第 36 卷第 9 期
2019 年 9 月

控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications

Vol. 36 No. 9
Sep. 2019

不确定线性系统的可达集估计

张值豪[1], 韩渭辛[2], 沈　毅[1†], 王振华[1]

(1. 哈尔滨工业大学 航天学院, 黑龙江 哈尔滨 150001; 2. 西北工业大学 自动化学院, 陕西 西安 710072)

摘要: 本文针对线性不确定系统, 研究了系统状态可达集估计问题. 在已知参考输入, 未知扰动有界的条件下, 提出了一种新的可达集估计方法, 并把所提方法推广到系统不稳定的情况, 分别估计出不稳定系统的闭环可达集和开环可达集. 通过分析动态系统的李雅普诺夫函数, 将求取系统可达集的问题转化为线性矩阵不等式优化问题, 并将可达集范围用椭球集形式表述. 最后分别通过数值仿真分析, 验证了所提出方法对线性系统可达集估计的有效性.

关键词: 线性系统; 可达集估计; 参数不确定性; 线性矩阵不等式

引用格式: 张值豪, 韩渭辛, 沈毅, 等. 不确定线性系统的可达集估计. 控制理论与应用, 2019, 36(9): 1423 – 1430

DOI: 10.7641/CTA.2019.80263

Reachable set estimation for uncertain linear systems

ZHANG Zhi-hao[1], HAN Wei-xin[2], SHEN Yi[1†], WANG Zhen-hua[1]

(1. School of Astronautics, Harbin Institute of Technology, Harbin Heilongjiang 150001, China;
2. College of Automation, Northwestern Polytechnical University, Xi'an Shaanxi 710072, China)

Abstract: This paper studies the problem of state reachable set estimation for uncertain linear systems. A new reachable set estimation method for discrete-time systems is proposed under the condition of known input and unknown bounded disturbance. And this method is extended to the unstable systems. In this extension, the reachable sets of the closed-loop and open-loop of the unstable systems are estimated respectively. By analyzing Lyapunov function of dynamic system, the problem of reachable set estimation of system is transformed into the optimization problem of linear matrix inequality. On the basis of these conditions, a series of ellipsoid containing the reachable set of the considered system is obtained. Finally, the effectiveness of the proposed method for the estimation of the reachability set of linear systems is verified by the simulation analysis of numerical examples.

Key words: linear system; reachable set estimation; parameter uncertainty; linear matrix inequality

Citation: ZHANG Zhihao, HAN Weixin, SHEN Yi, et al. Reachable set estimation for uncertain linear systems. *Control Theory & Applications*, 2019, 36(9): 1423 – 1430

1 引言

可达集是系统在特定约束条件下, 存在的所有可能状态的集合. 可达集估计问题自20世纪60年代提出至今, 在机器学习神经网络建模[1]、实时嵌入式软件体系结构建模及可靠性评估[2]、自主车辆避障安全路径建模[3]、小型无人机在线航迹规划[4]、飞行员机动动作安全驾驶[5]等众多学科领域中, 得到了广泛应用. 系统状态的可达集, 界定了系统正常运行时系统状态的范围. 因此, 系统状态可达集边界的确定, 对于设计控制器, 分析系统稳定性以及诊断系统故障等, 都具有重要意义[6–9].

系统可达集边界确定问题目前已得到越来越多的关注. 学者们在各个领域针对不同的系统进行研究, 并取得了一定的成果. 文献[10–11]针对时滞控制系统进行了可达集定界分析. 但是这两篇文献都没有考虑不确定参数对系统的影响. 文献[12]针对状态受限动态系统, 利用可达集定界方法, 推导了Hilbert空间的生存定理. 文献[13]研究了有界峰值扰动下离散周期系统的可达集估计与综合问题. 文献[12–13]所提方法的复杂性限制了该方法的应用范围. 文献[14–15]将可达集估计应用于离散切换系统. 文献[16]利用时滞相关方法和自由权矩阵将可达集定界结果推广到具有时变时滞的离散广义系统中. 值得指出的是文献[14–16]中的方法只适用于稳定系统, 无法估计开环不

收稿日期: 2018−04−14; 录用日期: 2019−03−13.
[†]通信作者. E-mail: yishen_hit@126. com; Tel. : +86 451-86413411-8602.
本文责任编委: 王聪.
国家自然科学基金项目(61773145), 山东省重点研发项目(2016JMRH0217)资助.
Supported by the National Natural Science Foundation of China (61773145) and the Science and Technology Development Plan Project of Shandong Province (2016JMRH0217).

稳定的系统的可达集. 与此同时, 新的求解可达集的方法也相继提出. 文献[17]采用几何迭代逼近的方法来确定可达集边界, 文献[18]采用二维李雅普诺夫函数来获得线性时滞系统的可达集; 文献[19]通过构造复合李雅普诺夫函数来确定不确定多面体系统的可达集边界; 文献[20]通过构建中心对称多胞体(zonotope)来表征切换系统可达集.

上述文献虽然针对各种系统, 提出了很多行之有效的方法, 在一定程度上解决了对应系统模型的可达集定界等问题, 但都存在着一定的不足. 对于控制系统而言, 不确定参数尤其是时变不确定参数, 可能会对整个系统的稳定性产生较大影响. 忽略了不确定参数的系统建模, 在某些特定状况下可能会发生严重脱离预期的偏差. 上述文献在系统模型构建的过程中, 都没有考虑不确定参数对系统的影响. 很多系统开环不稳定, 而大部分已有的方法并不适用于不稳定系统. 对于初始时刻状态已知的系统, 可以采用直接的坐标变换使其变换成为初始时刻状态为0的系统处理, 但这种直接的坐标变换并不适用于初始状态未知的系统. 上述文献中采用的方法, 大都要求系统初始时刻状态为0, 这在一定程度上限制了所提出方法的适用范围.

