最优控制的计算原理: 评论最小值原理

吴受章†
(西安交通大学, 陕西 西安 710049)

摘要: 提出连续最优控制计算原理和离散最优控制计算原理, 两者都可用于最优控制的数值优化. Pontryagin最小值原理和离散最小值原理, 由于其含有的信息不完整, 形式特殊, 所以都不能用于最优控制的数值优化. 此外Pontryagin最小值原理和离散最小值原理分别为连续最优控制计算原理和离散最优控制计算原理的特殊情况.

关键词: 最优控制; 计算原理; 数值优化; 最小值原理; 凸性

引用格式: 吴受章. 最优控制的计算原理: 评论最小值原理. 控制理论与应用, 2019, 36(8): 1189 – 1196

DOI: 10.7641/CTA.2018.80254

The computational principle of optimal control: comments on minimum principle

WU Shou-zhang†
(Xi'an Jiaotong University, Xi'an Shaanxi 710049, China)

Abstract: The computational principles of continuous optimal control and discrete optimal control are proposed. Both of them can be used for numerical optimization of optimal control. Pontryagin's minimum principle and discrete minimum principle can not be used for numerical optimization of optimal control because of their incomplete information and special form. Furthermore Pontryagin's minimum principle and discrete minimum principle are the special cases of continuous computational principle and discrete computational principle of optimal control respectively.

Key words: optimal control; computational principle; numerical optimization; minimum principle; convexsity

Citation: WU Shouzhang. The computational principle of optimal control: comments on minimum principle. *Control Theory & Applications*, 2019, 36(8): 1189 – 1196

1 引言

20世纪50年代, 由于航空航天发展的需要, 最优控制获得了很大发展. 近年来, 又应航空航天与化学工业发展之需, 特别是飞行器制导和变轨, 导弹拦截和规避拦截等等的需要, 用数值优化研究最优控制又获得了新的发展. 以前, 数学规划用于最优控制时, 畏惧变量太多, 又不能应对稀疏矩阵; 但是, 现在, 数学规划用于最优控制时, 并不惧怕变量多, 又能妥善处理稀疏矩阵, 并且, 人们特别喜欢它能满足由各种等式和不等式约束所形成的可行域的要求. 所以, 最优控制至今仍然受到人们的重视.

连续最优控制问题为泛函求极值

$$\begin{cases} \min\limits_{u(t)} \ J = \int_0^{t_\mathrm{f}} \varPhi(x(t), u(t))\mathrm{d}t, \\ \text{s.t. } \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \ x(0) = x_0, \\ \quad\ g(x(t), u(t)) \leqslant 0, \end{cases} \tag{1}$$

式中: $\varPhi \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $g \in \mathbb{R}^q$, t_f固定. 定义Hamilton函数$H(x, u, \lambda) = \varPhi(x, u) + \lambda^\mathrm{T} f(x, u)$, 协态向量$\lambda \in \mathbb{R}^n$.

Pontryagin最小值原理是最优控制的基石之一, 它以优美的数学, 使得多少年来始终有人赞美, 有人陶醉, 并且它只给后人留下供奉和膜拜的余地.

Pontryagin最小值原理应该有3种应用形式:

1) $u \in \mathbb{R}^m$又没有约束函数$g(x(t), u(t)) \leqslant 0$, 最小值原理用于式(2), 即可求得式(1)的最优解$x^*(t)$,

收稿日期: 2018−04−11; 录用日期: 2018−12−27.

†通信作者. E-mail: wsz_1@xjtu.edu.cn.

本文责任编委: 邹云.
国家自然科学基金项目(61473218)资助.
Supported by the National Natural Science Foundation of China (61473218).

$u^*(t), \lambda^*(t)$.

$$\begin{cases} \min\limits_{u(t)} H(x^*(t), u(t), \lambda^*(t)), \\ \quad\quad \text{i.e.}\ \dfrac{\partial H}{\partial u} = 0,\ u \in \mathbb{R}^m,\ t \in [0, t_{\mathrm{f}}], \\ \text{s.t.}\ \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)),\ x(0) = x_0, \\ \quad \dfrac{\partial H}{\partial x} = -\dot{\lambda}, \end{cases} \tag{2}$$

式中: $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $\lambda \in \mathbb{R}^n$. 式(2)是附属于式(1)的优化问题, 式(2)的目标函数不同于式(1)所示泛函求极值的目标函数, 应从式(1)才能计算出最优目标函数值, 理应如此[1–6].

2) $u \in \varOmega \subset \mathbb{R}$, 又没有约束函数$g(x(t), u(t)) \leqslant 0$, 在相平面上(或相空间中), Pontryagin最小值原理用于式(3)(高维系统需预先降阶), 即可求得式(1)的最优解$x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t)$.

$$\begin{cases} \min\limits_{u(t)} H(x^*(t), u(t), \lambda^*(t)), \\ \quad\quad \text{i.e.}\ u \in \varOmega \subset \mathbb{R},\ \dfrac{\partial H}{\partial u} \neq 0,\ t \in [0, t_{\mathrm{f}}], \\ \text{s.t.}\ \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)),\ x(0) = x_0, \\ \quad \dfrac{\partial H}{\partial x} = -\dot{\lambda}, \\ \quad a \leqslant u \leqslant b, \end{cases} \tag{3}$$

式中: $x \in \mathbb{R}$, $u \in \varOmega \subset \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$. 式(3)也是附属于式(1)的优化问题.

3) 无论有无约束函数$g(x(t), u(t)) \leqslant 0$, 数值优化[7]用于Pontryagin最小值原理式(4), 不能获得式(1)真正的最优解(真解)$x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t)$. 并无文献记载.

$$\begin{cases} \min\limits_{u(t)} H(x(t), u(t), \lambda(t)),\ t \in [0, t_{\mathrm{f}}], \\ \text{s.t.}\ \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)),\ x(0) = x_0, \\ \quad\quad g(x(t), u(t)) \leqslant 0, \end{cases} \tag{4}$$

式中: $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $\lambda \in \mathbb{R}^n$, $g \in \mathbb{R}^q$, t_{f}固定. 式(4) 仍然是附属于式(1)的优化问题.

