第 36 卷第 6 期
2019 年 6 月

控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications

Vol. 36 No. 6
Jun. 2019

# 有限时间内异构多智能体系统的协同输出调节

魏文军[1], 马羊琴[1†], 李宗刚[2]

(1. 兰州交通大学 自动化与电气工程学院, 甘肃 兰州 730070; 2. 兰州交通大学 机电工程学院, 甘肃 兰州 730070)

**摘要**: 针对异构多智能体系统有限时间输出调节问题, 本文提出了分布式有限时间状态观测器控制算法和相应的输出反馈控制策略. 应用图论、Lyapunov稳定性理论证明了所设计的观测器能够在有限时间内估计出外部系统状态, 同时可以保证系统在有限时间内的稳定性, 很好的解决了当部分跟随者无法获取外部命令时的有限时间输出调节问题. 最后, 通过MATLAB数值仿真验证了该协议的有效性和正确性, 仿真结果表明系统除了在有限时间内获得更快的收敛速度外, 还具有良好的暂态性能.

**关键词**: 异构多智能体系统; 分布式有限时间观测器; 协同输出调节; 快速收敛

**引用格式**: 魏文军, 马羊琴, 李宗刚. 有限时间内异构多智能体系统的协同输出调节. 控制理论与应用, 2019, 36(6): 885 – 892

DOI: 10.7641/CTA.2018.80225

# Cooperative output regulation of heterogeneous multi-agent system in finite time

WEI Wen-jun[1], MA Yang-qin[1†], LI Zong-gang[2]

(1. School of Automation & Electrical Engineering, Lanzhou Jiao tong University, Lanzhou Gansu 730070, China;
2. School of Mechanical and Electrical Engineering, Lanzhou Jiao tong University, Lanzhou Gansu 730070, China)

**Abstract:** In this paper, a distributed control algorithm by finite time state observer and output feedback control strategy are proposed to solve the cooperative output regulation problem of heterogeneous multi-agent systems in finite time. Based on the graph theory and Lyapunov stability theory, we prove that the designed observer can estimate the state of the external system in a limited time, and the stability of the system is also proved in finite time. This effectively solves the output regulation problem that some followers are unable to obtain the external commands. Finally, simulations are provided to indicate the effectiveness and correctness of the protocol. The example results are showed to illustrate that the systems can obtain a faster convergence speed and a good transient performance in finite time.

**Key words:** heterogeneous multi-agent systems; distributed finite time state observer; cooperative output regulation; convergence speed

**Citation:** WEI Wenjun, MA Yangqin, LI Zonggang. Cooperative output regulation of heterogeneous multi-agent system in finite time. *Control Theory & Applications*, 2019, 36(6): 885 – 892

## 1 引言

近年来, 多智能体系统的协同控制得到了广泛的应用[1], 如飞行器编队控制[2–3]、传感器网络中的目标位置估计[4]、同步控制及追踪问题[5–6]等等, 许多学者对其做了相关的研究, 其中分布式输出调节问题[7]逐渐成为此领域的热点问题. 输出调节[8]是指多智能体系统的每个个体的输出能够渐近地跟踪参考输入或者渐近地抑制干扰信号, 其中参考输入和瞬态干扰信号由外部系统输入, 在输出调节中, 外部系统可以看作是多智能体系统中的领导者. 输出调节的实质是设计一个分布式控制律, 使整个闭环系统达到渐近跟踪外界输入且趋于稳定的目的.

最先开始研究这类问题的是Xiang等人[9], 文中在系统模态固定不变的前提下, 解决了线性网络的同步输出调节问题, 不足之处是每个跟随者都要获取到外部信息, 才能设计其输出同步协议, 但实际情况是由于拓扑关系部分智能体是无法得到外部信息的. 为了解决文献[7]中的不足, Su等人[10]设计了一种分布式观测器, 解决了跟随者无法直接获取外部系统状态时的输出调节问题. Tang等人[11]研究了非线性系统的输

收稿日期: 2018−03−31; 录用日期: 2018−08−18.
†通讯作者. E-mail: 15709207142@163.com; Tel.: +86 15709207142.
本文责任编委: 方浩.
国家自然科学基金项目(61663020), 国家重点研发计划项目(2017YFB1201003-020)资助.
Supported by the National Natural Science Foundation of China (61663020) and the National Key R&D Program of China (2017YFB1201003020).

出调节问题, 设计了一种分布式控制器, 实现了当领导者含有未知输入的情况下跟随者仍能对领导的状态进行跟踪. Zhang等人[12]研究了奇异多智能体系统的协同输出调节问题, 利用前馈控制技术和降阶方法设计了分布式奇异输出反馈控制器. Lu等人[13]通过分布式前馈方法研究了异构线性多智能体系统的协同输出调节问题, 提出了新的分布式动态补偿器, 可以减轻通信负担并且便于控制器的实施.

以上文献解决的是输出调节问题, 都没有考虑系统跟踪外界输入的时间长短, 从而无法保障系统的输出能在一定时间渐近地跟踪外部信号并抑制干扰. 然而, 在实际系统中, 很多情况下都要求系统在有限时间内收敛并跟踪到外部信号, 尤其当存在外部干扰及不确定因素时, 收敛时间越短越好, 因此一些学者开始将有限时间控制应用到多智能体输出调节跟踪问题中. 文献[14–17]给出了通常线性、非线性系统的有限时间收敛的充分条件和通信拓扑条件. Du等人[18]讨论了一类具有领导—跟随者体系结构的二阶非线性多智能体系统的有限时间同步问题, 文中针对部分智能体无法获取其他智能体的速度信息的问题, 构造了有限时间观测器来估计速度信息, 但其缺点是有限收敛时间较长. Fu 等人[19]研究了一类通信图为有向图的高阶不确定非线性多智能体系统在有限时间内的协调跟踪问题, 提出了一种基于滑模控制技术的分布式有限时间协调跟踪控制器, 但滑膜控制器会对系统有抖振影响. 文献[20]研究了高阶多智能体系统在有限时间内的输出一致性问题, 为每个智能体构造了一个有限时间的广义状态观测器来估计系统中存在的未知扰动和不确定状态因素, 然而对于高阶快速的扰动, 若采用文中所设计的观测器, 追随者输出将达不到准确地跟踪领导者输出的效果, 且误差甚至会发散到无穷大.

