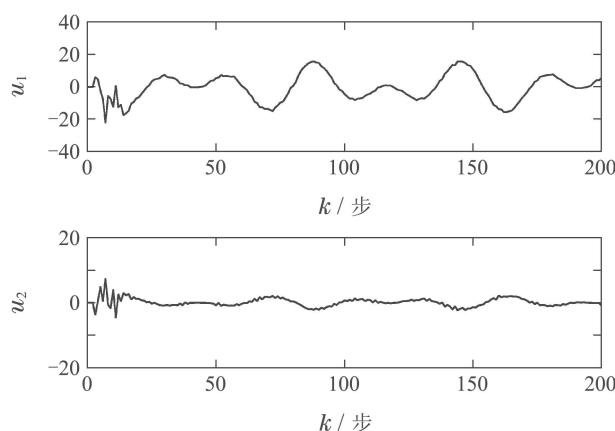


图5 多模型自适应控制系统的控制输入

Fig. 5 The control input of multiple model adaptive control system

图6为线性鲁棒自适应控制器(见纵轴上的1)和神经网络非线性自适应控制器(见纵轴上的2)之间的切换序列。从图中可以看出，大部分时间是非线性自适应控制器在进行控制，当非线性自适应控制器性能偶尔下降时，线性自适应控制器会进行控制。

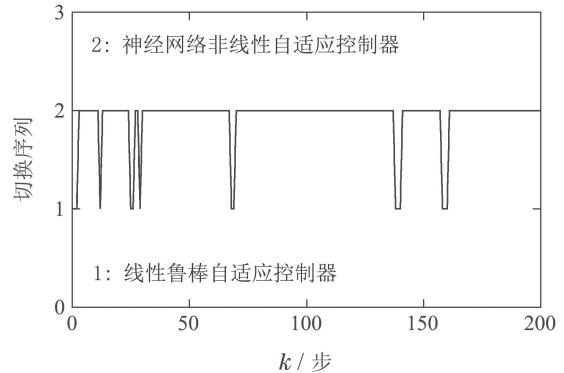


图6 多模型自适应控制系统的切换序列

Fig. 6 The switching sequence of multiple model adaptive control system

## 6 结论

本文针对一类非线性多变量离散时间动态系统，设计了多模型自适应控制器。该控制器由一个线性鲁棒自适应控制器、一个神经网络非线性自适应控制器以及切换机构组成；同时引入高阶差分算子可以放宽非线性项有界性的假设条件。在此基础上，可将闭环系统的输入输出有界稳定性和系统的控制性能分离开单独进行控制，最终这两个目标能同时达成，获得良好的控制效果。仿真实验比较了多模型自适应控制器和单个线性鲁棒自适应控制器的控制效果，说明了所提出的多模型自适应控制器的有效性。在具有多个操作参数和多个变量的工业过程中，此多模型自适应控制器能实现对被控系统的良好控制，进而优化控制效果、提高生产效率等。

## 参考文献：

- [1] MAN Yongchao, LIU Yungang. Adaptive control design via linear state-feedback for high-order uncertain nonlinear systems. *Acta Automatica Sinica*, 2014, 40(1): 24 – 32.  
(满永超, 刘永刚. 高阶不确定非线性系统线性状态反馈自适应控制设计. 自动化学报, 2014, 40(1): 24 – 32.)
- [2] DENG W X, YAO J Y, MA D W. Robust adaptive asymptotic tracking control of a class of nonlinear systems with unknown input dead-zone. *Journal of the Franklin Institute*, 2015, 352(12): 5686 – 5707.
- [3] BANDINELLI S, FUGGETTA A, LAVAZZA L, et al. Modeling and improving an industrial software process. *IEEE Transaction on Software Engineering*, 1995, 21(5): 440 – 454.
- [4] WANG X S, SU C Y, HONG H R. Robust adaptive control of a class of nonlinear systems with unknown dead-zone. *Automatic*, 2004, 40(3): 407 – 413.
- [5] SHI W X, LUO R, LI B Q. Adaptive fuzzy prescribed performance control for MIMO nonlinear systems with unknown control direction and unknown dead-zone inputs. *ISA Transaction*, 2017, 66(1): 86 – 95.