Pontryagin最小值原理作为一种计算原理, 为什么不能用于数值优化?

本文首先证明连续最优控制计算原理, 阐述: Pontryagin 最小值原理不能用于数值优化的原因, 并且Pontryagin最小值原理是连续最优控制计算原理的特殊情况. 然后证明离散最优控制计算原理, 阐述: 离散最小值原理不能用于数值优化的原因, 并且离散最小值原理是离散最优控制计算原理的特殊情况. 最后示例.

2 连续最优控制的计算原理

2.1 命题(连续最优控制的计算原理)

连续最优控制问题为泛函求极值

$$\begin{cases} \min\limits_{u(t)} J = \displaystyle\int_0^{t_{\mathrm{f}}} \varPhi(x(t), u(t))\mathrm{d}t, \\ \text{s.t.}\ \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)),\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{5}$$

式中: $\varPhi \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, t_{f}固定. 定义Hamilton函数$H(x, u, \lambda) = \varPhi(x, u) + \lambda^{\mathrm{T}} f(x, u)$, 协态向量$\lambda \in \mathbb{R}^n$. 则有连续最优控制计算原理

$$\min_{u(t)} \{H(x(t), u(t), \lambda(t)) - \lambda^{\mathrm{T}}(t)\dot{x}(t)\}, \tag{6a}$$

即

$$\min_{u(t)} \{H(x(t), u(t), \lambda(t)) + x^{\mathrm{T}}(t)\dot{\lambda}(t)\}, \tag{6b}$$

即

$$\min_{u(t)} \varPhi(x(t), u(t)). \tag{6c}$$

证 状态向量$x(t)$、控制向量$u(t)$、协态向量$\lambda(t)$, 各以稳定的Padè型逼近[8–10]表示:

$$\begin{cases} x_1(t) = a_{10} + a_{11}t + a_{12}t^2 + \cdots + a_{1p}t^p, \\ x_2(t) = a_{20} + a_{21}t + a_{22}t^2 + \cdots + a_{2p}t^p, \\ \quad\quad \vdots \\ x_n(t) = a_{n0} + a_{n1}t + a_{n2}t^2 + \cdots + a_{np}t^p, \end{cases} \tag{7}$$

式中参数a_{ij}, $i = 1, 2, \cdots, n$; $j = 0, 1, 2, \cdots, p$.

$$\begin{cases} u_1(t) = b_{10} + b_{11}t + b_{12}t^2 + \cdots + b_{1p}t^p, \\ u_2(t) = b_{20} + b_{21}t + b_{22}t^2 + \cdots + b_{2p}t^p, \\ \quad\quad \vdots \\ u_m(t) = b_{m0} + b_{m1}t + b_{m2}t^2 + \cdots + b_{mp}t^p, \end{cases} \tag{8}$$

式中参数b_{rj}, $r = 1, 2, \cdots, m$; $j = 0, 1, 2, \cdots, p$.

$$\begin{cases} \lambda_1(t) = c_{10} + c_{11}t + c_{12}t^2 + \cdots + c_{1p}t^p, \\ \lambda_2(t) = c_{20} + c_{21}t + c_{22}t^2 + \cdots + c_{2p}t^p, \\ \quad\quad \vdots \\ \lambda_n(t) = c_{n0} + c_{n1}t + c_{n2}t^2 + \cdots + c_{np}t^p, \end{cases} \tag{9}$$

式中参数c_{ij}, $i = 1, 2, \cdots, n$; $j = 0, 1, 2, \cdots, p$.

只要稳定的Padè型逼近的阶数$p \geqslant 2$, 都可达到很好的逼近效果[9–10]. 本文使用稳定的Padè型逼近, 仅为过渡的手段, 随后仍将返回原来的$x(t), u(t), \lambda(t)$形式, 所以并不关心阶数p的高低.

得$x(t), u(t), \lambda(t)$的稳定的Padè型逼近, 并用下划线表示参数化:

$$x(t) = \underline{x}(a_{ij}, t),\ \dot{x}(t) = \underline{\dot{x}}(a_{ij}, t), \tag{10}$$

$$u(t) = \underline{u}(b_{rj}, t), \tag{11}$$

$$\lambda(t) = \underline{\lambda}(c_{ij}, t),\ \dot{\lambda}(t) = \underline{\dot{\lambda}}(c_{ij}, t). \tag{12}$$

式(5)化为无约束优化问题, 即

$$\min_{u(t)} J = \int_0^{t_{\mathrm{f}}} \{\varPhi(x(t), u(t)) + \lambda^{\mathrm{T}}(f(x(t), u(t)) - \dot{x}(t))\}\mathrm{d}t. \tag{13}$$

将式(10)–(12)代入式(13), 并且$t\in[0,t_{\rm f}]$分为n段, $n\to\infty$, 即令$t=0,1,2,3,\cdots,\infty$单位时间, 步长$\delta t\to 0$, 得无约束优化问题的参数化表示式:

$$\min_{a_{ij},b_{rj},c_{ij}} J_p =$$
$$\int_0^{t_{\rm f}}\{\varPhi(\underline{x}(a_{ij},t),\underline{u}(b_{rj},t))+$$
$$\underline{\lambda}^{\rm T}(c_{ij},t)(f(\underline{x}(a_{ij},t),\underline{u}(b_{rj},t))-\dot{\underline{x}}(a_{ij},t))\}{\rm d}t=$$
$$\int_0^{\delta t}\{\varPhi(\underline{x}(a_{ij},0),\underline{u}(b_{rj},0))+$$
$$\underline{\lambda}^{\rm T}(c_{ij},0)(f(\underline{x}(a_{ij},0),\underline{u}(b_{rj},0))-\dot{\underline{x}}(a_{ij},0))\}{\rm d}t+$$
$$\int_{\delta t}^{2\delta t}\{\varPhi(\underline{x}(a_{ij},1),\underline{u}(b_{rj},1))+$$
$$\underline{\lambda}^{\rm T}(c_{ij},1)(f(\underline{x}(a_{ij},1),\underline{u}(b_{rj},1))-$$
$$\dot{\underline{x}}(a_{ij},1))\}{\rm d}t+\cdots+$$
$$\int_{(n-1)\delta t}^{n\delta t}\{\varPhi(\underline{x}(a_{ij},n-1),\underline{u}(b_{rj},n-1))+$$
$$\underline{\lambda}^{\rm T}(c_{ij},n-1)(f(\underline{x}(a_{ij},n-1),\underline{u}(b_{rj},n-1))-$$
$$\dot{\underline{x}}(a_{ij},n-1))\}{\rm d}t+\cdots=$$
$$\{\{\varPhi(\underline{x}(a_{ij},0),\underline{u}(b_{rj},0))+$$
$$\underline{\lambda}^{\rm T}(c_{ij},0)(f(\underline{x}(a_{ij},0),\underline{u}(b_{rj},0))-\dot{\underline{x}}(a_{ij},0))\}+$$
$$\{\varPhi(\underline{x}(a_{ij},1),\underline{u}(b_{rj},1))+$$
$$\underline{\lambda}^{\rm T}(c_{ij},1)(f(\underline{x}(a_{ij},1),\underline{u}(b_{rj},1))-$$
$$\dot{\underline{x}}(a_{ij},1))\}+\cdots+$$
$$\{\varPhi(\underline{x}(a_{ij},n-1),\underline{u}(b_{rj},n-1))+$$
$$\underline{\lambda}^{\rm T}(c_{ij},n-1)(f(\underline{x}(a_{ij},n-1),\underline{u}(b_{rj},n-1))-$$
$$\dot{\underline{x}}(a_{ij},n-1))\}+\cdots\}\int_0^{\delta t}{\rm d}t.$$

常量乘目标函数, 不影响决策, 故有

$$\min_{a_{ij},b_{rj},c_{ij}}\{\{\varPhi(\underline{x}(a_{ij},0),\underline{u}(b_{rj},0))+$$
$$\underline{\lambda}^{\rm T}(c_{ij},0)(f(\underline{x}(a_{ij},0),\underline{u}(b_{rj},0))-\dot{\underline{x}}(a_{ij},0))\}+$$
$$\{\varPhi(\underline{x}(a_{ij},1),\underline{u}(b_{rj},1))+$$
$$\underline{\lambda}^{\rm T}(c_{ij},1)(f(\underline{x}(a_{ij},1),\underline{u}(b_{rj},1))-$$
$$\dot{\underline{x}}(a_{ij},1))\}+\cdots+$$
$$\{\varPhi(\underline{x}(a_{ij},n-1),\underline{u}(b_{rj},n-1))+$$
$$\underline{\lambda}^{\rm T}(c_{ij},n-1)(f(\underline{x}(a_{ij},n-1),\underline{u}(b_{rj},n-1))-$$
$$\dot{\underline{x}}(a_{ij},n-1))\}+\cdots\}=$$
$$\{\varPhi(\underline{x}(a_{ij},t),\underline{u}(b_{rj},t))+$$
$$\underline{\lambda}^{\rm T}(c_{ij},t)(f(\underline{x}(a_{ij},t),\underline{u}(b_{rj},t))-\dot{\underline{x}}(a_{ij},t))\},\tag{14}$$

即

$$\min_{a_{ij},b_{rj},c_{ij}}\{H(\underline{x}(a_{ij},t),\underline{u}(b_{rj},t),\underline{\lambda}(c_{ij},t))-$$
$$\underline{\lambda}^{\rm T}(c_{ij},t)\dot{\underline{x}}(a_{ij},t)\}.\tag{15}$$

当$t\in[0,t_{\rm f}]$, 去参数化, 得

$$\min_{u(t)}\{H(x(t),u(t),\lambda(t))-\lambda^{\rm T}(t)\dot{x}(t)\},\tag{6a}$$

即

$$\min_{u(t)}\varPhi(x(t),u(t)).\tag{6c}$$

另一方面, 式(13)又可写为

$$\min_{u(t)} J=$$
$$\int_0^{t_{\rm f}}\{\varPhi(x(t),u(t))+\lambda^{\rm T}(t)f(x(t),u(t))\}{\rm d}t-$$
$$\int_0^{t_{\rm f}}\lambda^{\rm T}(t)\dot{x}(t){\rm d}t=$$
$$\int_0^{t_{\rm f}}\{\varPhi(x(t),u(t))+\lambda^{\rm T}(t)f(x(t),u(t))\}{\rm d}t-$$
$$[\lambda^{\rm T}(t)x(t)]_0^{t_{\rm f}}+\int_0^{t_{\rm f}}x^{\rm T}(t)\dot{\lambda}(t){\rm d}t=$$
$$\int_0^{t_{\rm f}}\{\varPhi(x(t),u(t))+\lambda^{\rm T}(t)f(x(t),u(t))+$$
$$x^{\rm T}(t)\dot{\lambda}(t)\}{\rm d}t-[\lambda^{\rm T}(t)x(t)]_0^{t_{\rm f}},\tag{16}$$

式中

$$\min_{u(t)}\{[\lambda^{\rm T}(t)x(t)]_0^{t_{\rm f}}\}=0.\tag{17}$$

式(16)仿效式(13)至式(15)的推导, 得式(15)的另一种形式:

$$\min_{a_{ij},b_{rj},c_{ij}}\{H(\underline{x}(a_{ij},t),\underline{u}(b_{rj},t),\underline{\lambda}(c_{ij},t))+$$
$$\underline{x}^{\rm T}(a_{ij},t)\dot{\underline{\lambda}}(c_{ij},t)\}.\tag{18}$$

当$t\in[0,t_{\rm f}]$, 去参数化, 得

$$\min_{u(t)}\{H(x(t),u(t),\lambda(t))+x^{\rm T}(t)\dot{\lambda}(t)\}.\tag{6b}$$

证毕.