以上对有限时间输出调节的研究, 大多局限于对内部系统某个参考量的估计, 未考虑部分智能体不能获取外部系统命令情况下对外部信号的估计这一问题, 另外现有的有限时间算法的设计集中在控制器上, 本文在部分智能体不能获取外部信息条件下, 提出了一种新的有限时间算法, 构造了一种有限时间分布式观测器, 通过观测器在有限时间内估计出外部系统的状态, 从而使整个系统中的每个跟随者也能在有限时间内快速跟踪到领导者, 解决有限时间内的协同输出调节问题. 这是本文研究的目的所在.

本文主要包括3个方面的贡献: 首先, 设计了一个分布式有限时间观测器和控制律; 其次, 证明了在异构多智能体系统中的有限时间分布式观测器的有效性; 最后, 证明了系统在有限时间内的输出调节稳定性问题.

本文其余组成部分如下: 第2节介绍了一些关于代数图论与有限时间稳定的相关理论; 第3节制定问题; 在第4节中设计了有限时间分布式观测器和输出反馈的输出调节控制协议; 第5节证明了算法的有效性和系统的稳定性; 最后1节进行实验仿真, 得出结论.

符号说明: $\mathbb{N}$表示正整数集合; $\mathbb{R}^{n\times n}$表示$n\times n$维实矩阵集合; $\operatorname{sgn} x=[\operatorname{sgn} x_1\ \cdots\ \operatorname{sgn} x_n]^{\mathrm{T}}$, $\operatorname{sgn}(\cdot)$是符号函数; $\operatorname{sig}(x)^\alpha=|x|^\alpha\operatorname{sgn} x$; $x^\alpha=[x_1^\alpha\ x_2^\alpha\ \cdots\ x_n^\alpha]$, $|x|^\alpha=[|x_1|^\alpha\ |x_2|^\alpha\ \cdots\ |x_n|^\alpha]$; $A^{\mathrm{T}}$表示矩阵$A$的转置.

## 2 预备知识

### 2.1 图论

考虑带有$N$个智能体的系统, 用一个三元组合$G=\{V,\varepsilon,A\}$来表示智能体之间的连接拓扑图, 其中$V=\{1,2,\cdots,N\}$表示$N$个智能体的顶点集合, 单个智能体可以理解为加权图$G=\{V,\varepsilon,A\}$的一个顶点. $\varepsilon=V\times V$表示图的边集, 即节点之间构成的边的集合. $A=(a_{ij})\in\mathbb{R}^{n\times n}$表示图$G$邻接矩阵, $i,j$表示相应的第$i,j$个智能体. 第$i$个智能体的邻居可以用$N_i=\{j\in V:(i,j)\in\varepsilon, i\neq j\}$表示. 假设在图中不存在自环(i,i), 即$(i,i)\notin\varepsilon$, 若$(i,j)\in\varepsilon$, 那么$a_{ij}>0$, 此时称点$j$为点$i$的邻居节点; 否则$a_{ij}=0$. 若$(i,j)\in\varepsilon$且$(j,i)\in\varepsilon$, 则称图$G$为无向图; 否则$(i,j)$为有向图.

本文考虑的通信拓扑图是由智能体和外部系统共同构成, 定义节点$i$的入度为$d_{\mathrm{in}}(v_n)=\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ij}$, 并且定义图$G$的入度矩阵为$D_{\mathrm{in}}=\operatorname{diag}\{d_{\mathrm{in}}(v_1),\cdots,d_{\mathrm{in}}(v_n)\}$, 拉普拉斯矩阵为

$$L=D_{\mathrm{in}}-A,$$

其中$L=[l_{ij}]\in\mathbb{R}^{(N+1)\times(N+1)}$, 可以表示如下:

$$l_{ij}=\begin{cases}-a_{ij}, & i\neq j,\\ \sum\limits_{i=1}^{n}a_{ij}, & i=j.\end{cases}\tag{1}$$

### 2.2 有限时间稳定性

有限时间稳定就意味着系统的状态能够在一段特定时间区间内收敛到平衡点, 并且保持不变. 首先给出下面有限时间稳定相关的引理、定理.

**引理 1**[14] 如果存在一个连续可微的函数$V(x):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$使得其满足下列条件:

1) $V(x)$是正定函数;

2) 存在实数$\rho>0$以及$0<\mu<1$, 使得$V(0)=0$; 并且当$x\in\mathbb{R}^n$时, $\dot V(x)+\rho(V(x))^\mu\leqslant 0$成立, 则称系统在有限时间内是稳定的, 且稳定时间满足

$$T\leqslant\frac{V(x_0)^{1-\mu}}{\rho(1-\mu)}.$$

**定义 1** 如果存在一个$T\in[0,M]$, $M$有界, 对于任意的$t\geqslant T$,每个智能体的最终状态都满足$x_i(t)=$

$x_0(t)$, 即$\lim\limits_{t\to T}\parallel x_i(t)-x_0(t)\parallel=0$, 那么该系统就能实现有限时间跟踪问题.

## 3　问题描述

本文考虑的分布式输出调节系统是由外部系统和多智能体系统共同构成, 智能体间仅仅通过无线网络进行局部协作就可以涌现全局行为.

第$i$个异构智能体的动力学方程为

$$\begin{cases}\dot{x}_i(t)=A_ix_i(t)+B_iu_i(t)+G_{\mathrm{w}i}w(t),\\ y_i(t)=C_ix_i(t)+D_iu_i(t)+E_{\mathrm{w}i}w(t),\end{cases}\tag{2}$$

其中: $x_i(t)\in\mathbb{R}^{n_i}$, $u_i(t)\in\mathbb{R}^{m_i}$和$y_i(t)\in\mathbb{R}^{p_i}$分别代表智能体$i$的状态向量、控制输入向量和输出向量; 矩阵$A_i\in\mathbb{R}^{n_i\times n_i}$, $B_i\in\mathbb{R}^{n_i\times m_i}$, $G_{\mathrm{w}i}\in\mathbb{R}^{n_i\times w}$, $C_i\in\mathbb{R}^{p_i\times n_i}$, $D_i\in\mathbb{R}^{p_i\times m_i}$, $E_{\mathrm{w}i}\in\mathbb{R}^{p_i\times w}$, $w(t)\in\mathbb{R}^{w}$为系统外界扰动. 被跟踪的外部系统参考信号$f(t)$和需要抑制的扰动信号$w(t)$的动态方程为

$$\dot{f}(t)=A_{\mathrm{f}}f(t),\ \dot{w}(t)=A_{\mathrm{w}}w(t),\tag{3}$$

其中: $f(t)\in\mathbb{R}^{p_i}$, $A_{\mathrm{f}}\in\mathbb{R}^{p_i\times p_i}$, $A_{\mathrm{w}}\in\mathbb{R}^{w\times w}$; 令外部系统的状态$\zeta$由参考信号$f(t)$和扰动信号$w(t)$组成, 则其外部系统可以写为

$$\dot{\zeta}(t)=\begin{bmatrix}\dot{f}(t)\\ \dot{w}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{\mathrm{f}} & 0\\ 0 & A_{\mathrm{w}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f(t)\\ w(t)\end{bmatrix}.\tag{4}$$

