

## 集装箱装卸摆动最优控制快速数值求解算法

刘平<sup>1†</sup>, 李国栋<sup>2</sup>, 杨金凤<sup>3</sup>, 刘兴高<sup>4</sup>

(1. 重庆邮电大学 工业物联网与网络化控制教育部重点实验室 自动化学院, 重庆 400065;

2. 中国电子科技集团公司电子科学研究院, 北京 100041; 3. 重庆建筑工程职业学院 轨道与机电工程系, 重庆 400072;

4. 浙江大学 工业控制技术国家重点实验室 控制科学与工程学院, 浙江 杭州 310027)

**摘要:** 为了实现起重机集装箱摆动最优控制, 提出一种基于控制向量参数化(CVP)方法的最优控制问题快速求解算法. 首先, 建立了以摆动能量最小为目标的集装箱装卸最优控制数学模型. 其次, 采用光滑化惩罚函数路径约束处理方法降低了模型求解难度. 进一步, 针对控制向量参数化方法微分方程组求解耗时难题, 结合网格划分提出改进四阶Runge-Kutta方法的快速CVP算法加快了最优控制问题求解速度. 仿真测试针对不同位置的集装箱装卸任务进行. 数值测试结果显示, 相较于其他变步长求解方法, 改进方法在得到相近求解精度解的同时, 求解耗时明显减少, 表明本文方法在集装箱装卸最优控制方面的应用价值.

**关键词:** 集装箱装卸; 最优控制; 控制向量参数化; 快速求解

**引用格式:** 刘平, 李国栋, 杨金凤, 等. 集装箱装卸摆动最优控制快速数值求解算法. 控制理论与应用, 2019, 36(8): 1275 – 1282

DOI: 10.7641/CTA.2018.80352

## Fast optimal control numerical approach for the swing control of container load

LIU Ping<sup>1†</sup>, LI Guo-dong<sup>2</sup>, YANG Jin-feng<sup>3</sup>, LIU Xing-gao<sup>4</sup>

(1. Key Lab of Industrial Wireless Network and Networked Control, College of Automation, Chongqing University of Posts and Telecommunications, Chongqing 400065, China;

2. China Academy of Electronics and Information Technology, Beijing 100041, China;

3. Department of Track and Electrical Engineering, Chongqing Jianzhu College, Chongqing 400072, China;

4. State Key Laboratory of Industry Control Technology, College of Control Science & Engineering, Zhejiang University, Hangzhou Zhejiang 310027, China)

**Abstract:** To achieve the optimal control for the container's swing of crane, a fast calculation algorithm for optimal control problems based on control vector parameterization (CVP) is proposed in this paper. Firstly, an optimal control mathematical model with minimum the swing energy of container load is developed. Next, the smoothing penalty method is employed to handle the path constraints so as to reduce the solving difficulty of the optimal control model. Furthermore, to tackle with the time-consuming issue of differential equations, an adaptive fast 4-th order Runge-Kutta method, which combines with grid subdivision, is proposed to accelerate the solving efficiency of optimal control problems. Numerical tests are carried out on container load tasks with different starting positions. Simulation results show that the proposed method is able to obtain similar solutions, while the computation time is obviously reduced when compared with variable step algorithms, revealing the application value for container load optimal control.

**Key words:** container load; optimal control; control vector parameterization; fast calculation

**Citation:** LIU Ping, LI Guodong, YANG Jinfeng, et al. Fast optimal control numerical approach for the swing control of container load. *Control Theory & Applications*, 2019, 36(8): 1275 – 1282

收稿日期: 2018-05-14; 录用日期: 2018-10-24.

†通信作者. E-mail: liuping\_cqupt@cqupt.edu.cn.

本文责任编辑: 方勇纯.

国家自然科学基金项目(61803060), 重庆市教委科学技术研究项目(KJQN201800635)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (61803060) and the Science and Technology Research Program of Chongqing Municipal Education Commission (KJQN201800635).

## 1 引言

集装箱装卸对于港口运行和海洋运输至关重要,而起重机则是必不可少的装备.当前,海洋工程自动化的不断发展<sup>[1]</sup>,对集装箱起重机的控制水平提出了更高的要求.为了提升起重机在集装箱装卸上的效率、安全性和稳定性,国内外学者开展了广泛的研究.文献[2]研究了有效载荷桥式起重机的动力学模型,并设计了控制方案用于抑制有效载荷的摆动和扭曲.文献[3]针对欠驱动桥式起重机设计了连续滑模控制策略,有效提升了起重机的控制品质.为了提升龙门起重机的效率,文献[4]提出了时间最优平面控制方案,使载荷从初始静止位置传递到最终静止位置的过渡时间最短.

近几年,为了进一步提升起重机在现代海洋运输中的作用,文献[5]对船载起重机母船集装箱装卸进行了滑模控制器的设计;文献[1]则针对欠驱动船载起重机提出了一种新颖的非线性稳定控制策略,并首次实现了闭环控制方案,丰富了船载起重机的非线性控制理论.在单桥式起重机研究的基础上,文献[6]研究了双桥式起重机系统(dual overhead crane system, DOCS),并进行了DOCS系统建模和控制方案设计,进一步推动了桥式起重机的发展.此外,诸多新颖的起重机模型及相关控制理论<sup>[7-8]</sup>也促进了起重机对集装箱装卸控制和应用水平的发展.