注 1　a) 约束函数$g(x(t),u(t))\leqslant 0$并不影响以上的证明. 实际上, 系统约束也不影响证明, 如果不化为无约束优化问题, 就可直接证明式(6c).

b) 式(6a)–(6c)都是附属于式(5)的优化问题, 它们的目标函数不同于式(5)所示泛函求极值的目标函数, 必须从泛函求极值的目标函数才能计算出最优目标函数值, 理应如此[1–6] (参阅式(2)–(4)).

c) 以上采用了参数化, 它实际上仍然是连续时间的.

这一连续时间命题的证明不能采用离散化, 因为: ① 离散化使用差商取代微商, 失去了$\dot{x}$形式; ② 连续时间命题不需要假设H有凸性, 而离散化之后必须假定H有凸性[11–12], 就会造成前后不一致. 在最优控制理论的发展历史中, 曾经发生错将Pontryagin最小值原理急于直接推广至离散最小值原理, 忽视了凸性[13], 文[14–15]还举例, 说明连续时间的不能直接推广到离散时间的. 所以不应重蹈覆辙[16].

d) 式(15)(18)特别适合于参数与变量共同作为决策变量参与数值优化.

e) 此命题实际上可推广并表示为

$$\arg\min_{u(t)}\int_0^{t_{\rm f}}\varPhi(x(t),u(t),t){\rm d}t=$$

$$\arg\min_{u(t)}\ \varPhi(x(t),u(t),t),\ t\in[0,t_{\mathrm f}].$$

2.2 评论Pontryagin最小值原理

2.2.1 Pontryagin最小值原理是特殊情况

将已知的最优解$x^*(t),\lambda^*(t)$代入式(6a)或式(6b), 不必过多演绎, 立即可得式(19)所示Pontryagin最小值原理:

$$\min_{u(t)}\ \{H(x^*(t),u(t),\lambda^*(t))-\lambda^{*\mathrm T}(t)\dot x^*(t)\}=\min_{u(t)}\ H(x^*(t),u(t),\lambda^*(t)),\tag{19a}$$

或

$$\min_{u(t)}\ \{H(x^*(t),u(t),\lambda^*(t))+x^{*\mathrm T}(t)\dot\lambda^*(t)\}=\min_{u(t)}\ H(x^*(t),u(t),\lambda^*(t)),\tag{19b}$$

式中若已知最优解$x^*(t)$和$\lambda^*(t)$, 就有$\dot x^*(t)$和$\dot\lambda^*(t)$, 故有$\lambda^{*\mathrm T}(t)\dot x^*(t)=$常量及$x^{*\mathrm T}(t)\dot\lambda^*(t)=$常量.

从式(19)看出: Pontryagin最小值原理是本文推导的连续最优控制计算原理的特殊情况. 以前动用许多数学工具证明了一种特殊情况[1–6], 很可惜; 受当年科学技术发展水平的制约, 未能及时识破它是特殊情况[2–6], 很遗憾.

2.2.2 内容特殊(含有的信息不完整)

Pontryagin最小值原理相对于式(6a)–(6b)而言, 缺少一项; Pontryagin最小值原理相对于式(6c)而言, 多余一项. 由此造成含有信息不完整的后果. 当$u\in\mathbb R^m$时, 不需要变分法, 直接用微积分对式(6a)或式(6b)求极值, 即可得泛函极值存在的必要条件: 耦合方程$\dfrac{\partial H}{\partial u}=0$, 协态方程$\dfrac{\partial H}{\partial x}=-\dot\lambda$, 状态方程$\dfrac{\partial H}{\partial\lambda}=\dot x=f(x,u)$. 但是, 微积分用于$\min\limits_{u(t)}\ H(x^*(t),u(t),\lambda^*(t))$只能获得耦合方程, 必须另外依靠变分法才能获得协态方程和状态方程. 这说明式(6a)–(6c)各自含有的信息完整, 而$\min\limits_{u(t)}H(x^*(t),u(t),\lambda^*(t))$含有的信息不完整. 当$u\in\varOmega\subset\mathbb R^m$时, 有$\dfrac{\partial H}{\partial u}\neq0$, 也必须另外依靠变分法才能获得协态方程和状态方程, Pontryagin最小值原理含有的信息不完整.

2.2.3 形式特殊

Pontryagin最小值原理$\min\limits_{u(t)}\ H(x^*(t),u(t),\lambda^*(t))$使用特殊的轨线$x^*(t),\lambda^*(t)$代入, 在形式上就已经表明是一种特殊情况. $H(x^*(t),u(t),\lambda^*(t))\leqslant H(x(t),u(t),\lambda(t))$这种形式也表明是一种特殊情况, 但不容易被看清.

3 离散最优控制的计算原理

3.1 命题(离散最优控制的计算原理)

离散最优控制问题为函数求极值

$$\begin{cases}\min\limits_{u(k)}\ J=\sum\limits_{k=0}^{k_{\mathrm f}-1}\varPhi(x(k),u(k)),\\ \text{s.t. } x(k+1)=f(x(k),u(k)),\ x(0)=x_0,\\ \quad g(x(k),u(k))\leqslant0,\end{cases}\tag{20}$$

式中: $\varPhi\in\mathbb R$, $\varPhi$为凸函数, $x\in\mathbb R^n$, $u\in\mathbb R^m$, $g\in\mathbb R^q$, g为凸函数, $k_{\mathrm f}$固定. 定义Hamilton函数$H(x(k),u(k),\lambda(k+1))=\varPhi(x(k),u(k))+\lambda^{\mathrm T}(k+1)f(x(k),u(k))$[6], 协态向量$\lambda\in\mathbb R^n$. 则有离散最优控制计算原理

$$\begin{cases}\min\limits_{u(k)}\ \varPhi(x(k),u(k)),\\ \text{s.t. } x(k+1)=f(x(k),u(k)),\\ \quad x(0)=x_0,\ k\in[0,k_{\mathrm f}-1],\\ \quad g(x(k),u(k))\leqslant0,\end{cases}\tag{21a}$$