令$A_\zeta=\mathrm{diag}\{A_{\mathrm{f}},A_{\mathrm{w}}\}$, 定义被调输出$e_i(t)=y_i(t)-f(t)$, 则多智能体系统(2)可以表示成以下形式:

$$\begin{cases}\dot{x}_i(t)=A_ix_i(t)+B_iu_i(t)+G_i\zeta(t),\\ e_i(t)=C_ix_i(t)+D_iu_i(t)+E_i\zeta(t),\\ \dot{\zeta}(t)=A_\zeta\zeta(t),\end{cases}\tag{5}$$

其中: $G_i=[G_{\mathrm{w}i},0]$, $E_i=[E_{\mathrm{w}i},-I]$.

不失一般性, 在推导本文主要结论前, 对于该系统做出以下假设和定义[8]:

**假设 1**　只有一部分智能体能得到外部系统的信号, 另一部分不能直接获取外部系统的状态, 需要对外部系统的状态进行估计.

**假设 2**　矩阵$A_\zeta$的所有特征值的均无负实部.

**假设 3**　$(A_i,B_i)$是可控的.

**假设 4**　$(A_i,C_i)$是可观的.

**假设 5**　$(G_i,E_i)$是可观的.

**定义 2**　对于多智能体系统(2), 设计控制器和观测器满足:

**条件 1**　当$\zeta(t)=0$时,闭环系统(2)是渐近稳定;

**条件 2**　对于任意初始条件$x_i(0)$, $\varsigma(0)$, $\zeta(0)$, $i=1,2,\cdots,n$, 存在一个$T\in[0,\infty)$, 使得$e_i$满足以下关系$\lim\limits_{t\to T}e_i=0$, 其中$\varsigma(0)$表示观测器的初始状态.

## 4　分布式有限时间输出反馈控制协议的设计

文献[10]设计的动态观测器补偿控制协议如下:

$$\dot{\varsigma}_i(t)=A_\zeta\varsigma_i(t)+\tau(\sum_{j\in N_i}a_{ij}(\varsigma_j(t)-\varsigma_i(t))+a_{i0}(\zeta(t)-\varsigma_i(t)),\ i=1,2,\cdots,n.\tag{6}$$

式(6)解决了部分智能体无法获取外部系统信息的输出调节问题. 由式(6)可以看出, $\varsigma_j$取决于$\varsigma_i$, $\varsigma_i$实质上是对$\zeta$的估计, $\tau$为正整数.

为了使多智能体在一定时间里快速跟踪到领导者, 在式(6)基础上设计了分布式有限时间观测器和控制器, 如下所示:

$$u_i(t)=K_{1i}x_i(t)+K_{2i}\varsigma_i(t),\tag{7}$$

$$\dot{\varsigma}_i(t)=A_\zeta\varsigma_i(t)+\tau[\sum_{j\in N_i}a_{ij}\mathrm{sig}(\varsigma_j(t)-\varsigma_i(t))^\sigma+a_{i0}\mathrm{sig}(\zeta(t)-\varsigma_i(t))^\sigma+\beta\sum_{j\in N_i}a_{ij}(\varsigma_j(t)-\varsigma_i(t))+\beta a_{i0}(\zeta(t)-\varsigma_i(t))],\tag{8}$$

其中: $K_{1i}\in\mathbb{R}^{m_i\times n_i}$与$K_{2i}\in\mathbb{R}^{m_i\times q}$为待决定的增益矩阵; $i=1,\cdots,n$, $\tau>0$, $0<\sigma<1$, $a_{i0}$为智能体和领导者间的加权. 在控制器(7)作用下, 多智能体闭环系统(5)可以写为

$$\begin{cases}\dot{x}_i(t)=A_ix_i(t)+B_iK_{1i}x_i(t)+B_iK_{2i}\varsigma(t)+\\ \qquad G_i\zeta(t),\\ e_i(t)=C_ix_i(t)+D_iK_{1i}x_i(t)+D_iK_{2i}\varsigma(t)+\\ \qquad E_i\zeta(t),\\ \dot{\varsigma}_i(t)=A_\zeta\varsigma_i(t)+\tau[\sum_{j\in N_i}a_{ij}\mathrm{sig}(\varsigma_j(t)-\varsigma_i(t))^\sigma+\\ \qquad a_{i0}\mathrm{sig}(\zeta(t)-\varsigma_i(t))^\sigma+\beta\sum_{j\in N_i}(\varsigma_j(t)-\\ \qquad \varsigma_i(t))+\beta a_{i0}(\zeta(t)-\varsigma_i(t))],\\ \dot{\zeta}(t)=A_\zeta\zeta(t).\end{cases}\tag{9}$$

**引理 2**[14–15]　给定$y_1,y_2,\cdots,y_n\geqslant0$, $0<p<1$, $\sum\limits_{i=1}^n{y_i}^p\geqslant(\sum\limits_{i=1}^n y_i)^p$.

**引理 3**[13]　对于无向通讯拓扑结构图$G$, $L(A)=[l_{ij}]\in\mathbb{R}^{n\times n}$代表该无向图的Laplacian矩阵, 它有如下性质:

1) $x^{\mathrm{T}}L(A)x=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{i,j=1}^n a_{ij}(x_j-x_i)^2$.

2) 如果拓扑图$G$是连通的, 则$L(A)$是半正定的, 图的代数连通度等于

$$\min_{x\neq0^n,1_n^{\mathrm{T}}x=0}\frac{x^{\mathrm{T}}L(A)x}{x^{\mathrm{T}}x},$$

即当$1_n^{\mathrm{T}}x=0$时有$x^{\mathrm{T}}L(A)x \geqslant \lambda_2(L(A))x^{\mathrm{T}}x$, 并且$L(A)$的特征值满足: $0=\lambda_1(L)<\lambda_2(L)\leqslant\cdots\leqslant\lambda_N(L)$;

3) 若无向通信拓扑图连通, 对于向量$b_i\geqslant 0, \forall i\in I, \vec{b}\neq 0$, 那么矩阵$L(A)+\mathrm{diag}\{b_1,\cdots,b_n\}$是正定的.