本文针对线性不确定系统, 研究了系统状态的可达集估计问题. 主要贡献在于, 针对包含时变不确定参数的离散时间系统, 基于李雅普诺夫函数的不确定参数动态系统的可达集定界方法, 将求取系统可达集的问题转化为构建线性矩阵不等式(linear matrix inequality, LMI)优化问题, 并把所提出方法推广到系统不稳定的情况, 分别估计出不稳定系统的闭环可达集和开环可达集. 该方法适用于初始状态未知但有界的系统, 得到的是一系列椭球表示的实时可达集, 为系统的状态控制、故障诊断等提供了基础.

2 问题描述

考虑如下不确定线性系统:

$$\begin{cases} x(k+1)=(A+\Delta A(k))x(k)+Bu(k)+Dw(k),\\ x^{\mathrm T}(0)x(0)\leqslant r_0, \end{cases} \tag{1}$$

其中: $x(k)\in\mathbb{R}^n$为系统的状态向量, $u(k)\in\mathbb{R}^r$为系统的控制输入, $w(k)\in\mathbb{R}^q$为系统的未知有界扰动, A, B, D是适当维数的已知常数矩阵, $\Delta A(k)$表示参数不确定性矩阵.

对于系统(1), 有如下假设:

假设 1 参数不确定矩阵$\Delta A(k)=M\varGamma(k)N$, 其中$M, N$为已知矩阵, 用来描述不确定矩阵的结构, $\varGamma(k)$为未知时变矩阵, 满足$\varGamma^{\mathrm T}(k)\varGamma(k)\leqslant I$.

假设 2 系统初始状态$x(0)$和未知扰动w有界, 且满足$\|x(0)\|\leqslant\bar{x}_0$, $\|w(k)\|\leqslant\|w\|_\infty$, 其中:

$$\|w\|_\infty=\sup_{k\geqslant0}\|w(k)\|,\ \|w(k)\|=\sqrt{w^{\mathrm T}(k)w(k)}.$$

下面给出本文用到的引理:

引理 1[22] 若未知时变矩阵$\varGamma(k)$满足$\varGamma^{\mathrm T}(k)\times\varGamma(k)\leqslant I$, 则对任意正实数$\epsilon>0$及正定矩阵$P>0$, 有

$$P(M\varGamma(k)N)+(M\varGamma(k)N)^{\mathrm T}P\leqslant$$
$$\epsilon^{-1}PMM^{\mathrm T}P+\epsilon N^{\mathrm T}N.$$

线性系统的最小可达集定义如下:

定义 1 系统(1)在k时刻的最小可达集为

$$R(k,x(0)):=\{y\in\mathbb{R}^n:\exists u(\cdot),\ \text{s.t.}\ x(k)=y\}. \tag{2}$$

由于参数不确定性和未知扰动的存在, 系统(1)的最小可达集很难准确计算得到, 但可以通过对不确定参数和未知扰动范围的分析, 得到一个与系统初值$x(0)$以及当前系统运行时刻k有关的集合, 即

$$\bar{R}(k,x(0))\supseteq R(k,x(0)),$$

使得所有可能的$x(k)$, 都包含在该集合内, 该过程称为系统的可达集估计.

3 主要结论

本节针对不确定线性系统(1)提出了一种可达集估计方法, 将求取系统可达集估计问题转化为线性矩阵不等式优化问题.

为了估计系统(1)的可达集范围, 提出如下定理:

定理 1 给定标量$0<\eta<1$, 如果存在正定矩阵$P\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 标量$\epsilon$, η_2, η_3, 使得如下优化问题有解:

$$\max\ k_1\mathrm{tr}(P)-k_2(1-\eta_2)-k_3(1-\eta_3),$$
$$\text{s.t.}\begin{bmatrix}\varPhi & 0 & 0 & A^{\mathrm T}P & 0\\ * & (\eta_2-1)I & 0 & B^{\mathrm T}P & 0\\ * & * & (\eta_3-1)I & D^{\mathrm T}P & 0\\ * & * & * & -P & PM\\ * & * & * & * & -\epsilon I\end{bmatrix}<0, \tag{3}$$

其中: k_1, k_2, k_3为优化权重, $\mathrm{tr}(P)$为矩阵P的迹, $\varPhi=-\eta P+\epsilon N^{\mathrm T}N$, 则状态$x(k)$满足

$$x^{\mathrm T}(k)Px(k)\leqslant\eta^k\bar{V}_0+\frac{1-\eta_3}{1-\eta}\|w\|_\infty^2+v(k), \tag{4}$$

其中: $\bar{V}_0=\bar{x}_0^2\lambda_{\max}P$, $v(0)=0$, $v(k+1)=\eta v(k)+(1-\eta_2)u^{\mathrm T}(k)u(k)$, $\lambda_{\max}P$是P的最大特征值.

证 对系统(1)取如下形式的李雅普诺夫函数:

$$V(k)=x^{\mathrm T}(k)Px(k). \tag{5}$$

对$V(k)$求差分得

$$\Delta V(k)=V(k+1)-V(k)=$$
$$x^{\mathrm T}(k+1)Px(k+1)-x^{\mathrm T}(k)Px(k)=$$

$$((A+\Delta A(k))x(k)+Bu(k)+ Dw(k))^TP((A+\Delta A(k))x(k)+ Bu(k)+Dw(k))-x^{\mathrm{T}}(k)Px(k). \tag{6}$$

根据Schur补引理[21], 式(3)与下式等价:

$$\begin{bmatrix}\Phi & 0 & 0 & A^{\mathrm{T}}P\\ * & (\eta_2-1)I & 0 & B^{\mathrm{T}}P\\ * & * & (\eta_3-1)I & D^{\mathrm{T}}P\\ * & * & * & -P+\epsilon^{-1}PMM^{\mathrm{T}}P\end{bmatrix}<0. \tag{7}$$

根据引理1, 式(7)可由下式得到:

$$\begin{bmatrix}-\eta P & 0 & 0 & \bar{A}^{\mathrm{T}}P\\ * & (\eta_2-1)I & 0 & B^{\mathrm{T}}P\\ * & * & (\eta_3-1)I & D^{\mathrm{T}}P\\ * & * & * & -P\end{bmatrix}<0, \tag{8}$$

其中$\bar{A}=A+\Delta A(k)$.