在集装箱装卸过程中,集装箱到达指定位置时由于起重机的加减速和负载提升动作以及风、摩擦引起的扰动等所产生的荷载残留摆动也随之增大,对搬运精度和速度都造成了一定的影响,也增加了事故发生的可能性.随着集装箱装卸高效率需求的提升,迫切需要桥式起重机实现自动控制,以解决对操作员经验的过分依赖性,从而大幅度地提高工作效率<sup>[9]</sup>.其中,起重机自动控制系统的一个核心问题就是负载的防摆控制<sup>[9-10]</sup>,国内外学者都在该领域开展了研究.针对桥式起重机,文献[11]进行了精准定位在线轨迹规划设计,很好地控制了起重机摆动过程的误差.文献[12]基于非线性动力学理论提出了一种自适应防摆控制策略用于具有双摆效应和不确定参数的起重机系统,实验结果显示了控制器优良的准确性和稳定性.针对桥式起重机荷载的残留摆动问题,文献[13]基于S型曲线轨道生成方法对摆动进行了控制,测试结果显示了该方法对摆动具有很好的抑制作用.近年来,采用最优规划控制方法进行起重机控制得到了诸多学者的重视<sup>[14-17]</sup>,以摆动最小为目标的最优控制方法也逐步成为起重机防摆控制研究的一个重要方向.

集装箱装卸摆动最优控制的一个核心问题是最优控制问题的求解,在当前主流的最优控制问题求解算法中,控制向量参数化(control vector parameterization, CVP)方法,因其具有求解精度高、离散化后的非

线性规划(nonlinear programming, NLP)问题规模较小等优点,受到了众多学者的青睐<sup>[17-19]</sup>,在诸多工程领域得到了应用.然而,CVP方法离散化后的时间网格通常人为设定并在优化过程中不会改变.为了得到高精度的最优控制问题数值解,就需要将时间网格划分得很细,但这会大大增加微分方程组的数量和NLP问题的维数,进而增加计算时间<sup>[17]</sup>.如何有效解决CVP方法逼近精度和计算时间之间的矛盾,已经成为当前国内外众多学者探索的课题<sup>[20-21]</sup>.为了解决港口集装箱装卸摆动最优控制所面临的快速求解难题,本文结合传统CVP方法提出基于微分方程组快速求解的控制向量参数化最优控制算法研究.首先,根据拉格朗日力学方程分析建立了集装箱装卸摆动最优控制数学模型;其次,对得到的数学模型进行控制向量参数化,采用能够减少计算消耗的路径约束和终端约束处理方法降低模型求解难度;进一步,针对CVP方法求解中非常耗时的微分方程组求解部分,提出了一种改进的Runge-Kutta快速求解方法;最后进行数值仿真测试验证所提方法的有效性.

## 2 数学模型

考虑图1所示的港口集装箱装卸系统,集装箱的装卸通过起重机水平和垂直方向的电机牵引实现,其简化运动示意图如图2所示.图2中,起重机的质量是 $M$ , $x_M$ 是起重机的水平位置, $l$ 是缆绳的长度,集装箱的质量是 $m$ , $(x_m, y_m)$ 是集装箱的水平 and 垂直位置, $\theta$ 是集装箱的摆动角.

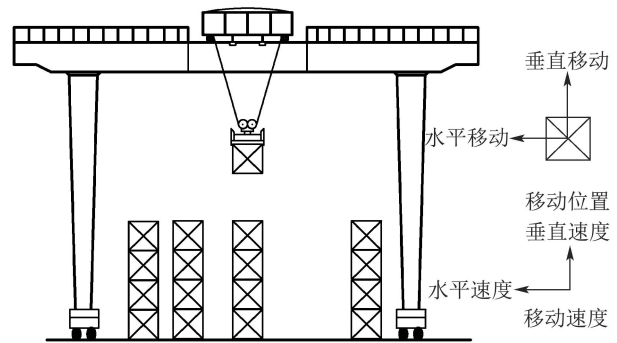


图1 集装箱装卸示意图

Fig. 1 Sketch map of container load

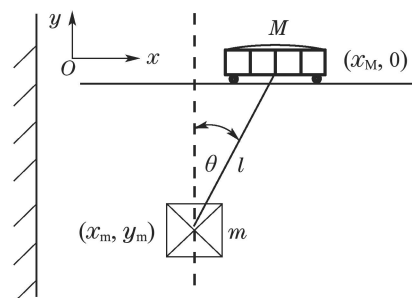


图2 集装箱起重机运动示意图

Fig. 2 Motion diagram of container crane

根据拉格朗日力学方程分析可以得到集装箱运动模型如下:

$$(J_1 r_1^2 + M + m)\dot{x}_M + ml(\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) + m(\ddot{l} \sin \theta + \dot{l} \dot{\theta} \cos \theta) = T_1 / r_1, \quad (1)$$

$$l\ddot{\theta} + 2\dot{l}\dot{\theta} + g \sin \theta + \ddot{x}_M \cos \theta = 0, \quad (2)$$

$$(J_2 r_2^2 + m)\ddot{l} + m\ddot{x}_M \sin \theta - ml\dot{\theta}^2 - mg \cos \theta = -T_2 / r_2, \quad (3)$$