**引理 4**[17] 对于无向通信拓扑图$G$, 假如存在那么一个函数$\psi:\mathbb{R}^2\rightarrow\mathbb{R}$, 当对$\forall i,j\in I$, 且$i\neq j$满足$\psi(x_i,x_j)=-\psi(x_j,x_i)$, 那么就有一组数列$y_1,y_2,\cdots,y_n$满足

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\in N_i}a_{ij}y_i\psi(x_j,x_i)= -\frac{1}{2}\sum_{(v_i,v_j)\in E}a_{ij}(y_j-y_i)\psi(x_j,x_i).$$

**定理 1** 如果存在一个连续可微的函数$V$, 对于任意的$t\geqslant T$, 给定常数$\rho>0$及$0<\lambda<1$, 若满足条件$T\leqslant\dfrac{V(0)^{1-\lambda}}{\rho(1-\lambda)}$, 则观测器(8)能够在有限时间内实现对外部信号$\zeta(t)$的跟踪, 且跟踪误差衰减至零, 同时整个系统中的每个跟随者也能在有限时间内快速跟踪到领导者, 解决有限时间内的协同输出调节问题.

**证** 令

$$\bar{\varsigma}_i(t)=\varsigma_i(t)-\zeta(t). \tag{10}$$

从式(8)(10)可以得到

$$\dot{\bar{\varsigma}}_i(t)=\tau(\sum_{j\in N_i}a_{ij}\mathrm{sig}(\bar{\varsigma}_j(t)-\bar{\varsigma}_i(t))^{\sigma}-a_{i0}\mathrm{sig}(\bar{\varsigma}_i)^{\sigma}+ \beta\sum_{j\in N_i}a_{ij}(\bar{\varsigma}_j(t)-\bar{\varsigma}_i(t))-\beta a_{i0}(\bar{\varsigma}_i(t))). \tag{11}$$

取李雅普诺夫函数$V(t)=\sum\limits_{i\in N_i}\bar{\varsigma}_i(t)^2$, 联合式(10)–(11)可以得到

$$\begin{aligned}
&\dot{V}(t)=2\sum_{i\in N_i}\bar{\varsigma}_i(t)\dot{\bar{\varsigma}}_i(t)=\\
&2\sum_{i\in N_i}\bar{\varsigma}_i(t)[\tau\sum_{j\in N_i}a_{ij}\mathrm{sig}(\bar{\varsigma}_j(t)-\bar{\varsigma}_i(t))^{\sigma}-\\
&\tau a_{i0}\mathrm{sig}(\bar{\varsigma}_i(t))^{\sigma}+\tau\beta\sum_{j\in N_i}a_{ij}(\bar{\varsigma}_j(t)-\\
&\bar{\varsigma}_i(t))-\tau\beta a_{i0}\bar{\varsigma}_i(t)]=\\
&\tau[2\sum_{i\in N_i}\bar{\varsigma}_i(t)\sum_{j\in N_i}a_{ij}\mathrm{sig}(\bar{\varsigma}_j(t)-\bar{\varsigma}_i(t))^{\sigma}-2\sum_{i\in N_i}\bar{\varsigma}_i(t)\cdot\\
&a_{i0}\mathrm{sig}(\bar{\varsigma}_i(t))^{\sigma}+2\beta\sum_{i\in N_i}\bar{\varsigma}_i(t)\sum_{j\in N_i}a_{ij}(\bar{\varsigma}_j(t)-\\
&\bar{\varsigma}_i(t))-2\beta\sum_{i\in N_i}\bar{\varsigma}_i(t)a_{i0}\bar{\varsigma}_i(t)].
\end{aligned}$$

由引理4可知

$$\begin{aligned}
&\dot{V}(t)=\\
&\tau[-\sum_{i\in N_i}\sum_{j\in N_i}(\bar{\varsigma}_j(t)-\bar{\varsigma}_i(t))a_{ij}\mathrm{sig}(\bar{\varsigma}_j(t)-\bar{\varsigma}_i(t))^{\sigma}-\\
&\beta\sum_{i\in N_i}\sum_{j\in N_i}a_{ij}(\bar{\varsigma}_j(t)-\bar{\varsigma}_i(t))^2-2\sum_{i\in N_i}\bar{\varsigma}_i(t)\times\\
&a_{i0}\mathrm{sig}(\bar{\varsigma}_i(t))^{\sigma}-2\beta\sum_{i\in N_i}\bar{\varsigma}_i(t)a_{i0}\bar{\varsigma}_i(t)]=\\
&\tau[-\sum_{i\in N_i}\sum_{j\in N_i}(\bar{\varsigma}_j(t)-\bar{\varsigma}_i(t))a_{ij}\mathrm{sig}(\bar{\varsigma}_j(t)-\bar{\varsigma}_i(t))^{\sigma}-\\
&\beta\sum_{i\in N_i}\sum_{j\in N_i}a_{ij}(\bar{\varsigma}_j(t)-\bar{\varsigma}_i(t))^2-\\
&2a_{i0}\sum_{i\in N_i}\bar{\varsigma}_i(t)(\mathrm{sig}(\bar{\varsigma}_i(t))^{\sigma}+\beta\bar{\varsigma}_i(t))]<\\
&\tau[-\sum_{i\in N_i}\sum_{j\in N_i}(\bar{\varsigma}_j(t)-\bar{\varsigma}_i(t))a_{ij}\mathrm{sig}(\bar{\varsigma}_j(t)-\bar{\varsigma}_i(t))^{\sigma}-\\
&\beta\sum_{i\in N_i}\sum_{j\in N_i}a_{ij}(\bar{\varsigma}_j(t)-\bar{\varsigma}_i(t))^2]=\\
&\tau[-\sum_{i\in N_i}\sum_{j\in N_i}a_{ij}|\bar{\varsigma}_j(t)-\bar{\varsigma}_i(t)|^{1+\sigma}-\\
&\beta\sum_{i\in N_i}\sum_{j\in N_i}a_{ij}(\bar{\varsigma}_j(t)-\bar{\varsigma}_i(t))^2]<\\
&-\tau\sum_{i\in N_i}\sum_{j\in N_i}a_{ij}|\bar{\varsigma}_j(t)-\bar{\varsigma}_i(t)|^{1+\sigma}=\\
&-\tau\sum_{i\in N_i}\sum_{j\in N_i}[a_{ij}{}^{\frac{2}{1+\sigma}}(\bar{\varsigma}_j(t)-\bar{\varsigma}_i(t))^2]^{\frac{1+\sigma}{2}}.
\end{aligned}$$