再次利用Schur补引理, 可得式(8)与下式等价:

$$\begin{bmatrix}M_{11} & \bar{A}^{\mathrm{T}}PB & \bar{A}^{\mathrm{T}}PD\\ * & M_{22} & B^{\mathrm{T}}PD\\ * & * & M_{33}\end{bmatrix}<0, \tag{9}$$

其中:

$$M_{11}=\bar{A}^{\mathrm{T}}P\bar{A}-\eta P,$$
$$M_{22}=B^{\mathrm{T}}PB-(1-\eta_2)I,$$
$$M_{33}=D^{\mathrm{T}}PD-(1-\eta_3)I.$$

由式(6)(9)可得

$$\Delta V(k)\leqslant(\eta-1)V(k)+(1-\eta_2)u^{\mathrm{T}}(k)u(k)+ (1-\eta_3)w^{\mathrm{T}}(k)w(k). \tag{10}$$

将式(10)代入

$$V(k)=V(k-1)+\Delta V(k-1), \tag{11}$$

递推可得

$$V(k)\leqslant \eta^kV(0)+v(k)+(1-\eta_3)\sum_{i=0}^{k-1}\eta^{k-i-1}w^{\mathrm{T}}(i)w(i)\leqslant \eta^k\bar{V}_0+\frac{1-\eta_3}{1-\eta}\|w\|_\infty^2+v(k), \tag{12}$$

其中:

$$v(k)=(1-\eta_2)(\eta^{k-1}u^{\mathrm{T}}(0)u(0)+\eta^{k-2}u^{\mathrm{T}}(1)u(1)+ \cdots+u^{\mathrm{T}}(k-1)u(k-1)).$$

此时, $v(k)$可以通过如下方程递推得到:

$$v(k+1)=\eta v(k)+(1-\eta_2)u^{\mathrm{T}}(k)u(k), \tag{13}$$

其初值条件为零, 即$v(0)=0$. 证毕.

注 1 定理1的方法可以推广到具有ΔB和ΔD的不确定系统. 因为ΔBu和ΔDw可以转化为与x无关的扰动统一在w中处理. 具体过程如下:

考虑如下不确定线性系统:

$$x(k+1)=(A+\Delta A(k))x(k)+(B+\Delta B(k))u(k)+ (D_1+\Delta D(k))w_1(k). \tag{14}$$

令$w_2(k)=\Delta B(k)u(k)$, $w_3(k)=\Delta D(k)w_1(k)$, 则

$$\begin{aligned}&x(k+1)=\\&(A+\Delta A(k))x(k)+Bu(k)+\Delta B(k)u(k)+D_1w_1(k)=\\&(A+\Delta A(k))x(k)+Bu(k)+D_1w_1(k)+w_2(k)+w_3(k)=\\&(A+\Delta A(k))x(k)+Bu(k)+[D_1\ \ I\ \ I]\begin{bmatrix}w_1(k)\\w_2(k)\\w_3(k)\end{bmatrix}.\end{aligned} \tag{15}$$

取

$$D=[D_1\ \ I\ \ I],\ w(k)=\begin{bmatrix}w_1(k)\\w_2(k)\\w_3(k)\end{bmatrix},$$

系统(14)转化为系统(1)的形式.

注 2 由定理1可知系统状态可达集满足如下不等式:

$$x^{\mathrm{T}}(k)Px(k)\leqslant\eta^k\bar{V}_0+\frac{1-\eta_3}{1-\eta}\|w\|_\infty^2+v(k). \tag{16}$$

显然, 当$k\to\infty$时, $x^{\mathrm{T}}(k)x(k)=\|x\|_\infty^2$. 此时式(16)表示为如下形式:

$$\lim_{k\to\infty}x^{\mathrm{T}}(k)Px(k)\leqslant\frac{1-\eta_3}{1-\eta}\|w\|_\infty^2+v(k). \tag{17}$$

由式(13)可得

$$\lim_{k\to\infty}v(k+1)=\eta v(k)+(1-\eta_2)u^{\mathrm{T}}(k)u(k), \tag{18}$$

$$\lim_{k\to\infty}v(k)=\frac{1-\eta_2}{1-\eta}\|u\|_\infty^2. \tag{19}$$

由式(17)和式(19)得

$$\lim_{k\to\infty}x^{\mathrm{T}}(k)Px(k)\leqslant \frac{1}{1-\eta}((1-\eta_3)\|w\|_\infty^2+(1-\eta_2)\|u\|_\infty^2). \tag{20}$$

由式(20)可得下式成立:

$$\exists r_\infty>0,\ \mathrm{s.t.}\|x\|_\infty^2\leqslant r_\infty, \tag{21}$$

其中$r_\infty\propto\dfrac{1}{\mathrm{tr}(P)\times(1-\eta_i)}$.

由式(20)可知, $(1-\eta_3)$与$(1-\eta_2)$的对可达集范围变化的灵敏程度近似等比于$\dfrac{\|w\|_\infty^2}{\|u\|_\infty^2}$, 因此可以取

$$k_3=\frac{\|w\|_\infty^2}{\|u\|_\infty^2}k_2. \tag{22}$$

定理1的优化条件可以写成

$$\min\frac{k_2(1-\eta_2)+k_3(1-\eta_3)}{\mathrm{tr}(P)}. \tag{23}$$

为了易于求解, 式(23)转化成如下形式:

$$\max k_1\mathrm{tr}(P)-k_2(1-\eta_2)-k_3(1-\eta_3). \tag{24}$$

根据式(23)的比例关系, 结合式(22), 得到如下优化权重:

$$k_1=1,\ k_2=\frac{\|u\|_\infty}{\|w\|_\infty},\ k_3=\frac{\|w\|_\infty}{\|u\|_\infty}. \tag{25}$$

根据式(21), η的最优值可采用逐点搜索法在$0<\eta<1$范围

内搜索.

具体过程如算法1所示.

算法 1 逐点搜索法求η最优值.