其中:  $J_1, J_2$  是起重机和集装箱的等效转动惯量,  $T_1, T_2$  是起重机水平和垂直力矩,  $r_1, r_2$  分别是起重机和负载的电机轴滚轴半径,  $g$  是重力加速度. 考虑到式(2)中集装箱和起重机的质量对方程没有直接影响, 本文选取起重机的水平加速度和垂直提升加速度作为控制变量. 从而, 上述模型可以用以下的非线性状态方程简化表示:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_4(t), \dot{x}_2(t) = x_5(t), \\ \dot{x}_3(t) = x_6(t), \dot{x}_4(t) = u_1(t), \dot{x}_5(t) = u_2(t), \\ \dot{x}_6(t) = -(u_1(t) \cos x_3(t) + g \sin x_3(t) + 2x_5(t)x_6(t))/x_2(t), \end{cases} \quad (4)$$

其中: 状态变量为  $\mathbf{x}(t) := [x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t) \ x_4(t) \ x_5(t) \ x_6(t)]^T = [x_M \ l \ \theta \ \dot{x}_M \ \dot{l} \ \dot{\theta}]^T$ , 控制变量为  $\mathbf{u}(t) := [u_1(t) \ u_2(t)]^T = [\ddot{x}_M \ \ddot{l}]^T$ , 初始值定义为  $\mathbf{x}(t_0) := \mathbf{x}^0$ . 本文最优控制的目标是使集装箱在装卸过程中摆动能量最小, 因此, 该最优控制问题的目标函数可表示为

$$\min_{\mathbf{u}(t)} J(\mathbf{u}(t)) = \int_0^{t_f} (x_3^2(t) + x_6^2(t)) dt. \quad (5)$$

同时, 状态变量和控制变量存在各种约束限制如下:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t_f) = [x_1(t_f) \ x_2(t_f) \ 0 \ x_3(t_f) \ 0 \ 0]^T, \\ x_{i,\min} \leq x_i(t) \leq x_{i,\max}, \ i = 1, 2, \dots, 6, \\ u_{j,\min} \leq u_j(t) \leq u_{j,\max}, \ j = 1, 2. \end{cases} \quad (6)$$

进而, 集装箱装卸摆动最优控制问题可以表示为

**问题(P1)** 根据初始条件  $\mathbf{x}(t_0)$ , 在动态系统(4)和约束条件(6)下, 寻找最优控制变量  $\mathbf{u}^*(t)$  使得目标函数(5)的值最小.

需要注意的是, 本文方法直接对集装箱装卸过程的运动方程建立最优控制问题模型, 相较于基于Hamilton最优性条件的建模方法<sup>[22]</sup>, 不需要推导最优性条件, 降低了建模难度, 将集装箱装卸最优控制的难题转化到最优控制问题的求解上.

### 3 最优控制方法

#### 3.1 控制向量参数化

控制向量参数化方法的主要思想是将随时间连续变化的控制变量  $\mathbf{u}(t)$  用有限的参数来近似, 而状态变

量依旧保持其连续可微的形式. 针对集装箱装卸摆动最优控制问题(P1), 把时间  $[t_0, t_f]$  划分成  $N$  个子区间, 记子区间时间节点为

$$t_0 < t_1 < \dots < t_N = t_f. \quad (7)$$

在时间子区间  $[t_{k-1}, t_k]$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$  内, 将控制变量近似表示为一组参数的函数, 则问题(P1)中控制变量  $u_j(t)$  ( $j = 1, 2$ ) 的分段常量参数化为

$$u_j(t) \approx \tilde{u}_j(t) = \sum_{k=1}^N \sigma_{j,k} \chi_{[t_{k-1}, t_k)}(t), \quad (8)$$

其中:  $\sigma_{j,k}$  为控制参数,  $\chi_{[t_{k-1}, t_k)}(t)$  是分段常量函数

$$\chi_{[t_{k-1}, t_k)}(t) = \begin{cases} 1, & t \in [t_{k-1}, t_k), \\ 0, & t \notin [t_{k-1}, t_k). \end{cases} \quad (9)$$

进一步, 记第  $j$  个控制分量的参数依次为  $\sigma_{j,0}, \sigma_{j,1}, \dots, \sigma_{j,N}$ , 向量  $\boldsymbol{\sigma} := [\{\sigma_{1,0}, \sigma_{2,0}\}^T \ \dots \ \{\sigma_{1,N}, \sigma_{2,N}\}^T]^T$ . 这样控制变量  $\mathbf{u}(t)$  的边界约束就直接转换为控制参数  $\boldsymbol{\sigma}$  的边界约束, 问题(P1)就近似转化为优化控制参数  $\boldsymbol{\sigma}$  的NLP问题.

#### 问题(P2)

$$\begin{cases} \min_{\boldsymbol{\sigma}} J(\mathbf{u}(t)) = \sum_{k=1}^N \int_{t_{k-1}}^{t_k} (x_3^2(t) + x_6^2(t)) dt, \\ \text{s.t. } \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{x}(t), t), \ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0, \\ \mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}(t_N), \\ x_{i,\min} \leq x_i(t) \leq x_{i,\max}, \ i = 1, 2, \dots, 6, \\ u_{j,\min} \leq \sigma_{j,k} \leq u_{j,\max}, \ j = 1, 2, \end{cases} \quad (10)$$

其中  $\mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{x}(t), t)$  表示非线性状态方程组(4). 近似问题(P2)与原始问题(P1)的收敛性由以下定理保证(证明过程也可参阅文献[23]).