即

$$\begin{cases}\min\limits_{u(k)}\ \{H(x(k),u(k),\lambda(k+1))-\\ \quad\lambda^{\mathrm T}(k+1)x(k+1)\},\\ \text{s.t. } x(k+1)=f(x(k),u(k)),\\ \quad x(0)=x_0,\ k\in[0,k_{\mathrm f}-1],\\ \quad g(x(k),u(k))\leqslant0,\end{cases}\tag{21b}$$

即

$$\begin{cases}\min\limits_{u(k)}\ \{H(x(k),u(k),\lambda(k+1))-\\ \quad x^{\mathrm T}(k+1)\lambda(k+1)\},\\ \text{s.t. } x(k+1)=f(x(k),u(k)),\\ \quad x(0)=x_0,\ k\in[0,k_{\mathrm f}-1],\\ \quad g(x(k),u(k))\leqslant0.\end{cases}\tag{21c}$$

证 式(20)即

$$\begin{cases}\min\limits_{u(k)}\ J=\min\limits_{u(k)}\{\varPhi(x(0),u(0))+\varPhi(x(1),u(1))+\\ \quad\cdots+\varPhi(x(k_{\mathrm f}-1),u(k_{\mathrm f}-1))\},\\ \text{s.t. } x(k+1)=f(x(k),u(k)),\ x(0)=x_0\\ \quad g(x(k),u(k))\leqslant0,\ k\in[0,k_{\mathrm f}-1].\end{cases}\tag{22}$$

式(22)为加权和求极小, 式(23)为多目标求极小, 前者的最优解为后者的Pareto最优解的必要条件是: 凸优化问题(目标凸和约束凸)[17–19]:

$$\begin{cases}\min\limits_{u(0)}\ \varPhi(x(0),u(0)),\\ \text{s.t. } x(1)=f(x(0),u(0)),\ x(0)=x_0;\\ \min\limits_{u(1)}\ \varPhi(x(1),u(1)),\\ \text{s.t. } x(2)=f(x(1),u(1));\\ \quad\vdots\\ \min\limits_{u(k_{\mathrm f}-1)}\ \varPhi(x(k_{\mathrm f}-1),u(k_{\mathrm f}-1)),\\ \text{s.t. } x(k_{\mathrm f})=f(x(k_{\mathrm f}-1),u(k_{\mathrm f}-1));\\ \text{s.t. } g(x(k),u(k))\leqslant0,\ k\in[0,k_{\mathrm f}-1],\end{cases}\tag{23}$$

所以, 式(20)所示离散最优控制问题, 可从式(23)用多目标优化求解.

当$k\in[0,k_{\rm f}-1]$, 观察另一优化问题, 如式(21a)所示:

$$\begin{cases}\min\limits_{u(k)}\ \varPhi(x(k),u(k)),\\ \text{s.t. } x(k{+}1)=f(x(k),u(k)),\\ \qquad x(0)=x_0,\ k\in[0,k_{\rm f}-1],\\ \qquad g(x(k),u(k))\leqslant 0,\end{cases}\tag{21a}$$

式中: $\varPhi\in\mathbb{R}$, $\varPhi$为凸函数, $x\in\mathbb{R}^n,\ u\in\mathbb{R}^m,\ g\in\mathbb{R}^q$, g为凸函数, $k_{\rm f}$固定.

式(21a)也可表示为式(23)所示多目标优化的形式. 所以, 式(21a)所示函数求极值问题, 也可从式(23)用多目标优化求解.

既然从式(20)和式(21a)都可演绎出相同的式(23), 两者都对式(23)作出相同的多目标优化求解, 必然能得出相同的结果. 换言之, 对式(21a)求得决策变量, 就是求得式(20)的决策变量. 式(21a)即为离散最优控制计算原理.

以下, 为了将本文提出的离散最优控制计算原理与离散最小值原理作比较, 式(21a)之目标函数改写为

$$\begin{aligned}&\min_{u(k)}\ \ \varPhi(x(k),u(k))=\\&\quad\{\varPhi(x(k),u(k))+\lambda^{\rm T}(k{+}1)f(x(k),u(k))-\\&\quad\lambda^{\rm T}(k{+}1)x(k+1)\},\end{aligned}$$

即得

$$\begin{cases}\min\limits_{u(k)}\ \{H(x(k),u(k),\lambda(k{+}1))-\\ \qquad\lambda^{\rm T}(k+1)x(k+1)\},\\ \text{s.t. } x(k{+}1)=f(x(k),u(k)),\\ \qquad x(0)=x_0,\ k\in[0,k_{\rm f}-1],\\ \qquad g(x(k),u(k))\leqslant 0.\end{cases}\tag{21b}$$

式(21b)即式(21c):

$$\begin{cases}\min\limits_{u(k)}\ \{H(x(k),u(k),\lambda(k{+}1))-\\ \qquad x^{\rm T}(k+1)\lambda(k+1)\},\\ \text{s.t. } x(k{+}1)=f(x(k),u(k)),\\ \qquad x(0)=x_0,\ k\in[0,k_{\rm f}-1],\\ \qquad g(x(k),u(k))\leqslant 0.\end{cases}\tag{21c}$$

证毕.

注 2　a) 离散最优控制计算原理的证明必须假设$\varPhi$凸g凸, 离散最小值原理只适用于$\varPhi$凸g凸的情况[11–12], 两者一致.

b) 加权和优化的最优解转换为多目标优化的Pareto最优解, 其必要条件为目标凸约束凸[17–19]. 离散最优控制计算原理(含离散最小值原理)对凸性的要求, 就隐藏在这一转换之中.

c) 此命题实际上可推广并表示为

$$\arg\min_{u(k)\cdots u(k_{\rm f}-1)}\sum_{j=k}^{k_{\rm f}-1}\varPhi(x(j),u(j),j)=$$
$$\arg\min_{u(k)}\varPhi(x(k),u(k),k),\ k\in[0,k_{\rm f}-1].$$