输入: k_1, k_2, k_3

输出: η

1: 初始化:

2: $\beta = 0$

3: for all i s.t. $1 \leqslant i \leqslant n$ do

4: $\eta_i = \delta\eta \times i$

5: η_i 带入定理1求解P

6: if 定理1有解

7: $\beta_i = \mathrm{tr}(P) \times (1 - \eta_i)$

8: if $i = 1$

9: $\eta = \eta_i, \beta = \beta_i$

10: else if $\beta < \beta_i$

11: $\eta = \eta_i, \beta = \beta_i$

12: end if

13: end if

14: end for

4 进一步的推广

需要说明的是, 定理1只适用于开环稳定的不确定线性系统. 为了扩展所提出方法的应用范围, 本节给出两种改进方法, 把所提出的方法推广到开环不稳定的系统中.

4.1 闭环稳定系统的可达集估计

如果开环系统(1)不稳定, 但使其闭环稳定的控制律形式事先已知, 则上节所提出方法仍然适用.

设系统(1)中的控制输入$u(k)$具有以下形式:

$$u(k) = Kx(k) + g(k), \tag{26}$$

其中: K为控制器增益矩阵, $g(k)$为参考输入.

式(26)代入系统(1), 得到

$$\begin{cases} x(k+1) = (A + \Delta A(k) + BK)x(k) + \\ \qquad\qquad Bg(k) + Dw(k), \\ x^{\mathrm{T}}(0)x(0) \leqslant r_0. \end{cases} \tag{27}$$

对于系统(27), 结合定理1, 可以得到如下推论:

推论 1 给定标量$0<\eta<1$, 如果存在正定矩阵$P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, 标量$\epsilon, \eta_2, \eta_3$, 使得如下优化问题有解:

$$\max\ k_1\mathrm{tr}(P) - k_2(1-\eta_2) - k_3(1-\eta_3),$$

$$\text{s.t.} \begin{bmatrix} \varPhi & 0 & 0 & (A+BK)^{\mathrm{T}}P & 0 \\ * & (\eta_2-1)I & 0 & B^{\mathrm{T}}P & 0 \\ * & * & (\eta_3-1)I & D^{\mathrm{T}}P & 0 \\ * & * & * & -P & PM \\ * & * & * & * & -\epsilon I \end{bmatrix} < 0, \tag{28}$$

其中: k_1, k_2, k_3为优化权重, $\mathrm{tr}(P)$为矩阵P的迹, $\varPhi = -\eta P + \epsilon N^{\mathrm{T}}N$, 则状态$x(k)$满足:

$$x^{\mathrm{T}}(k)Px(k) \leqslant \eta^k\bar{V}_0 + \frac{1-\eta_3}{1-\eta}\|w\|_\infty^2 + v(k), \tag{29}$$

其中:

$$\bar{V}_0 = \bar{x}_0^2\lambda_{\max}P,$$

$$v(k) = (1-\eta_2)(\eta^{k-1}g^{\mathrm{T}}(0)g(0) + \eta^{k-2}g^{\mathrm{T}}(1)g(1) + \cdots + g^{\mathrm{T}}(k-1)g(k-1)),$$

$\lambda_{\max}P$是P的最大特征值.

证 略.

4.2 不稳定系统的开环可达集估计

有些系统本身运行过程就是不稳定的, 并且其控制律不是事先确定的, 需要基于前向可达集估计设计控制律(比如Tube–MPC需要计算开环系统的可达集). 对于这种情况, 就需要估计开环系统的可达集范围. 下面对第3节中所提出的方法进行改进, 使之适用于不稳定系统的开环可达集估计.

将系统(1)写成如下形式:

$$\begin{cases} x(k+1) = (A - K + \Delta A(k))x(k) + \\ \qquad\qquad Kx(k) + Bu(k) + Dw(k), \\ x^{\mathrm{T}}(0)x(0) \leqslant r_0, \end{cases} \tag{30}$$

其中K是使得$A - K + \Delta A(k)$满足Schur稳定的常值矩阵, 则$x(k+1)$可表示为

$$x(k+1) = (A_k + \Delta A(k))x(k) + Kx(k) + Bu(k) + Dw(k), \tag{31}$$

其中$A_k = A - K$.

基于定理1, 可以得到如下推论.

推论 2 给定标量$0 < \eta < 1$如果存在正定矩阵$P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, 标量$\epsilon, \eta_2, \eta_3, \eta_4$, 使得如下优化问题有解:

$$\max\ k_1\mathrm{tr}(P) - k_2(1-\eta_2) - k_3(1-\eta_3) + k_4(1-\eta_4),$$

$$\text{s.t.} \begin{bmatrix} \varPhi & 0 & 0 & 0 & A_k^{\mathrm{T}}P & 0 \\ * & (\eta_4-1)I & 0 & 0 & K^{\mathrm{T}}P & 0 \\ * & * & (\eta_2-1)I & 0 & B^{\mathrm{T}}P & 0 \\ * & * & * & (\eta_3-1)I & D^{\mathrm{T}}P & 0 \\ * & * & * & * & -P & PM \\ * & * & * & * & * & -\epsilon I \end{bmatrix} < 0, \tag{32}$$

其中: k_1, k_2, k_3, k_4为优化权重, $\mathrm{tr}(P)$为矩阵P的迹, $\varPhi = -\eta P + \epsilon N^{\mathrm{T}}N$, 则状态$x(k)$满足:

$$x^{\mathrm{T}}(k)Px(k) \leqslant \eta^k\bar{V}_0 + p(k) + v(k) + f(k), \tag{33}$$

其中:

$$\bar{V}_0 = \bar{x}_0^2\lambda_{\max}P,$$

$$p(k)=\frac{1-\eta_3}{1-\eta}\|w\|_\infty^2,$$

$$v(k)=(1-\eta_2)(\eta^{k-1}u^{\mathrm{T}}(0)u(0)+\eta^{k-2}u^{\mathrm{T}}(1)u(1)+\cdots+u^{\mathrm{T}}(k-1)u(k-1)),$$

$$f(k)=(1-\eta_4)(\eta^{k-1}r_0+\eta^{k-2}r_1+\cdots+r_{k-1}),$$

$$r_i=\frac{1}{\lambda_{\min}}(\eta^i\bar{V}_0+p(i)+v(i)+f(i)),$$

$\lambda_{\max}P$是P的最大特征值.