**定理 1** 设  $\mathbf{u}^*(t)$  是问题(P1)的解,  $\boldsymbol{\sigma}^*$  是分段数为  $N$  ( $N \geq 1$ ) 时问题(P2)的解,  $\tilde{\mathbf{u}}^*(t)$  是由  $\boldsymbol{\sigma}^*$  根据式(8)分段常量参数化构成的控制向量, 假设最大的时间子区间  $[t_{k-1}, t_k]$  随着  $N \rightarrow \infty$  而趋近于0, 则有

$$\lim_{N \rightarrow \infty} J(\tilde{\mathbf{u}}^*(t)) = J(\mathbf{u}^*(t)).$$

**证** 定义参数  $\delta$  ( $\delta \geq 0$ ) 可以任意选取, 假设  $\tilde{\mathbf{u}}^{\varepsilon,*}(t)$  是问题(P2)的可行解,  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\varepsilon,*}$  是根据式(8)参数化后的控制向量, 则存在一个  $\varepsilon^\wedge > 0$ , 对于  $\varepsilon \in (0, \varepsilon^\wedge)$ , 以下式子成立:

$$J(\tilde{\mathbf{u}}^{\varepsilon,*}(t)) \geq J(\tilde{\mathbf{u}}^*(t)) - \delta. \quad (11)$$

假设  $\mathbf{u}^{*,N}(t)$  是问题(P1)的一个可行解, 且  $\mathbf{u}^{*,N}(t) = [\{\sigma_{1,0}^{*,N}, \sigma_{2,0}^{*,N}\}^T \ \dots \ \{\sigma_{1,N}^{*,N}, \sigma_{2,N}^{*,N}\}^T]^T$ , 则当  $N \rightarrow \infty$  时, 可以得到

$$\lim_{N \rightarrow \infty} J(\mathbf{u}^{*,N}(t)) = J(\mathbf{u}^*(t)). \quad (12)$$

分析可知,  $\mathbf{u}^{*,N}(t)$  是问题(P2)的可行解, 在一定的

分段数 $N_1(N_1 \leq N)$ 下,以下式子成立:

$$J(\tilde{\mathbf{u}}^{\varepsilon,*}(t)) \leq J(\mathbf{u}^{*,N_1}(t)), N \geq N_1. \quad (13)$$

联立式(11)和式(13)可以得到在 $\varepsilon \in (0, \varepsilon^\wedge)$ 下,

$$J(\mathbf{u}^{*,N_1}(t)) \geq J(\tilde{\mathbf{u}}^{\varepsilon,*}(t)) \geq J(\tilde{\mathbf{u}}^*(t)) - \delta, N \geq N_1. \quad (14)$$

整理式(14)可以得到

$$J(\mathbf{u}^{*,N_1}(t)) + \delta \geq J(\tilde{\mathbf{u}}^*(t)), N \geq N_1. \quad (15)$$

当 $N \rightarrow \infty$ 和 $N_1 \rightarrow \infty$ 时,对式(15)左右取极限得到

$$\lim_{N \rightarrow \infty} J(\tilde{\mathbf{u}}^*(t)) \leq \lim_{N_1 \rightarrow \infty} J(\mathbf{u}^{*,N_1}(t)) + \delta = J(\mathbf{u}^*(t)) + \delta. \quad (16)$$

又因为

$$J(\mathbf{u}^*(t)) \leq J(\tilde{\mathbf{u}}^*(t)), \quad (17)$$

则联立式(16)和式(17)可以得到,当 $N \rightarrow \infty$ 时,

$$J(\mathbf{u}^*(t)) \leq \lim_{N \rightarrow \infty} J(\tilde{\mathbf{u}}^*(t)) \leq J(\mathbf{u}^*(t)) + \delta. \quad (18)$$

因为参数 $\delta(\delta \geq 0)$ 可以任意选取,因此可得

$$\lim_{N \rightarrow \infty} J(\tilde{\mathbf{u}}^*(t)) = J(\mathbf{u}^*(t)).$$

### 3.2 约束处理

经过控制向量参数化后,问题(P2)是一个含有不等式路径约束和终端等式约束的复杂非线性规划问题.然而,路径约束条件处理一直是CVP方法的难题.为了对路径约束进行转化,本文首先引入max函数,将不等式路径约束 $G_r[t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}] \leq 0$ 等价转化为

$$\max\{G_r[t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}], 0\} = 0, r = 1, \dots, 12. \quad (19)$$

进一步,引入如下光滑化函数:

$$p_1\{G_r[t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}], \varepsilon\} = (G_r[t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}] + \sqrt{G_r[t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}]^2 + 4\varepsilon^2})/2, \quad (20)$$

其中: $G_r[t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}] \leq 0, r = 1, 2, \dots, 12$ 表示问题(P2)的12个路径约束, $\varepsilon$ 称为光滑化因子.则max函数与光滑化函数之间的关系可以由定理2得到.

**定理 2** 对于不等式路径约束 $\max\{G_r[t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}], 0\}, r = 1, 2, \dots, 12$ ,当光滑化因子 $\varepsilon \rightarrow 0^+$ 时,

$$\max\{G_r[t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}], 0\} \approx p_1\{G_r[t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}], \varepsilon\} = (G_r[t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}] + \sqrt{G_r[t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}]^2 + 4\varepsilon^2})/2. \quad (21)$$

**证** 无论路径约束是否满足 $G_r[t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}] \leq 0$ ,都存在 $\max\{G_r[t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}], 0\} \geq 0$ ,当 $G_r[t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}] < 0$ 时,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \{(G_r[t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}] + \sqrt{G_r[t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}]^2 + 4\varepsilon^2})/2\} = 0. \quad (22)$$

当 $G_r[t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}] \geq 0$ 时,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \{(G_r[t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}] + \sqrt{G_r[t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}]^2 + 4\varepsilon^2})/2\} = G_r[t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}]. \quad (23)$$

从而,式(21)得证. 证毕.