3.2　评论离散最小值原理

3.2.1　离散最小值原理是特殊情况

将已知的最优解$x^*(k)$和$\lambda^*(k+1)$代入式(21b)–(21c)不必过多演绎, 立即可得式(24)所示离散最小值原理:

$$\begin{aligned}&\min_{u(k)}\ \{H(x^*(k),u(k),\lambda^*(k{+}1))-\\&\qquad\lambda^{*\rm T}(k{+}1)x^*(k+1)\}=\\&\min_{u(k)}\ H(x^*(k),u(k),\lambda^*(k{+}1))\end{aligned}\tag{24a}$$

或

$$\begin{aligned}&\min_{u(k)}\ \{H(x^*(k),u(k),\lambda^*(k{+}1))+\\&\qquad x^{*\rm T}(k{+}1)\lambda^*(k+1)\}=\\&\min_{u(k)}\ H(x^*(k),u(k),\lambda^*(k{+}1)),\end{aligned}\tag{24b}$$

式中

$$\begin{aligned}&\lambda^{*\rm T}(k{+}1)x^*(k+1)=\\&x^{*\rm T}(k+1)\lambda^*(k{+}1)=\text{常量},\end{aligned}$$

因为若已知最优解$x^*(k)$, 就有$x^*(k+1)$.

从式(24)看出: 离散最小值原理是本文推导的离散最优控制计算原理的特殊情况. 受当年科学技术发展水平的制约, 未能及时识破它是特殊情况[2–6], 很遗憾.

3.2.2　内容特殊(含有的信息不完整)

离散最小值原理相对于式(21a)所示计算原理而言, 多余一项; 离散最小值原理相对于式(21b)或式(21c)所示计算原理而言, 缺少一项. 由此造成含有信息不完整的后果. 当$u\in\mathbb{R}^m$时, 不需要离散变分法, 直接用微积分对式(21b)或式(21c)求极值, 即得函数极值存在的必要条件:

耦合方程为$\dfrac{\partial H(x(k),u(k),\lambda(k{+}1))}{\partial u(k)}=0;$

协态方程为$\dfrac{\partial H(x(k),u(k),\lambda(k{+}1))}{\partial x(k)}=\lambda(k);$

状态方程为$\dfrac{\partial H(x(k),u(k),\lambda(k{+}1))}{\partial\lambda(k{+}1)}=x(k+1)=f(x(k),u(k)).$

但是, 用微积分对离散最小值原理$\min\limits_{u(k)}\ H(x^*(k),u(k),\lambda^*(k+1))$求极值, 只能获得耦合方程, 必须另外依靠离散变分法, 才能获得协态方程和状态方程.

这说明式(21a)–(21c)各自含有的信息完整, 而离散最小值原理含有的信息不完整. 当$u \in \Omega \subset \mathbb{R}^m$时, 有$\dfrac{\partial H}{\partial u} \neq 0$, 也必须另外依靠离散变分法, 才能获得协态方程和状态方程, 离散最小值原理含有的信息不完整.

3.2.3 形式特殊

离散最小值原理 $\min\limits_{u(k)} H(x^*(k), u(k), \lambda^*(k+1))$ 使用特殊的轨线$x^*(k), \lambda^*(k+1)$代入, 在形式上已经表明是一种特殊情况. $H(x^*(k), u(k), \lambda^*(k+1)) \leqslant H(x(k), u(k), \lambda(k+1))$这种形式也表明是一种特殊情况, 但不容易被看清.

4 例

例 1 式(6c)的使用(只有系统状态方程约束):

$$\begin{cases} \min\limits_{u(t)} \ J = \int_0^2 0.5u^2(t)\mathrm{d}t, \\ \text{s.t.}\ \dot{x}_1(t) = x_2(t),\ x_1(0) = 1,\ x_2(0) = 1, \\ \quad\ \dot{x}_2(t) = u(t),\ x_1(2) = 0,\ x_2(2) = 0, \end{cases} \tag{25}$$

式中: $x \in \mathbb{R}^2,\ u \in \mathbb{R}$.

使用此例的目的: a) 按式(2)求解, 即求解耦合方程、状态方程、协态方程, 获得解析解, 并从解析解取得数值解; b) 对原泛函求极值问题求数值解; c) 对本文推导的计算原理用数值优化求数值解; d) 最小值原理用数值优化求数值解. 前两者作为标准, 检验后两者.

解 1 用MATLAB的符号数学工具箱求解两点边值问题(TPBVP), 得幂级数解:

$$\begin{cases} x_1(t) = 1 + t - 1.75t^2 + 0.5t^3, \\ x_2(t) = 1 - 3.5t + 1.5t^2, \\ u(t) = -3.5 + 3t. \end{cases} \tag{26}$$

当采样周期$T_\mathrm{s} = 0.2$ s, 从该幂级数解取得数值解, 见表1所示.

表 1 从式(26)取得式(25)的数值解

Table 1 To get the numerical solution of Eq. (25)from Eq. (26)

$x_1(t)$	$x_2(t)$	$u(t)$
1.0000	1.0000	−3.2000
1.1340	0.3600	−2.6000
1.1520	−0.1600	−2.0000
1.0780	−0.5600	−1.4000
0.9360	−0.8400	−0.8000
0.7500	−1.0000	−0.2000
0.5440	−1.0400	0.4000
0.3420	−0.9600	1.0000
0.1680	−0.7600	1.6000
0.0460	−0.4400	2.2000
0.0000	0.0000	—

2) 对原泛函求极值问题式(25)求数值解.

式(25)离散化($T_\mathrm{s} = 0.2$ s), 采用MATLAB优化工具箱的约束非线性优化求解器 fmincon 并用算法 interior-point, 得数值解, 见表2所示.

表 2 式(25)的数值解

Table 2 The numerical solution of Eq. (25)

$x_1(t)$	$x_2(t)$	$u(t)$
1.0000	1.0000	−3.2273
1.1355	0.3545	−2.6212
1.1539	−0.1697	−2.0152
1.0797	−0.5727	−1.4091
0.9370	−0.8545	−0.8030
0.7500	−1.0152	−0.1970
0.5430	−1.0545	0.4091
0.3403	−0.9727	1.0152
0.1661	−0.7697	1.6212
0.0445	−0.4455	2.2273
0.0000	0.0000	—

表1与表2数据的3位有效数字一致.