证　对系统(30)取如下形式的李雅普诺夫函数:

$$V(k)=x^{\mathrm{T}}(k)Px(k). \tag{34}$$

设$\lambda_{\min}$为P的最小特征值, 则

$$\lambda_{\min}\|x(k)\|^2\leqslant V(k). \tag{35}$$

由式(35)可得

$$\|x(k)\|^2\leqslant\frac{1}{\lambda_{\min}}V(k). \tag{36}$$

类似定理1的证明可得

$$\begin{aligned}&\Delta V(k)\leqslant\\&(\eta-1)V(k)+(1-\eta_2)u^{\mathrm{T}}(k)u(k)+\\&(1-\eta_3)w^{\mathrm{T}}(k)w(k)+(1-\eta_4)x^{\mathrm{T}}(k)x(k)\leqslant\\&(\eta-1)V(k)+(1-\eta_2)u^{\mathrm{T}}(k)u(k)+\\&(1-\eta_3)w^{\mathrm{T}}(k)w(k)+(1-\eta_4)\frac{1}{\lambda_{\min}}V(k).\end{aligned} \tag{37}$$

将式(37)代入

$$V(k)=V(k-1)+\Delta V(k-1), \tag{38}$$

可得$V(1)$满足

$$\begin{aligned}V(1)=&V(0)+\Delta V(0)\leqslant\\&\bar{V}_0+(\eta-1)\bar{V}_0+(1-\eta_2)u^{\mathrm{T}}(0)u(0)+\\&(1-\eta_3)w^{\mathrm{T}}(0)w(0)+(1-\eta_4)r_0,\end{aligned}$$

$V(2)$满足

$$\begin{aligned}&V(2)=V(1)+\Delta V(1)\leqslant\\&\eta^2\bar{V}_0+(\eta(1-\eta_2)u^{\mathrm{T}}(0)u(0)+\\&(1-\eta_2)u^{\mathrm{T}}(1)u(1))+(\eta(1-\eta_3)w^{\mathrm{T}}(0)w(0)+\\&(1-\eta_3)w^{\mathrm{T}}(1)w(1))+(1-\eta_4)r_1+\eta(1-\eta_4)r_0,\end{aligned}$$

其中:

$$\begin{aligned}r_1=&\frac{1}{\lambda_{\min}}(\bar{V}_0+(\eta-1)\bar{V}_0+(1-\eta_2)u^{\mathrm{T}}(0)u(0)+\\&(1-\eta_3)w^{\mathrm{T}}(0)w(0)+(1-\eta_4)r_0).\end{aligned}$$

依此递推可得$V(k)$满足

$$\begin{aligned}&V(k)\leqslant\\&\eta^k\bar{V}_0+v(k)+f(k)+\\&(1-\eta_3)\sum_{i=0}^{k-1}\eta^{k-i-1}w^{\mathrm{T}}(i)w(i)\leqslant\\&\eta^k\bar{V}_0+\frac{1-\eta_3}{1-\eta}\|w\|_\infty^2+v(k)+f(k),\end{aligned}$$

其中:

$$\begin{aligned}v(k)=&(1-\eta_2)(\eta^{k-1}u^{\mathrm{T}}(0)u(0)+\\&\eta^{k-2}u^{\mathrm{T}}(1)u(1)+\cdots+\\&u^{\mathrm{T}}(k-1)u(k-1)),\end{aligned}$$

$$f(k)=(1-\eta_4)(\eta^{k-1}r_0+\eta^{k-2}r_1+\cdots+r_{k-1}),$$

$$r_i=\frac{1}{\lambda_{\min}}(\eta^i\bar{V}_0+p(i)+v(i)+f(i)).$$

证毕.

5　仿真

本节针对系统(1)开环稳定和不稳定的情况, 分别进行了仿真研究, 验证了定理1、推论1以及推论2所提出方法的有效性.

5.1　稳定线性离散时间系统可达集估计

系统(1)中相应的参数矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}1&1\\-0.5&0\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}0\\0.1\end{bmatrix},\ D=\begin{bmatrix}0\\0.1\end{bmatrix}.$$

不确定性矩阵$\Delta A(k)$由如下参数矩阵描述:

$$M=\begin{bmatrix}0.1&0\\0&0.1\end{bmatrix},N=\begin{bmatrix}0&1\\0.1&0\end{bmatrix},$$

$$\varGamma(k)=\begin{bmatrix}\sin k&0\\0&\sin(2k)\end{bmatrix}.$$

显然, 上述参数构成的系统是稳定的.

给定系统控制输入$u=0.005$, 设未知扰动上界$\|w\|_\infty=0.1$, 由式(25)可得$k_1=1$, $k_2=0.05$和$k_3=20$. 采用逐点搜索法在$0<\eta<1$范围内搜索η的最优取值, 如图1所示.

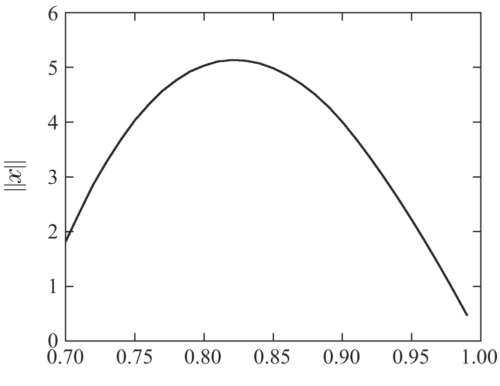

图 1　逐点搜索法轨迹

Fig. 1　The trajectory of point by point search

显然$\eta=0.83$时, $\|x\|_\infty=0.1374$到达极小值. 由定理1可以求解得到

$$\epsilon=2.3328,\ \mathrm{tr}(P)=30.111,$$

$$\eta_2 = 0.0002,\ \eta_3 = 0.1738,$$

$$P = \begin{bmatrix} 10.3550 & 7.2530 \\ 7.2530 & 19.7560 \end{bmatrix}.$$

根据以上参数及定理1, 建立离散时间系统(13), 得到离散时间系统可达集轨迹如图2所示. 该图描述了离散时间系统状态可达集随时间的变化及系统状态的运行轨迹. 可以看出, 系统运行20步后, 状态可达集边界趋于稳定, 且系统状态轨迹始终保持在系统时变可达集区域内.