通过光滑化函数,首先引入惩罚因子 $\rho_1$ 对终端约束进行惩罚处理并增广进目标函数中;同时,结合文献[14,24]的罚函数法,引入惩罚因子 $\rho_2$ 将式(20)一并增广进目标函数中.这样问题(P2)就转化为一个只含边界约束的非线性优化问题.

### 问题(P3)

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{\sigma} J = \sum_{k=1}^N \int_{t_{k-1}}^{t_k} (x_3^2(t) + x_6^2(t))dt + \\ \rho_1 \sum_{i=1}^6 (x_i(t_f) - x_i(t_N))^2 + \\ \rho_2 \sum_{i=1}^6 \sum_{k=1}^N (\int_{t_{k-1}}^{t_k} ((x_i(t) - x_{i,\max}) + \\ \sqrt{(x_i(t) - x_{i,\max})^2 + 4\varepsilon^2})dt + \\ \int_{t_{k-1}}^{t_k} (-x_i(t) + x_{i,\min} + \\ \sqrt{(-x_i(t) + x_{i,\min})^2 + 4\varepsilon^2})dt)/2, \\ \text{s.t. } \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\sigma, \mathbf{x}(t), t), \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0, \\ u_{j,\min} \leq \sigma_{j,k} \leq u_{j,\max}, j = 1, 2, \end{array} \right. \quad (24)$$

其中: $\rho_1$ 是终端约束惩罚因子( $\rho_1 > 0$ ), $\rho_2$ 是路径约束惩罚因子( $\rho_2 > 0$ ).

设 $\zeta$ 是问题(P3)的优化求解精度设定值,为了保证 $\zeta$ 的求解精度,本文设置路径约束处理精度至少高 $\zeta$ 一个数量级,则终端约束惩罚因子可以通过式子 $\rho_1 \geq 1/(6\sqrt{\zeta})$ 选取,路径约束惩罚因子可由 $\rho_2 \geq 10/\zeta$ 确定.在光滑化因子 $\varepsilon$ 的选择上,本文结合文献[14]提供的选取策略,采用如下式子进行选择:

$$\varepsilon = \zeta/[6(1 + \sqrt{5})(t_f - t_0)]. \quad (25)$$

### 3.3 梯度求取

问题(P3)是一个NLP问题,基于梯度的非线性优化求解方法,比如序列二次规划(sequential quadratic programming, SQP)方法、内点法等,可以用于该问题的求解.但是,由于微分方程组的存在,问题(P3)的梯度信息很难直接得到.本文给出如下定理用于梯度信息的计算.

**定理 3** 定义轨迹灵敏度方程为 $\Gamma(t) = \frac{\partial \mathbf{x}(t)}{\partial \sigma}$ , $\Phi(\mathbf{x}(t_f|\sigma), \sigma)$ 表示问题(P3)目标函数中的终端约束

项,  $L(\mathbf{x}(t|\boldsymbol{\sigma}), \boldsymbol{\sigma})$  表示积分项, 则目标函数关于控制参数  $\boldsymbol{\sigma}$  的梯度信息是

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\Gamma}}(t) = \frac{\partial \mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{x}(t), t)}{\partial \mathbf{x}} \boldsymbol{\Gamma}(t) + \frac{\partial \mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{x}(t), t)}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \\ \boldsymbol{\Gamma}(t_0) = \mathbf{0}, \end{cases} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial J(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = & \frac{\partial \Phi(\mathbf{x}(t_f|\boldsymbol{\sigma}), \boldsymbol{\sigma})}{\partial \mathbf{x}} \boldsymbol{\Gamma}(t_f) + \frac{\partial \Phi(\mathbf{x}(t_f|\boldsymbol{\sigma}), \boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \\ & \sum_{k=1}^N \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left\{ \frac{\partial L(\mathbf{x}(t|\boldsymbol{\sigma}), \boldsymbol{\sigma})}{\partial \mathbf{x}} \boldsymbol{\Gamma}(t) + \right. \\ & \left. \frac{\partial L(\mathbf{x}(t|\boldsymbol{\sigma}), \boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\} dt. \end{aligned} \quad (27)$$

证 分析可知,  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^0 + \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{x}(t), t) dt$ , 其中  $\mathbf{x}^0$  表示微分方程组  $\mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{x}(t), t)$  在  $t_0$  时刻的初值, 因此有

$$\frac{\partial \mathbf{x}(t)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial \mathbf{x}^0}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \frac{\partial \mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{x}(t), t)}{\partial \mathbf{x}} \boldsymbol{\Gamma}(t) + \frac{\partial \mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{x}(t), t)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\} dt. \quad (28)$$

式(28)对时间求导得到

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial \mathbf{x}(t)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\} = \frac{\partial \mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{x}(t), t)}{\partial \mathbf{x}} \boldsymbol{\Gamma}(t) + \frac{\partial \mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{x}(t), t)}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad (29)$$

因此,  $\boldsymbol{\Gamma}(t)$  为式(29)的解, 其中  $\boldsymbol{\Gamma}(t_0) = \frac{\partial \mathbf{x}^0}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{0}$ . 采用链式法则对目标函数求导得到梯度信息为

$$\begin{aligned} \frac{\partial J(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = & \frac{\partial \Phi(\mathbf{x}(t_f|\boldsymbol{\sigma}), \boldsymbol{\sigma})}{\partial \mathbf{x}} \boldsymbol{\Gamma}(t_f) + \frac{\partial \Phi(\mathbf{x}(t_f|\boldsymbol{\sigma}), \boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \\ & \sum_{k=1}^N \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left\{ \frac{\partial L(\mathbf{x}(t|\boldsymbol{\sigma}), \boldsymbol{\sigma})}{\partial \mathbf{x}} \boldsymbol{\Gamma}(t|\boldsymbol{\sigma}) + \right. \\ & \left. \frac{\partial L(\mathbf{x}(t|\boldsymbol{\sigma}), \boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\} dt. \end{aligned} \quad (30)$$