由引理2可知, 上式可以表示为

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t)=&-\tau\sum_{i\in N_i}\sum_{j\in N_i}[a_{ij}{}^{\frac{2}{1+\sigma}}(\bar{\varsigma}_j(t)-\bar{\varsigma}_i(t))^2]^{\frac{1+\sigma}{2}}\leqslant\\
&-\tau[\sum_{i\in N_i}(\sum_{j\in N_i}a_{ij}{}^{\frac{2}{1+\sigma}}(\bar{\varsigma}_j(t)-\bar{\varsigma}_i(t))^2)]^{\frac{1+\sigma}{2}}.
\end{aligned} \tag{12}$$

假设$M=L(A)+\mathrm{diag}\{a_{10},a_{20},\cdots,a_{n0}\}$, 并且由引理3中$L(A)$的特征值条件可以得到

$$\frac{\sum\limits_{i\in N_i}[\sum\limits_{j\in N_i}a_{ij}{}^{\frac{2}{1+\sigma}}(\bar{\varsigma}_j-\bar{\varsigma}_i)^2]}{V(t)}=\frac{2\bar{\varsigma}_i^{\mathrm{T}}M^{\mathrm{T}}M\bar{\varsigma}_i}{\bar{\varsigma}_i^{\mathrm{T}}M^{\mathrm{T}}\bar{\varsigma}_i}. \tag{13}$$

将式(13)代入式(12)中, 可以得到

$$\dot{V}(t)\leqslant-[2\lambda_2(L_M)]^{\frac{1+\sigma}{2}}V(t)^{\frac{1+\sigma}{2}}. \tag{14}$$

由前面的引理1可知所设计的观测器其时间满足以下条件:

$$T\leqslant\frac{2V(0)^{\frac{1-\sigma}{2}}}{(1-\sigma)[2\lambda_2(L_M)]^{\frac{1+\sigma}{2}}}. \tag{15}$$

因为$\tau>0, 0<\sigma<1$, 通过上述证明可以得到观测误差$\lim\limits_{t\rightarrow T}\bar{\varsigma}_i(t)=0$, 由此可知, 所设计的观测器(8)可以在有限时间内快速跟踪到外部系统信号. 证毕.

**定理 2** 如果系统(5)满足假设1–5,且也满足定理1中所涉及的有限时间条件, 在控制器$u_i$的作用下, 设计待测增益矩阵$K_{1i}$使得$A_i+B_iK_{1i}$为Hurwitz矩阵, 且$K_{2i}=U_i-K_{1i}X_i$, 当且仅当满足矩阵方程

$$\begin{cases}A_iX_i+B_iU_i+G_i=X_iA_{\zeta},\\ C_iX_i+D_iU_i+E_i=0\end{cases} \tag{16}$$

有唯一解时, 多智能体系统(5)能够解决有限时间内的协同输出调节稳定问题.

**证**　定义

$$\begin{aligned}&x(t)=[x_1^{\rm T}\ \ \cdots\ \ x_n^{\rm T}]^{\rm T},\ e(t)=[e_1^{\rm T}\ \ \cdots\ \ e_n^{\rm T}]^{\rm T},\\&A=\mathrm{diag}\{A_1,\cdots,A_n\},\ B=\mathrm{diag}\{B_1,\cdots,B_n\},\\&C=\mathrm{diag}\{C_1,\cdots,C_n\},\ D=\mathrm{diag}\{D_1,\cdots,D_n\},\\&E=\mathrm{diag}\{E_1,\cdots,E_n\},\ G=\mathrm{diag}\{G_1,\cdots,G_n\},\\&K_1=\mathrm{diag}\{K_{11},\cdots,K_{1n}\},\\&K_2=\mathrm{diag}\{K_{21},\cdots,K_{2n}\},\end{aligned}$$

则系统(9)可以写为

$$\begin{aligned}&\dot x(t)=(A+BK_1)x(t)+BK_2\varsigma+G\zeta,\\&e(t)=(C+DK_1)x(t)+BK_2\varsigma+E\zeta,\\&\dot\zeta(t)=A_\zeta\zeta(t).\end{aligned}$$

由定理1的证明可知$\lim\limits_{t\to T}\bar\varsigma_i(t)=0$, 当$\zeta=0$, $\lim\limits_{t\to T}\varsigma_i(t)=0$, 则闭环系统(9)可以表示为

$$\dot x_{\rm o}(t)=(A+BK_1)x_{\rm o}(t).$$

令$A_{\rm o}=A+BK_1$, 则

$$\dot x_{\rm o}(t)=A_{\rm o}x_{\rm o}(t).\tag{17}$$

由于$A+BK_1$为Hurwitz矩阵, 则$A_{\rm o}$也为Hurwitz矩阵, 所以$\lim\limits_{t\to T}x_{\rm o}(t)=0$, 即$\lim\limits_{t\to T}x(t)=0$, 通过上述证明, 可以得出定义2的第1个条件.

定义$\bar x_i(t)=x_i(t)-X_i\zeta$, $\bar\varsigma_i(t)=\varsigma_i(t)-\zeta(t)$, $U_i(t)=K_{1i}X_i+K_{2i}$, 根据前面定理2可知$X_i$为Sylvester方程的解, 且解是唯一的. 对$\bar x_i(t)$求导, 可以得到

$$\begin{aligned}&\dot{\bar x}_i(t)=\\&A_ix_i(t)+B_iu_i+G_i\zeta(t)-X_iA_\zeta\zeta(t)=\\&A_i(\bar x_i(t)+X_i\zeta(t))+B_iK_{1i}(\bar x_i(t)+X_i\zeta(t))+\\&B_iK_{2i}(\bar\varsigma_i(t)+\zeta(t))+G_i\zeta(t)-X_iA_\zeta\zeta(t)=\\&A_i\bar x_i(t)+A_iX_i\zeta(t)+B_iK_{1i}\bar x_i(t)+B_iK_{1i}X_i\zeta(t)+\\&B_iK_{2i}\bar\varsigma_i(t)+B_iK_{2i}\zeta(t)+G_i\zeta(t)-X_iA_\zeta\zeta(t)=\\&(A_i+B_iK_{1i})\bar x_i(t)+B_iK_{2i}\bar\varsigma_i(t).\end{aligned}\tag{18}$$

因为$\lim\limits_{t\to T}\bar\varsigma_i(t)=0$, 令$A_k=A_i+B_iK_{1i}$, 式(17)的稳定性就等价于$\dot{\bar x}_k(t)=A_k\bar x_k(t)$, $A_k$与$A_{\rm o}$一样都为Hurwitz矩阵, 于是$\lim\limits_{t\to T}\bar x_k(t)=0$, 即$\lim\limits_{t\to T}\bar x_i(t)=0$.