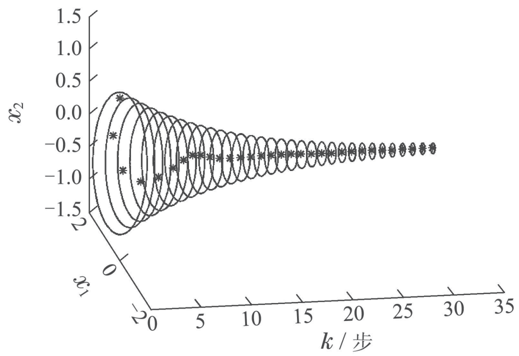

图 2 离散时间系统状态及可达集估计

Fig. 2 The state and reachable set estimation of the discrete-time system

为了进一步说明基于定理1提出的可达集估计方法的优越性, 作者将该方法与文献[23]提出的方法进行对比, 得到的结果如图3所示. 可以看出, 依据文献[23]所提方法得到的可达集估计范围, 包含了本文方法在各个时刻得到的可达集估计范围. 显然, 本文提出的方法, 保守性更小. 且本文得到的可达集估计范围, 是随时间变化的, 进一步降低了系统状态可达集估计的保守性.

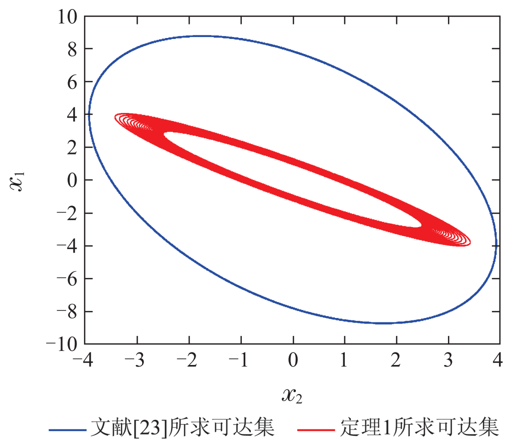

图 3 可达集估计范围比较

Fig. 3 A comparison of the reachable set estimation

注 3 可以采用邻域平面网格搜索法验证所估计优化权重的有效性, 如图4所示.

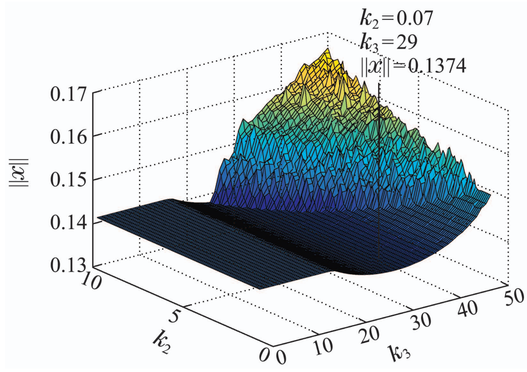

图 4 邻域平面网格搜索法轨迹

Fig. 4 The trajectory of planar grid search

取曲面最低点得到最优优化权重$k_1=1$, $k_2=0.07$, $k_3=29$, 对比可知采用注2所提出的估计方法得到的优化权重较为准确.

5.2 闭环稳定系统的可达集估计

采用文献[24]提出的车辆横向运动模型, 验证第4.1节的方法. 其状态空间表达式为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\dfrac{C_{\rm r}+C_{\rm f}}{mv} & \dfrac{C_{\rm r}l_{\rm r}-C_{\rm f}l_{\rm f}}{mv^2}-1 \\ \dfrac{C_{\rm r}l_{\rm r}-C_{\rm f}l_{\rm f}}{J} & -\dfrac{C_{\rm r}l_{\rm r}^2+C_{\rm f}l_{\rm f}^2}{Jv} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \dfrac{C_{\rm f}}{mv} \\ \dfrac{C_{\rm f}l_{\rm f}}{J} \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{mv} \\ \dfrac{l_{\rm w}}{J} \end{bmatrix} w,$$

其中状态向量$x=[\delta(k)\ \ \dot{\psi}(k)]^{\rm T}$, 各分量分别为车辆侧滑角和偏向角速率.

具体参数选取参照文献[24], 如表1所示.

表 1 系统参数

Table 1 System parameters

系统参数	参数数值
前轴距离$l_{\rm f}$/m	1
后轴距离$l_{\rm r}$/m	1.46
风动距离$l_{\rm w}$/m	0.4
前转向刚度$C_{\rm f}$/(N · rad^{-1})	4.16×10^4
后转向刚度$C_{\rm r}$/(N · rad^{-1})	4.713×10^4
质量m/kg	991
惯性矩J/(kg · m^2)	1574
放大器增益K_τ/(Nm · V^{-1})	8.0×10^{-2}
行驶速度v/(km · h^{-1})	100

对车辆横向模型进行, 仿真采样周期设置为$\mathrm{d}t=0.1$ s, 得到系统参数矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 0.9105 & -0.0997 \\ 1.7287 & 0.9097 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.4198 \\ 2.6429 \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} 1.01\times10^{-6} \\ 2.54\times10^{-5} \end{bmatrix}.$$

参数不确定矩阵$\Delta A(k)$由如下参数矩阵描述:

$$M=\begin{bmatrix}0.01 & 0.1\\ 0 & 0.01\end{bmatrix},\ N=\begin{bmatrix}0 & 0.1\\ 0.01 & 0\end{bmatrix},$$

$$\Gamma(k)=\begin{bmatrix}\sin k & 0\\ 0 & \sin(2k)\end{bmatrix}.$$

虽然上述系统的开环动态不稳定, 但可设计控制器使得系统稳定, 设状态反馈增益矩阵如下: $K=[-0.6\ \ -0.4]$.