### 3.4 快速求解

由第3.3节可知, 在问题(P3)的求解过程中, 需要对扩大微分方程组(4)和式(26)进行反复求解, 以获取函数及梯度信息. 然而, 微分方程组的求解在CVP方法求解过程中非常耗时, 过长的耗时也降低了CVP方法在集装箱装卸最优控制方面的应用价值. 因此, 本文在显式四阶Runge-Kutta法的基础上, 针对问题(P3)中微分方程组的求解, 提出改进型快速求解方法.

首先, 定义扩大微分方程组(4)和式(26)为

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{F}[\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{x}(t), t] = \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t), \\ \boldsymbol{\Gamma}(t). \end{cases} \quad (31)$$

对每一个时间子区间  $[t_{k-1}, t_k] (k = 1, 2, \dots, N)$ , 设  $h$  为积分步长, 则求解  $\mathbf{X}(t)$  的四阶Runge-Kutta法计算公式如下:

$$\begin{cases} k_1 = \mathbf{F}[\boldsymbol{\sigma}_{k-1}, \mathbf{x}(t_{k-1}), t_{k-1}], \\ k_2 = \mathbf{F}[\boldsymbol{\sigma}_{k-1}, \mathbf{x}(t_{k-1}) + k_1 h/2, t_{k-1} + h/2], \\ k_3 = \mathbf{F}[\boldsymbol{\sigma}_{k-1}, \mathbf{x}(t_{k-1}) + k_2 h/2, t_{k-1} + h/2], \\ k_4 = \mathbf{F}[\boldsymbol{\sigma}_{k-1}, \mathbf{x}(t_{k-1}) + k_3 h/2, t_{k-1} + h], \\ \mathbf{X}(t_{k-1} + h) = \mathbf{X}(t_{k-1}) + h(k_1 + 2k_2 + \\ 2k_3 + k_4)/6, k = 1, \dots, N, \end{cases} \quad (32)$$

其中  $\boldsymbol{\sigma}_{k-1} = [\sigma_{1,k-1} \ \sigma_{2,k-1}]^T$ . 分析可知, 该Runge-Kutta法的局部截断误差为  $O(h^5)$ , 整体截断误差是  $O(h^4)$ . 针对集装箱装卸最优控制问题, 本文设定微分方程组求解的整体截断误差不低于  $10^{-5}$  的同阶无穷小, 即  $O(10^{-5})$ , 则有  $h^4 \leq 10^{-5}$ , 因而得到步长  $h$  的选择公式如下:

$$h = (t_k - t_{k-1})/Z \leq 0.1, \quad (33)$$

其中  $Z$  是一个正整数,  $Z \geq \lceil 10(t_k - t_{k-1}) \rceil$ .

基于此, 结合控制向量参数化分析上述方法的计算复杂度和空间复杂度. 假设控制时域被等间隔分成了  $N$  个子区间, 分析式(32)后可知, 在  $t \in [t_0, t_f]$  控制时域内采用上述快速计算方法求解  $\mathbf{X}(t)$  所需要循环计算节点个数为  $ZN$  个, 因而其时间复杂度为

$$T(f_1) = O(ZN). \quad (34)$$

进一步, 假设快速求解法每次计算返回值个数为  $m$  个, 根据求解  $\mathbf{X}(t)$  所需要循环计算节点数  $ZN$ , 则其空间复杂度为

$$S(f_1) = O(mZN). \quad (35)$$

## 4 数值仿真测试

状态变量和控制变量的约束条件设置如表1所示, 仿真测试在 Intel CORE i5/2.3 GHz CPU 和 DDR3/1600 MHz 8 GB 内存组成的计算机上进行.

表 1 集装箱装卸约束项参数

Table 1 Constraints parameters of container load	
约束项	约束条件
吊车水平移动速度	$-2.5 \leq \dot{x}_M \leq 2.5$ (m/s)
缆绳移动速度	$-1 \leq \dot{l} \leq 1$ (m/s)
水平控制变量	$-2.83374 \leq u_1(t) \leq 2.83374$ (m/s <sup>2</sup> )
垂直控制变量	$-0.80865 \leq u_2(t) \leq 0.71265$ (m/s <sup>2</sup> )

### 4.1 仿真测试1

测试要求在 10 s 内集装箱从位置 (0, 22) 移动到位置 (10, 14), 初始条件为  $\mathbf{x}(0) := [0 \ 22 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ , 终值约束为  $\mathbf{x}(10) := [10 \ 14 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ , 初始控制参数  $\boldsymbol{\sigma}^{(0)}$  统一设置为  $\mathbf{0}$ , 优化精度设置为  $\varsigma := 10^{-4}$ , 惩罚因子  $\rho_1$  和  $\rho_2$  根据公式分别设置为 20 和  $10^5$ , 光滑化因子

$\varepsilon$ 由式(25)确定为 $1.54 \times 10^{-6}$ ,重力加速度取 $g := 9.81$ .