- [6] HASSAN A Y, MOHAMED H. Observer-based adaptive fuzzy control for a class of nonlinear time-delay systems. *International Journal of Automation and Computing*, 2013, 10(4): 275 – 280.
- [7] ZHOU Q, WANG L J, WU C W, et al. Adaptive fuzzy tracking control for a class of pure-feedback nonlinear systems with time-varying delay and unknown dead zone. *Fuzzy Sets and Systems*, 2017, 329(12): 36 – 60.
- [8] SIMON G F, VISAカン K. Discrete-time adaptive control of nonlinear systems using neural networks. *IFAC Proceedings Volumes*, 1998, 31(22): 121 – 126.
- [9] ZHAO J M. NN-adaptive predictive control for a class of discrete-time nonlinear systems with input-delay. *Neurocomputing*, 2016, 173(3): 1832 – 1838.
- [10] LIU D, YANG G H. Neural network-based event-triggered MFAC for nonlinear discrete-time processes. *Neurocomputing*, 2018, 272(1): 356 – 364.
- [11] HAN Z, NARENDRA K S. New concepts in adaptive control using multiple models. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, 57(1): 78 – 89.
- [12] LAINIOTIS D G. Partitioning: A unifying framework for adaptive systems, I: Estimation. *Proceedings of the IEEE*, 1976, 64(8): 1126 – 1143.
- [13] NARENDRA K S, BALAKRISHNAN J. Improving transient response of adaptive control systems using multiple models and switching. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1994, 39(9): 1861 – 1866.
- [14] NARENDRA K S, BALAKRISHNAN J. Adaptive control using multiple models. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1997, 42(2): 171 – 187.
- [15] CHEN L J, NARENDRA K S. Nonlinear adaptive control using neural networks and multiple models. *Automatica*, 2001, 37(8): 1245 – 1255.
- [16] CHEN L J, NARENDRA K S. Identification and control of a nonlinear discrete-time system based on its linearization: a unified framework. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2004, 15(3): 663 – 673.
- [17] FU Yue, CHAI Tianyou. Direct adaptive control for a class of nonlinear non-minimum phase systems. *Control Theory & Applications*, 2006, 23(6): 886 – 890.  
(富月, 柴天佑. 一类非线性非最小相位系统的直接自适应控制. 控制理论与应用, 2006, 23(6): 886 – 890.)
- [18] FU Y, CHAI T Y. Indirect self-tuning control using multiple models for non-affine nonlinear systems. *International Journal of Control*, 2011, 84(6): 1031 – 1040.
- [19] HUANG Miao, WANG Xin, WANG Zhenlei. Nonlinear adaptive controller using multiple models and neural networks based on zero order proximity boundness. *Control and Decision*, 2013, 28(9): 1315 – 1321.  
(黄淼, 王昕, 王振雷. 非线性零阶接近有界多模型神经网络自适应控制器. 控制与决策, 2013, 28(9): 1315 – 1321.)
- [20] HUANG M, WANG X, WANG Z L. Multiple model adaptive control for a class of linear-bounded nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2015, 60(1): 271 – 276.
- [21] HUANG M, WANG X, WANG Z L. Multiple model self-tuning control for a class of nonlinear systems. *International Journal of Control*, 2015, 88(10): 1984 – 1994.
- [22] HUANG M, WANG X, WANG Z L. Nonlinear adaptive switching control for a class of non-affine nonlinear systems. *Chinese Journal of Chemical Engineering*, 2016, 24(9): 1243 – 1251.
- [23] FU Yue, CHAI Tianyou, YUE Heng. Multiple models adaptive decoupling control for a class of nonlinear multivariable systems. *Control and Decision*, 2006, 21(2): 139 – 147.  
(富月, 柴天佑, 岳恒. 一类非线性多变量系统的多模型自适应解耦控制. 控制与决策, 2006, 21(2): 139 – 147.)
- [24] FU Y, CHAI T Y. Nonlinear multivariable adaptive control using multiple models and neural networks. *Automatica*, 2007, 43(6): 1101 – 1110.
- [25] FU Y, CHAI T Y, WANG H. Stable multiple model adaptive control of nonlinear multivariable discrete-time systems. *American Control Conference*. St. Louis, USA: IEEE, 2009: 5162 – 5167.
- [26] FU Yue. *Nonlinear adaptive decoupling control based on neural networks and multiple models*. Shenyang: Northeastern University, 2009.  
(富月. 基于多模型与神经网络的非线性自适应解耦控制. 沈阳: 东北大学, 2009.)
- [27] GOODWIN G C, RAMADGE P J, CAINES P E. Discrete-time multivariable adaptive control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1980, 25(3): 449 – 456.

### 作者简介:

**黄 帅** 硕士研究生, 目前研究方向为多模型自适应控制, E-mail: 1247666082@qq.com;

**王 昕** 博士, 副教授, 目前研究方向为多模型自适应控制, E-mail: wangxin26@sjtu.edu.cn;

**王振雷** 博士, 教授, 目前研究方向为控制系统理论和应用, E-mail: wangzhen\_1@ecust.edu.cn.