给定系统控制输入$u=0.05$, 设未知扰动上界$\|w\|_\infty=0.1$, 由式(25)可得$k_1=1$, $k_2=0.5$和$k_3=2$. 采用逐点搜索法得到$\eta=0.85$, 由推论1可以求解得到

$$\epsilon=1.6360,\ \mathrm{tr}(P)=1.5920,\ \eta_2=0.0002,$$

$$\eta_3=0.9990,\ P=\begin{bmatrix}1.4515 & -0.0652\\ -0.0652 & 0.1405\end{bmatrix}.$$

图5描述了状态反馈离散时间系统状态可达集随时间的变化及系统状态的运行轨迹.

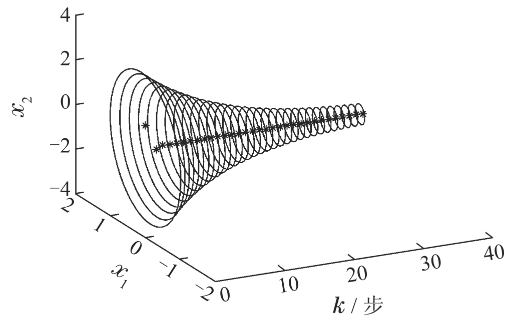

图 5 状态反馈离散时间系统状态及可达集估计

Fig. 5 The state and reachable set estimation of the state feedback discrete-time system

可以看出, 原系统经过闭环反馈实现稳定, 状态可达集边界趋于稳定, 且系统状态轨迹始终保持在系统时变可达集区域内.

5.3 不稳定系统的开环可达集估计

系统(30)中相应的参数矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0.55\\ -0.23 & 0\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}0\\ 0.1\end{bmatrix},D=\begin{bmatrix}0\\ 0.1\end{bmatrix}.$$

不确定性矩阵$\Delta A(k)$由如下参数矩阵描述:

$$M=\begin{bmatrix}0.1 & 0\\ 0 & 0.1\end{bmatrix},\ N=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0.1 & 0\end{bmatrix},$$

$$\Gamma(k)=\begin{bmatrix}\sin k & 0\\ 0 & \sin(2k)\end{bmatrix}.$$

显然, 上述参数构成的系统不稳定. 设状态反馈增益矩阵如下: $K=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0.24 & 0\end{bmatrix}$.

给定系统控制输入$u=0.05$, 设未知扰动上界$\|w\|_\infty=1$, 类比式(25)可得$k_1=1$, $k_2=0.05$和$k_3=20$, $k_4=1$. 采用逐点搜索法得到$\eta=0.97$, 由推论2可以求解得到

$$\epsilon=2.8497,\ \mathrm{tr}(P)=13.5794,$$

$$\eta_2=0.0030,\ \eta_3=0.7475,\ \eta_4=0.0006,$$

$$P=\begin{bmatrix}4.8306 & 1.8089\\ 1.8089 & 8.7488\end{bmatrix}.$$

根据以上参数及推论2, 建立离散时间系统(30), 得到变量$f(k)$的轨迹如图6所示. 该图表征了不稳定离散时间系统前一时刻可达集的估计数值对后续估计的影响. 可以看出, $f(k)$对不稳定系统的影响随时间变化, 逐渐累积, 呈现近似指数增长.

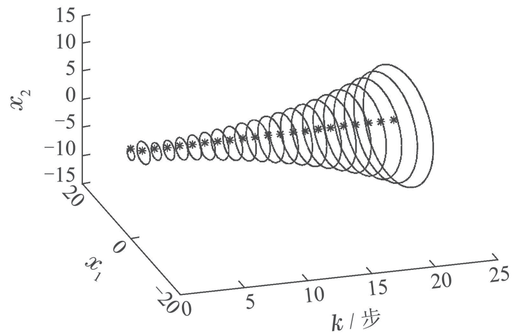

图 6 不稳定离散时间系统状态前馈f的轨迹

Fig. 6 The trajectory of variable f in the unstable discrete-time system

不稳定离散时间系统可达集轨迹如图7所示. 该图描述了离散时间系统状态可达集的短时间变化, 及系统状态的运行轨迹. 可以看出, 由于线性离散时间系统不稳定,变量$f(k)$对系统的影响逐渐增大, 经过数次迭代之后, $f(k)$对系统状态的影响逐渐起主导作用, 且主导作用不断增强, 不稳定系统可达集逐渐跟随$f(k)$的变化近似呈指数发散.

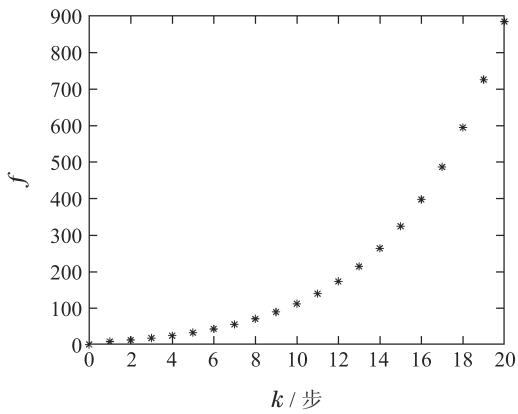

图 7 不稳定离散时间系统状态及可达集估计

Fig. 7 The state and reachable set estimation of the unstable discrete-time system

6 结论

本文针对线性不确定系统提出了一种新的可达集估计方法. 同时考虑已知输入信号和未知有界扰动, 对线性离散时间系统状态可达集进行了研究. 通过分析动态系统的李雅普诺夫函数, 本文将可达集估计问题转化为LMI优化问题, 并用椭球集形式表述了初始状态未知的动态系统实时可达集范围. 本文进一步分析了系统开环不稳定情况下系统状态可达集的估计问题, 估计了控制律已知和未知两种情况的可达集范围. 最后通过数值算例仿真, 验证了所提方法对稳定离散时间系统的有效性, 并通过将本文提出方法与文献[23]所提方法进行对比, 证明了本文方法的优越性; 采用车辆横向运动模型及数值算例仿真, 验证了所提方法对不稳定线性离散时间系统的有效性. 后续将该可达集估计方法推广到时滞系统、广义系统中, 扩大应用范围.

参考文献:

[1] DURIEU C, WALTER E, POLYAK B. Multi-input multi-output ellipsoidal state bounding. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2001, 111(2): 273 – 303.