多智能体系统的调节输出形式为

$$\begin{aligned}&e_i(t)=\\&C_ix_i(t)+D_iu_i(t)+E_i\zeta(t)=\\&C_i(\bar x_i(t)+X_i\zeta(t))+D_iK_{1i}(\bar x_i(t)+X_i\zeta(t))+\\&D_iK_{2i}(\bar\varsigma_i(t)+\zeta(t))+E_i\zeta(t)=\\&(C_i+D_iK_{1i})\bar x_i(t)+D_iK_{2i}\bar\varsigma_i(t)+\\&(C_iX_i+D_iK_{1i}X_i+D_iK_{2i}+E_i)\zeta(t).\end{aligned}\tag{19}$$

由于$\lim\limits_{t\to T}\bar\varsigma_i(t)=0$, $\lim\limits_{t\to T}\bar x_i(t)=0$, 则上式可以表示为

$$\lim_{t\to T}e_i(t)=(C_iX_i+D_iU_i+E_i)\zeta(t).\tag{20}$$

如果式子$C_iX_i+D_iU_i+E_i=0$条件满足, 就可以得到$\lim\limits_{t\to T}e_i(t)=0$; 如果$\lim\limits_{t\to T}e_i(t)=0$成立, 由假设2可知$\lim\limits_{t\to T}\zeta_i(t)\neq0$, 因此$C_iX_i+D_iU_i+E_i=0$成立, 则定义2的第2个条件成立. 综合以上证明, 可以说明所设计分布式协议和有限时间控制算法可以解决多智能体系统的有限时间输出调节问题.

## 5　仿真算例

本文在MATLAB软件中对所提算法进行了仿真, 考虑的多智能体系统由4个智能体和1个外部系统组成,多智能体的动态方程如下:

$$\begin{aligned}&\dot x_{1i}=x_{2i}-0.5i\times\zeta_1,\\&\dot x_{2i}=a_ix_{3i}-\zeta_1+0.5i\times\zeta_2,\\&\dot x_{3i}=-c_ix_{2i}-d_ix_{3i}+b_iu_i,\\&e_{1i}=x_{1i}-\zeta_1,\\&e_{2i}=x_{2i}-0.5i\times\zeta_1-\zeta_2,\end{aligned}$$

其中$i=1,2,3,4$, 外部系统为

$$\dot\zeta_1=\zeta_2,\ \dot\zeta_2=-\zeta_1.$$

智能体间的信息交流用通讯拓扑图表示, 其中0表示外部系统, 如图1所示.

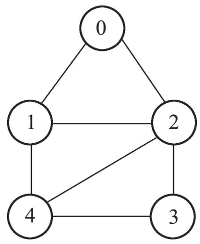


图 1　智能体的通信拓扑图

Fig. 1　The communication topology of agents

取状态变量$x^{\rm T}=(x_{1i},x_{2i},x_{3i})$, 控制输入为$u_i$, 则上述系统用如式(2)的状态空间描述为

$$A_i=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&a_i\\0&-c_i&-d_i\end{bmatrix},\ B_i=\begin{bmatrix}0\\0\\b_i\end{bmatrix},$$

$$C_i=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix},\ D_i=0,\ G_i=\begin{bmatrix}-0.5i&0\\-1&0.5i\\0&0\end{bmatrix},$$

$$E_i=\begin{bmatrix}-1&0\\-0.5i&-1\end{bmatrix},\ A_\nu=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix},$$

其中$i=1,2,3,4$.

显然, 假设1–5都成立. 对矩阵方程(16)进行求解,

可以得到满足的解为

$$U_i=[\frac{0.5ic_i}{b_i}\ \ \frac{c_i}{b_i}],\ X_i=\begin{bmatrix}1&0\\0.5i&1\\0&0\end{bmatrix}.$$

由于控制器增益$K_{1i}$满足$A_i+B_iK_{1i}$为Hurwitz矩阵, 可以取

$$K_{1i}=[-2\ \ -2\ \ -2],$$

$$K_{2i}=U_i-K_{1i}=[\frac{0.5ic_i}{b_i}\ \ \frac{c_i}{b_i}+2].$$

选取参数$\tau=1, \sigma=0.3, \beta=3$, 给定参数

$$[a_1,b_1,c_1,d_1]=[1,1,0,1],$$

$$[a_2,b_2,c_2,d_2]=[1,2,0,10],$$

$$[a_3,b_3,c_3,d_3]=[1,1,10,2],$$

$$[a_4,b_4,c_4,d_4]=[1,1,1,2].$$

分别绘出在观测器(6)和(8)作用下的图形.

通过对比图2–5，可知系统在观测器(8)的作用下，所有智能体的相对位置误差能够在有限时间内快速收敛至0, 超调量大大减小.

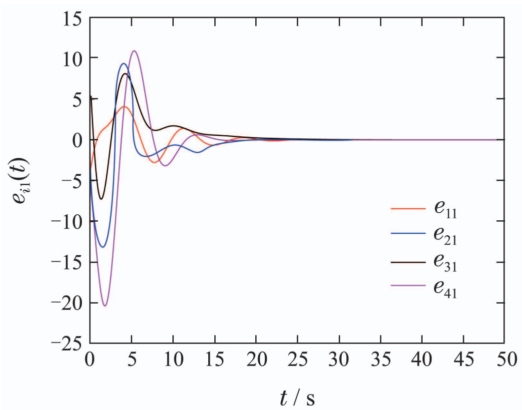


图 2 观测器式(6)下的调节输出$e_{i1}(t)$

Fig. 2 The regulation output $e_{i1}(t)$ with the observer in (6)