3) 计算原理式(6c)用于式(25), 离散化后用数值优化求数值解.

$$\begin{cases} \min\limits_{u(t)} \ 0.5u^2(t),\ t \in [0, 2], \\ \text{s.t.}\ \dot{x}_1(t) = x_2(t),\ x_1(0) = 1,\ x_2(0) = 1, \\ \quad\ \dot{x}_2(t) = u(t), x_1(2) = 0,\ x_2(2) = 0, \end{cases} \tag{27}$$

式中: $x \in \mathbb{R}^2,\ u \in \mathbb{R},\ \lambda \in \mathbb{R}^2$.

此式离散化($T_\mathrm{s} = 0.2$ s), 采用MATLAB优化工具箱的约束非线性优化求解器fmincon并用算法interior-point, 得数值解, 见表3所示.

表 3 式(27)的数值解

Table 3 The numerical solution of Eq. (27)

$x_1(t)$	$x_2(t)$	$u(t)$
1.0000	1.0000	−3.2273
1.1355	0.3545	−2.6212
1.1539	−0.1697	−2.0152
1.0797	−0.5727	−1.4091
0.9370	−0.8545	−0.8030
0.7500	−1.0152	−0.1970
0.5430	−1.0545	0.4091
0.3403	−0.9727	1.0152
0.1661	−0.7697	1.6212
0.0445	−0.4455	2.2273
0.0000	0.0000	—

表2与表3数据完全一致, 能获得式 (25)的真解$x^*(t), u^*(t)$.

4) 对Pontryagin最小值原理式(4), 用数值优化求数值解:

$$\begin{cases}\min\limits_{u(t)}\ [0.5u^2(t)+\lambda_1(t)x_2(t)+\lambda_2(t)u(t)],\ t\in[0,2],\\ \text{s.t. } \dot{x}_1(t)=x_2(t),\ x_1(0)=1,\ x_2(0)=1,\\ \qquad \dot{x}_2(t)=u(t),\ x_1(2)=0,\ x_2(2)=0,\end{cases} \tag{28}$$

式中: $x\in\mathbb{R}^2,\ u\in\mathbb{R},\ \lambda\in\mathbb{R}^2$.

此式离散化($T_{\rm s}=0.2$ s), 采用MATLAB优化工具箱的约束非线性优化求解器fmincon, 并用算法interior-point求数值解. 虽然系统的状态方程相同, 其他的约束相同, 计算时, 使用同一台计算机, 有相同的字长, 又用同一种优化算法, 还用同一种MATLAB优化工具箱的软件, 但是$\min\limits_{u(t)}\{H(x(t),u(t),\lambda(t))\}$与$\min\limits_{u(t)}\ \varPhi(x(t),u(t))$两者目标函数不同, 前者信息不完整, 不能获得式(25)的真解, 计算结果错误.

例 2 式(6c)的使用(有系统状态方程约束, 还有终端函数约束).

$$\begin{cases}\min\limits_{u(t)}\ J=\int_0^4[x^{\rm T}(t)x(t)+u^{\rm T}(t)u(t)]{\rm d}t,\\ \text{s.t. } \dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t),\ x(0)=1,\\ \qquad x_1^2(5)+x_2^2(5)+x_3^2(5)\leqslant 1,\end{cases} \tag{29}$$

式中: $x\in\mathbb{R}^3,\ u\in\mathbb{R}^2$,

$$A=\begin{bmatrix}2.3714 & 0.3163 & -1.1280\\ 0 & -1.1815 & 1.1589\\ 0.6103 & -5.9501 & -0.1741\end{bmatrix},$$

$$B=\begin{bmatrix}0.0475 & 0\\ 1.2500 & 0.1010\\ 0 & 0.2873\end{bmatrix}.$$

使用此例的目的: a) 对原泛函求极值问题求取数值解; b) 对本文推导的计算原理用数值优化求取数值解; c) 对Pontryagin最小值原理用数值优化求取数值解. 前者作为标准, 检验后两者.

解 按式(6c),

$$\begin{cases}\min\limits_{u(t)}\ [x^{\rm T}(t)x(t)+u^{\rm T}(t)u(t)],\ t\in[0,5],\\ \text{s.t. } \dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t),\ x(0)=1,\\ \qquad x_1^2(5)+x_2^2(5)+x_3^2(5)\leqslant 1,\end{cases} \tag{30}$$

式中: $x\in\mathbb{R}^3,\ u\in\mathbb{R}^2$.

此式离散化($T_{\rm s}=0.8$ s), 采用MATLAB优化工具箱的约束非线性优化求解器fmincon, 并用算法interior-point得数值解, 见表4所示.

该数值解与式(29)所示原泛函求极值问题的数值解完全一致, 但是, Pontryagin最小值原理不能获得式(29)的真解, 计算结果错误.

表 4 式(30)的数值解

Table 4 The numerical solution of Eq. (30)

$x_1(t)$	$x_2(t)$	$x_3(t)$	$u_1(t)$	$u_2(t)$
1.0000	1.0000	1.0000	−4.9621	16.2299
2.0591	−2.6688	0.3184	1.5332	−0.6119
5.0612	1.6328	13.8427	−11.6676	1.4865
2.1409	1.1354	6.2716	−5.5505	−0.0706
0.6193	0.3204	1.0224	−0.7517	−0.1512
0.9242	0.2260	−0.3080	—	—

通过上述两例对原理的测试与检验, 可以观察到两点:

a) $\min\limits_{u(t)}\ H(x(t),u(t),\lambda(t))$与$\min\limits_{u(t)}\ \varPhi(x(t),u(t))$相比, 前者多余一项$\min\limits_{u(t)}\lambda^{\rm T}(t)f(x(t),u(t))$, 但数值优化却会由此多出数十项或更多(取决于系统维数和采样点数), 其计算结果不能获得真解$x^*(t),u^*(t),\lambda^*(t)$, 只能获得伪解. 这种计算结果错误是由原理性缺陷造成的, 绝非提高精度所能弥补.