[2] LYQEROS J, TOMLIN C, SASTRY S. Controllers for reachability specifications for hybrid systems. *Automatica*, 1999, 35(3): 349 – 370.

[3] CAO Kai, HUANG Xiaoxiao, YU Yun, et al. Modeling method based on reachable set for safety path in autonomous vehicle obstacle avoidance. *Journal of System Simulation*, 2016, 28(3): 526 – 533.
(曹凯, 黄肖肖, 于云, 等. 自主车辆避障安全路径的可达集建模. 系统仿真学报, 2016, 28(3): 526 – 533.)

[4] KIM Y, GU D, POSTLETHWAITE I. Real-time path planning with limited information for autonomous unmanned air vehicles. *Automatica*, 2008, 44(3): 696 – 712.

[5] LIU Ying, DU Guangxun, QUAN Quan, et al. Reachability calculation for aircraft maneuver using Hamilton-Jacobi function. *Acta Automatica Sinica*, 2016, 42(3): 347 – 357.
(刘瑛, 杜光勋, 全权, 等. 基于Hamilton-Jacobi方程的飞行器机动动作可达集分析. 自动化学报, 2016, 42(3): 347 – 357.)

[6] ZHANG Miaomiao, XIE Jianying. Reachability analysis study of switched continuous system. *Journal of Shanghai JiaoTong University*, 2000, 34(12): 1641 – 1644.
(张苗苗, 谢剑英. 切换连续系统的可达性分析. 上海交通大学学报, 2000, 34(12): 1641 – 1644.)

[7] WANG Chao, ZHANG Xiusheng, QIN Weiwei, et al. Tube-reachable set-based robust model predictive control with adaptive disturbances boundaries. *Control Theory & Applications*, 2014, 31(1): 11 – 18.
(王超, 张胜修, 秦伟伟, 等. 具有自适应噪声边界的Tube可达集鲁棒预测控制. 控制理论与应用, 2014, 31(1): 11 – 18.)

[8] SONG Shasha, ZHAO Zhonggai, LIU Fei. Extended set membership filtering method for process with bounded-mismatch parameters. *Control Theory & Applications*, 2017, 34(5): 648 – 651.
(宋莎莎, 赵忠盖, 刘飞. 模型参数失配有界下的扩展集员估计方法. 控制理论与应用, 2017, 34(5): 648 – 651.)

[9] SHAO Lizhen, ZHAO Fangyuan, HU Guangda. A numerical method for reachable sets of linear control systems. *Control and Decision*, 2017, 32(3): 541 – 546.
(邵立珍, 赵方园, 胡广大. 一种求解线性控制系统可达集的数值方法. 控制与决策, 2017, 32(3): 541 – 546.)

[10] PHAM T N, NAHAVANDI S, TRINH H, et al. Decentralized bounded input bounded output stabilization of perturbed interconnected time-delay power systems with energy storages. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, 2017, 93(1): 51 – 64.

[11] FENG Z G, ZHENG W X. Improved reachable set estimation of discrete-time systems with time-varying delay. *Optimal Control Applications & Methods*, 2017, 38(6): 1081 – 1090.

[12] LORENZ T. A viability theorem for set-valued states in a Hilbert space. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2018, 457(2): 1502 – 1567.

[13] CHEN Y, LAM J. Estimation and synthesis of reachable set for discrete-time periodic systems. *Optimal Control Applications & Methods*, 2016, 37(5): 885 – 901.

[14] XIANG W M, TRAN H D, JOHNSON T T. Output reachable set estimation for switched linear systems and its application in safety verification. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, 62(10): 5380 – 5387.

[15] ZHANG L X, ZHUANG S L, BRAATZ R D. Switched model predictive control of switched linear systems: Feasibility, stability and robustness. *Automatica*, 2016, 67(1): 8 – 21.

[16] LI J R, FENG Z G, ZHANG C Z. Reachable set estimation for discrete-time singular systems reachable set estimation for singular systems. *Asian Journal of Control*, 2017, 19(5): 1862 – 1870.

[17] KOSTOUSOVA E K. State estimation for dynamic systems via parallelotopes optimization and parallel computations. *Optimization Methods and Software*, 1998, 9(4): 269 – 306.

[18] ZHANG B Y, LAM J, XU S Y. Relaxed results on reachable set estimation of time-delay systems with bounded peak inputs. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2016, 26(9): 1994 – 2007.

[19] ZUO Z Q, WANG Z Q, CHEN Y P, et al. A non-ellipsoidal reachable set estimation for uncertain neural networks with time-varying delay. *Communications in Nonlinear Science & Numerical Simulation*, 2014, 19(4): 1097 – 1106.

[20] MAIGA M, RAMDANI N, TRAV-MASSUYES L, et al. A comprehensive method for reachability analysis of uncertain nonlinear hybrid systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2016, 61(9): 2341 – 2356.

[21] STEPHEN B, LAURENT E G, ERIC F, et al. Linear matrix inequalities in system and control theory. *Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM)*, 1994.

[22] WANG Y Y, XIE L H, DESOUZA C E. Robust control of a class of uncertain nonlinear systems. *Systems & Control Letters*, 1992, 19(2): 139 – 149.

[23] SUMMERS D. Lyapunov approximation of reachable sets for uncertain linear-systems. *International Journal of Control*, 1985, 41(5): 1235 – 1243.

[24] MAMMAR S, KOENIG D. Vehicle handling improvement by active steering. *Vehicle System Dynamics*, 2002, 38(3): 211 – 242.

作者简介:

张值豪 博士研究生, 主要研究方向为可达集估计及其应用, E-mail: zhangzh20038@163.com;

韩渭辛 副教授, 主要研究方向为观测器设计与故障诊断技术, E-mail: hanweixin2009@163.com;

沈 毅 教授, 博士生导师, 主要研究方向为故障诊断、飞行器控制、超声信号处理, E-mail: yishen_hit@126.com;

王振华 副教授, 硕士生导师, 主要研究方向为故障诊断与容错控制技术, E-mail: zhenhua.wang@hit.edu.cn.