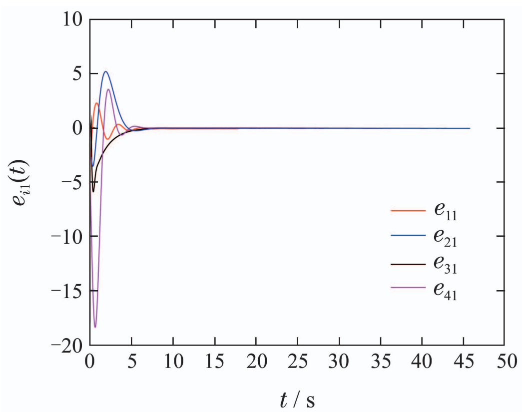


图 3 有限时间观测器式(8)下的调节输出$e_{i1}(t)$

Fig. 3 The regulation output $e_{i1}(t)$ with the finite-time observer in (8)

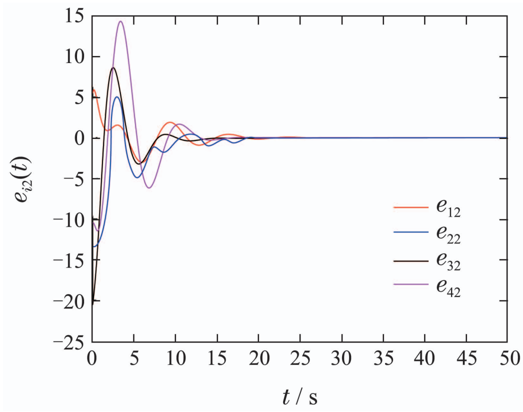


图 4 观测器式(6)下智能体的调节输出$e_{i2}(t)$

Fig. 4 The regulation output $e_{i2}(t)$ with the observer in (6)

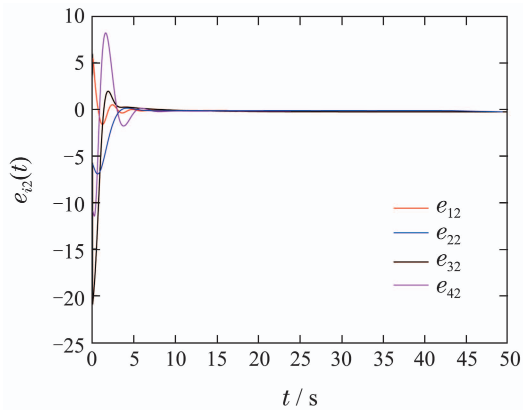


图 5 有限时间观测器式(8)下的调节输出$e_{i2}(t)$

Fig. 5 The regulation output $e_{i2}(t)$ with the finite-time observer in (8)

由图6可知, 观测器式(6)下的分量$\varsigma_{i1}$大约在3 s跟踪到外部系统, 分量$\varsigma_{i2}$大约4.2 s跟踪到外部系统; 由图7可知, 观测器(8)式的分量$\varsigma_{i1}$大约0.2 s快速跟踪到外部系统, 分量$\varsigma_{i2}$大约0.9 s就跟踪到外部系统, 很好的解决了当部分智能体无法获得外部系统信号时的快速跟踪问题; 同样, 由图8–11可知所有智能体的状态在有限时间内快速与领导者即外部系统的状态一致.

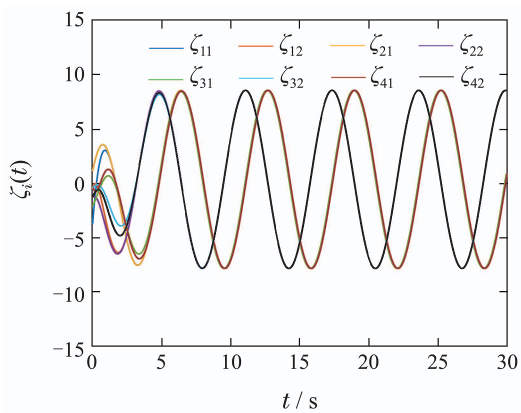


图 6 观测器式(6)的$\varsigma_i(t)$

Fig. 6 The observer $\varsigma_i(t)$ in (6)

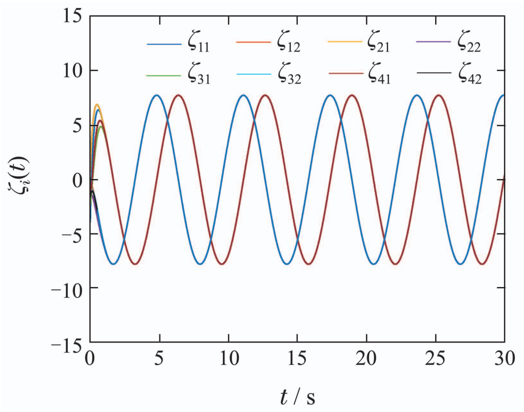


图 7　有限时间观测器式(8)的$\varsigma_i(t)$

Fig. 7　The observer $\varsigma_i(t)$ with the finite-time in (8)

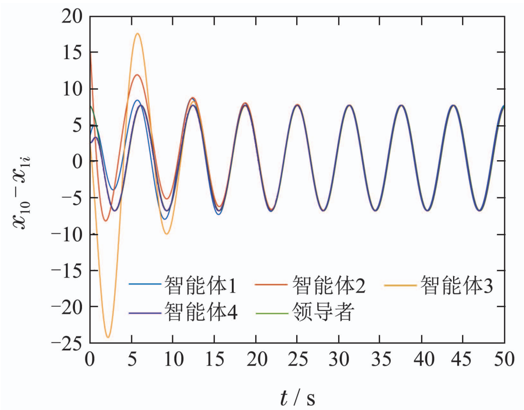


图 8　观测器式(6)下$x_{10}-x_{1i}$位置图

Fig. 8　The position of $x_{10}-x_{1i}$ with the observer in (6)

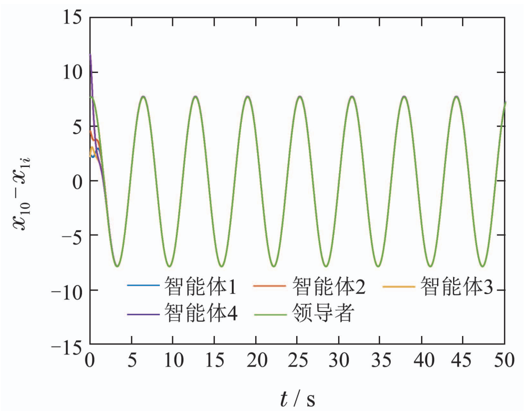


图 9　有限时间观测器式(8)下$x_{10}-x_{1i}$多智能体位置图

Fig. 9　The position of $x_{10}-x_{1i}$ with the finite-time observer in (8)

## 6　结论

本文针对部分智能体无法获取外部系统信号且需在有限时间内收敛这2个问题, 提出了有限时间分布式观测器控制算法, 并利用图论、李雅普诺夫定理等证明了在该控制算法下系统在有限时间内的稳定性. 该算法最大的特点是利用设计的观测器在有限时间内估计出外部系统的状态, 从而使整个系统的跟随者能够快速跟踪到领导者且保障系统在有限时间内收敛. 最后通过仿真验证了理论分析的正确性.