b) $\min\limits_{u(t)}\ H(x^*(t),u(t),\lambda^*(t))$是正确的, $\min\limits_{u(t)}\{H(x^*(t),u(t),\lambda^*(t))-\lambda^{*\rm T}(t)\dot{x}^*(t)\}$也正确; 虽然$\min\limits_{u(t)}\ H(x^*(t),u^*(t),\lambda^*(t))$成立, 但应该是$\min\limits_{u(t)}\ \{H(x^*(t),u^*(t),\lambda^*(t))-\lambda^{*\rm T}(t)\dot{x}^*(t)\}$或$\min\limits_{u(t)}\ \{H(x(t),u(t),\lambda(t))-\lambda^{\rm T}(t)\dot{x}(t)\}$. 可见$\min\limits_{u(t)}\ H(x(t),u(t),\lambda(t))$缺失$\min\limits_{u(t)}\ \lambda^{\rm T}(t)\dot{x}(t)$项, 并且$x^*(t),\lambda^*(t)$是外来的, 并不能内部生成, 所以$\min\limits_{u(t)}\ H(x(t),u(t),\lambda(t))$不能获得真解$x^*(t),u^*(t),\lambda^*(t)$. 上述现象(真解代入是成立的, 求解却始终得到伪解)乍一看有点诡异, 实质还是由信息不完整所致.

5 结论

本文提出的连续最优控制计算原理和离散最优控制计算原理都可用于最优控制的数值优化. Pontryagin最小值原理和离散最小值原理分别是本文提出的连续最优控制计算原理和离散最优控制计算原理的特殊情况, 并且, Pontryagin最小值原理和离散最小值原理都不能用于最优控制的数值优化, 这是一种缺陷. 这些是在50多年后才被发现的, 全靠现代数值优化关于非线性规划的优秀算法和MATLAB的优化工具箱, 这反映出时代的进步.

最优控制计算原理也适用于伪谱法最优控制[20–21], 其采样周期不是等间隔的.

致谢 西安交通大学自动化系和彭勤科老师.

参考文献:

[1] PONTRYAGIN L S, BOLTYANSKII V G, GAMKRELIDZE R V, et al. *The Mathematical Theory of Optimal Processes*. New York: Inter-

science Publishers, 1962.

[2] GUAN Zhaozhi, HAN Jingqing, QIN Huashu, et al. *Extreme Control and Maximum Principle*. Beijing: Science Press, 1980.
(关肇直, 韩京清, 秦化淑, 等. 极值控制与极大值原理. 北京: 科学出版社, 1980.)

[3] ATHANS M, FALB P L. *Optimal Control*. New York: McGraw-Hill, 1966.

[4] BRYSON A E, HO Y C. *Applied Optimal Control*. Waltham, Mass: Blaisdell, 1969.

[5] SAGE A P, WHITE C C. *Optimum Systems Control*. Second Edition. Englewood, New Jersey: Prentice-Hall, 1979.

[6] WU Shouzhang. *Theory and Application of Optimal Control*. Beijing: Mechanical Industry Press, 2008.
(吴受章. 最优控制理论与应用. 北京: 机械工业出版社, 2008.)

[7] NOCEDAL J, WRIGHT S J. *Numerical Optimization*. 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 2006.

[8] SHAMASH Y. Stable reduced order models using pade type approximants. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1974, 19(5): 615 – 616.

[9] WU Shouzhang. Using reduced order model to design high order control system. *Information and Control*, 1984, 13(6): 27 – 31.
(吴受章. 采用降阶模型设计高阶控制系统. 信息与控制, 1984, 13(6): 27 – 31.)

[10] WU Shouzhang, FANG Zhongping. Some experimental results on model reduction. *Journal of Automation*, 1989, 15(4): 377 – 382.
(吴受章, 方钟平. 关于模型降阶的一些试验结果. 自动化学报, 1989, 15(4): 377 – 382.)

[11] HOLTZMAN J M. Convexity and the maximum principle for discrete systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1966, 11(1): 30 – 34.

[12] PEARSON J, SRIDHAR R. A discrete optimal control problem. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1966, 11(2): 171 – 174.

[13] FAN L T, WANG C S. *The Discrete Maximum Principle*. New York: Wiley, 1964.

[14] BUTKOVSKI A G. Theory of optimal control of distributed parameter systems. *Automatic Remote Control*, 1963, 24: 963.

[15] JACKSON R, HORN F. Studies in the optimum design, control and operation of chemical plant. *International Journal of Control*, 1965, 1: 389.

[16] NAHORSKI Z, RAVN H, VIDAL R V V. The discrete-time maximum principle: a survey and some new results. *International Journal of Control*, 1984, 40(3): 533 – 554.

[17] MARLER R T, ARORA J S. The weighted sum method for multi-objective optimization: new insights. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2010, 41(6): 853 – 862.

[18] MIETTINEN K. *Nonlinear Multiobjective Optimization*. Boston: Kluwer Academic, 1999.

[19] LIN Cuoyun, DONG Jiali. *Methods and Theories of Multi-Objective Optimization*. Changchun: Jilin Education Press, 1992.
(林锉云, 董加礼. 多目标优化的方法与理论. 长春: 吉林教育出版社, 1992.)

[20] WANG Jinbo, CUI Naigang, GUO Jifeng, et al. High precision fast trajectory optimization algorithm for rocket return landing problem. *Control Theory & Applications*, 2018, 35(3): 389 – 398.
(王劲博, 崔乃刚, 郭继峰, 等. 火箭返回着陆问题高精度快速轨迹优化算法. 控制理论与应用, 2018, 35(3): 389 – 398.)

[21] NIKOOEINEJAD Z, DELAVARKHALAFI A, HEYDARI M. Application of shifted Jacobi pseudospectral method for solving (In)finite-horizon min–max optimal control problems with uncertainty. *International Journal of Control*, 2018, 91(3): 725 – 739.

作者简介:

吴受章 关注建模、控制与优化, Email: wsz_1@xjtu.edu.cn.