表2列出了采用ODE23(二阶三级Runge-Kutta法)、ODE45(四阶五级Runge-Kutta法)、ODE113(多步Adams算法)求解器和本文快速求解方法在20和50个优化参数下结合CVP方法求解得到的优化结果.结果显示,4种方法都获得了相近的优化目标函数值.但是相比于其他3种方法,本文提出的快速求解方法在保证相近优化精度的同时,求解耗时明显减少,求解时间均控制在10 s以内,在20个优化参数化下,求解时

间平均减少78.19%,在50个优化参数化下,求解时间平均减少90.42%,显示本文方法有效提升了求解效率.图3给出了本文方法在50个优化参数下得到的集装箱装卸控制曲线,图中时间区间划分为25个子区间,控制变量采用分段常量参数化方式逼近.图4给出了图3控制曲线下的系统状态曲线图.由图3-4可知,控制变量满足边界约束条件,状态变量路径约束和终端约束均得到了很好的满足.此外,集装箱在移动过程中摆动角弧度较小,表明本文方法在集装箱摆动控制上的良好效果,如图5所示.

表 2 集装箱装卸数值优化结果

Table 2 Numerical optimization results of container load

方法	优化参数	NLP 求解器	ODE求解方法	摆动量 $J_{\min}$	计算时间/s	
传统CVP	20	FMINCON	ODE23	0.0273	25.07	
	50			0.0256	89.20	
	20	FMINCON	ODE45	0.0276	21.11	
	50			0.0257	75.41	
	本文方法	20	FMINCON	本文快速求解方法	0.0272	4.65
		50			0.0254	7.83

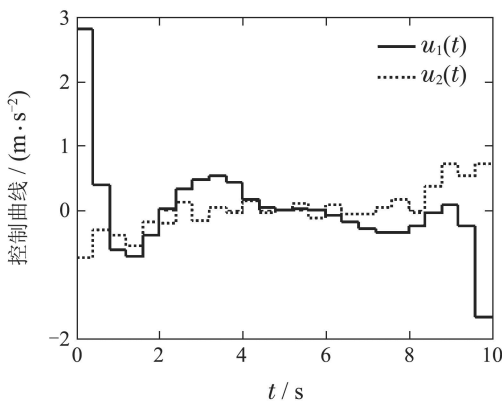


图 3 集装箱装卸摆动最优控制曲线

Fig. 3 Optimal control curves of container load

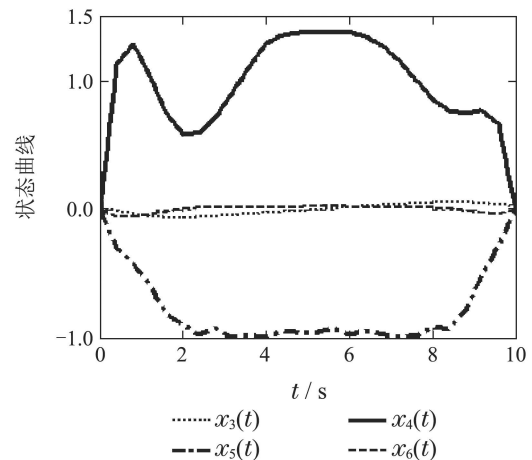


图 5 集装箱装卸摆动状态曲线( $x_3(t) \sim x_6(t)$ )

Fig. 5 Optimal state profiles of container load ( $x_3(t) \sim x_6(t)$ )

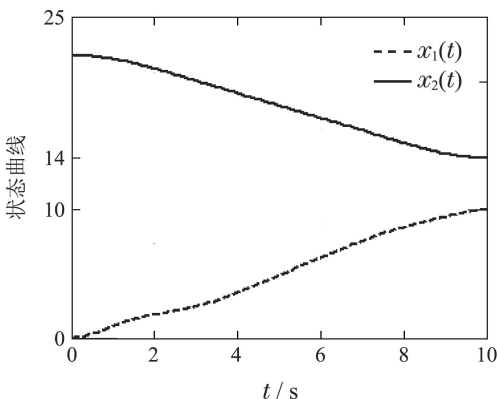


图 4 集装箱装卸摆动状态曲线( $x_1(t), x_2(t)$ )

Fig. 4 Optimal state profiles of container load ( $x_1(t), x_2(t)$ )

### 4.2 仿真测试2

为了进一步验证本文方法对集装箱装卸摆动最优控制的效果,分别对2个不同位置的集装箱装卸进行测试,装卸时间设置为10 s,初始控制参数 $\sigma^{(0)}$ 设置为0,优化参数个数选择为50个,优化精度选择为 $\varsigma := 10^{-6}$ ,惩罚因子 $\rho_1$ 和 $\rho_2$ 根据公式分别设置为20和 $10^5$ ,光滑化 $\varepsilon$ 由式(25)确定为,重力加速度取 $g := 9.81$ .

表3列出了4种方法针对不同初始位置集装箱装卸最优控制计算结果.结果显示,本文的方法将集装箱装卸的摆动量控制在较低的水平,摆动量分别为0.0270和0.0171,有效控制了集装箱在移动过程中的

摆动. 同时, 在求解效率方面, 本文方法仅需要3 s左右的求解时间, 在装卸要求的时间范围内即可完成下一

次计算, 明显优于其他3种方法, 表明了本文方法在集装箱装卸最优控制上的应用价值.