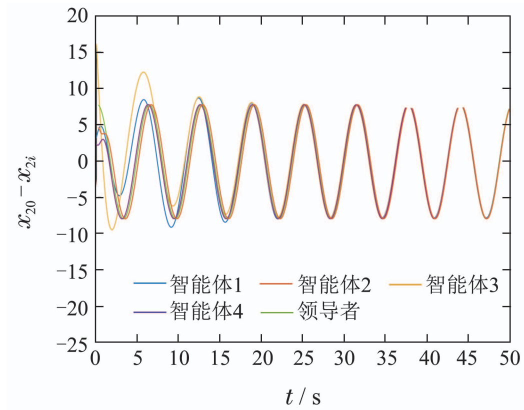


图 10　观测器(6)下$x_{20}-x_{2i}$多智能体位置图

Fig. 10　The position of $x_{20}-x_{2i}$ with the observer in (6)

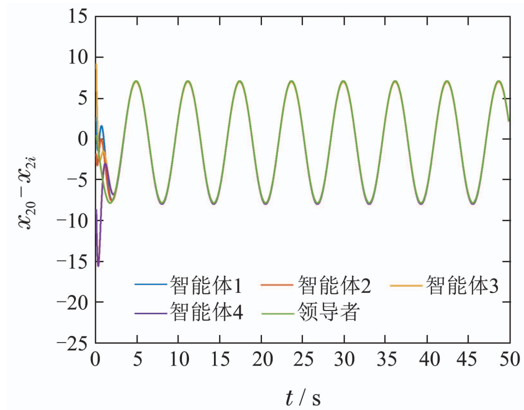


图 11　有限时间观测器式(8)下$x_{20}-x_{2i}$多智能体位置图

Fig. 11　The position of $x_{20}-x_{2i}$ with the finite-time observer in (8)

## 参考文献:

[1] YUAN C Z, HE H B. Cooperative output regulation of heterogeneous multi-agent systems with a leader of bounded inputs. *IET Control Theory & Applications*, 2018, 12(2): 233 – 242.

[2] DONG X W, REN Z, ZHONG Y S, et al. Time-varying formation tracking for second-order multi-agent systems subjected to switching topologies with application to quadrotor formation flying. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2017, 64(6): 5014 – 5024.

[3] DONG X W, REN Z, ZHONG Y S, et al. Theory and experiment on formation-containment control of multiple multirotor unmanned aerial vehicle systems. *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, 2018, DOI: 10.1109/TASE.2018.2792327.

[4] XIAY Q, NA X T, SUN Z Q. Formation control and collision avoidance for multi-agent systems based on position estimation. *ISA Transactions*, 2016, 61: 287 – 296.

[5] HONG Yiguang, ZHAI Chao. Dynamic coordination and distributed control design of multi-agent systems. *Control Theory & Applications*, 2011, 28(10): 1506 – 1512.
(洪奕光, 翟超. 多智能体系统动态协调与分布式控制设计. 控制理论与应用, 2011, 28(10): 1506 – 1512.)

[6] CAO Y, REN W. Distributrd coordinated tracking with reduced interaction via a variable structure approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, 57(1): 33 – 48.

[7] ZHANG H, YANG R, YAN H, et al. $H_\infty$ consensus of event-based multi-agent systems with switching topology. *Information Sciences*, 2016, 370/371: 623 – 635.

[8] HUANG J. *Nonlinear Output Regulation: Theory and Applications*. Philadelphia, America: SIAM, 2004: 6 – 8.

[9] XIANG J, WEI W, LI Y J. Synchronized output regulation of linear networked systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, 54(6): 1336 – 1341.

[10] SU Y F, HUANG J. Cooperative output regulation of linear multi-agent systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, 57(4): 1062 – 1066.

[11] TANG Y T, HONG Y G, WANG X H. Distributed output regulation for a class of nonlinear multi-agent systems with unknown - input leaders. *Automatica*, 2015, 62: 154 – 160.

[12] MA Q, XU S Y, ZHANG B Y, et al. Cooperative output regulation of singular heterogeneous multi-agent systems. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2016, 46(6): 1471 – 1475.

[13] LU M B, LIU L. Cooperative output regulation of linear multi-agent systems by a novel distributed dynamic compensator. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, 62(12): 6481 – 6488.

[14] BHAT S P, BERNSTEIN D S. Finite-time stability of continuous autonomous systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2000, 38(3): 751 – 766.

[15] REN W, BEARD R W. Consensus seeking in multi-agent systems under dynamically changing interaction topologies. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, 50(5): 655 – 661.

[16] WANG L, XIAO F. Finite-time consensus problems for networks of dynamic agents. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, 55(4): 950 – 955.

[17] ZHENG Y S, CHEN W S, WANG L. Finite-time consensus for stochastic multi-agent systems. *International Journal of Control*, 2011, 84(10): 1644 – 1652.

[18] DU H B, HE L G, CHENG Y Y. Finite-time synchronization of a class of second-order nonlinear multi-agent systems using output feedback control. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 2014, 61(6): 1778 – 1788.

[19] Fu J J, WANG J Z. Finite-time coordinated tracking for high-order uncertain nonlinear multi-agent systems with directed communication graphs. *Control Conference*. Nanjing, China: IEEE, 2014: 1081 – 1086.

[20] ZHANG J L, PANDEY A, GU G X. Output consensus for heterogeneous multi-agent systems over feedback graphs involving time delays. *IEEE International Conference on Information and Automation*. Lijiang, China: IEEE, 2015: 1014 – 1019.

## 作者简介:

**魏文军** 教授, 目前研究方向为多智能体系统、智能控制, E-mail: weiwenjun@mail.lzjtu.cn;

**马羊琴** 硕士研究生, 研究方向为多智能体系统一致性、协同输出调节、智能方式机器人, E-mail: 15709207142@163.com;

**李宗刚** 教授, 博士生导师, 目前研究方向为多智能体系统合作控制、智能仿生机器人, E-mail: 529337035@qq.com.