表3 不同初始位置集装箱装卸数值优化结果

Table 3 Numerical optimization results of container load with different starting positions

方法	初始位置	到达位置	优化参数个数	摆动量 $J_{\min}$	计算时间/s
CVP_ODE23	(10, 16)	(20, 20)	50	0.0269	31.95
CVP_ODE45				0.0269	38.65
CVP_ODE113				0.0269	30.36
本文方法				0.0270	3.23
CVP_ODE23	(20, 15)	(12, 12)	50	0.0171	27.52
CVP_ODE45				0.0164	154.57
CVP_ODE113				0.0171	32.56
本文方法				0.0171	3.46

## 5 结论

本文提出一种用于求解港口集装箱装卸摆动最优控制问题的控制向量参数化快速求解算法. 首先, 建立了集装箱装卸摆动最优控制数学模型, 具有良好的适用性. 其次, 结合前期研究的路径约束处理方法, 将原问题转化为只含控制变量边界约束的问题, 降低了模型求解难度. 最后, 提出改进的Runge-Kutta快速求解方法加快了CVP方法求解速度. 本文对所建立的集装箱装卸摆动最优控制系统进行了仿真测试, 并和常规方法进行了比较, 仿真结果表明改进方法能够有效地提升求解效率、减少计算时间, 显示了本文方法在起重机集装箱装卸最优控制上的潜在应用价值. 本文在建模过程中主要选取起重机的水平加速度和垂直提升加速度作为控制变量, 如何通过加速度传感器建立与速度之间的关系, 进而将本文规划得到的轨迹应用于实际实验是下一步研究工作的课题. 此外, 将快速求解方法与非均匀时间子区间划分结合并同时考虑不确定参数来进一步提升本文方法的适用性也将是本文进一步的研究工作.

## 参考文献:

- [1] SUN N, FANG Y C, CHEN H, et al. Nonlinear stabilizing control for ship-mounted cranes with ship roll and heave movements: design, analysis, and experiments. *IEEE Transactions on Systems Man & Cybernetics Systems*, 2018, 48(10): 1781 – 1793.
- [2] HUANG J, XIE X M, LIANG Z. Control of bridge cranes with distributed-mass payload dynamics. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 2014, 20(1): 481 – 486.
- [3] LU B, FANG Y C, SUN N. Continuous sliding mode control strategy for a class of nonlinear underactuated systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2018, 63(10): 3471 – 3478.
- [4] KOLAR B, RAMS H, SCHLACHER K. Time-optimal flatness based control of a gantry crane. *Control Engineering Practice*, 2017, 60: 18 – 27.
- [5] NGO Q H, HONG K S. Sliding-mode antisway control of an offshore container crane. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 2012, 17(2): 201 – 209.
- [6] LU B, FANG Y C, SUN N. Modeling and nonlinear coordination control for an underactuated dual overhead crane system. *Automatica*, 2018, 91: 244 – 255.
- [7] KIMMERLE S J, GERDTS M, HERZOG R. An optimal control problem for a rotating elastic Crane-Trolley-Load system. *IFAC-PapersOnLine*, 2018, 51(2): 272 – 277.
- [8] RAMS H, SCHOBERL M, SCHLACHER K. Optimal motion planning and energy-based control of a single mast stacker crane. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2018, 26(4): 1449 – 1457.
- [9] WANG Xiaojun, SHAO Huihe. Fuzzy logic-based anti-swing and position control for bridge cranes. *Journal of System Simulation*, 2005, 17(4): 936 – 939.  
(王晓军, 邵惠鹤. 基于模糊的桥式起重机的定位和防摆控制研究. 系统仿真学报, 2005, 17(4): 936 – 939.)
- [10] ZHONG Bin, CHENG Wenming, WU Xiao, et al. Design of the state feedback control system for the load's anti-swing of overhead crane. *Electronic Machines and Control*, 2007, 11(5): 492 – 496.  
(钟斌, 程文明, 吴晓, 等. 桥门式起重机吊重防摆状态反馈控制系统设计. 电机与控制学报, 2007, 11(5): 492 – 496.)
- [11] HE Bo, FANG Yongchun, LIU Hailiang, et al. Precise positioning online trajectory planner design and application for overhead cranes. *Control Theory & Applications*, 2016, 33(10): 1352 – 1358.  
(何博, 方勇纯, 刘海亮, 等. 桥式起重机精准定位在线轨迹规划方法设计及应用. 控制理论与应用, 2016, 33(10): 1352 – 1358.)
- [12] SUN N, WU Y M, FANG Y C, et al. Nonlinear antiswing control for crane systems with Double-Pendulum swing effects and uncertain parameters: design and experiments. *IEEE Transactions on Automation Science & Engineering*, 2018, 15(3): 1413 – 1422.
- [13] OUYANG Huimin, ZHANG Guangming, WANG Deming, et al. Optimal control for overhead cranes based on an S-shaped curve trajectory. *Journal of Vibration and Shock*, 2014, 33(23): 140 – 144.  
(欧阳慧珉, 张广明, 王德明, 等. 基于S型曲线轨道的桥式起重机最优控制. 振动与冲击, 2014, 33(23): 140 – 144.)
- [14] LIU X G, HU Y Q, FENG J H, et al. A novel penalty approach for nonlinear dynamic optimization problems with inequality path constraints. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2014, 22(2): 141 – 145.
- [15] KIMMERLE S J, GERDTS M, HERZOG R. Optimal control of an elastic crane-trolley-load system—a case study for optimal control of coupled ODE-PDE systems. *Mathematical & Computer Modelling of Dynamical Systems*, 2017, 24(2): 182 – 206.

- [16] SUN N, WU Y M, CHEN H, et al. An energy-optimal solution for transportation control of cranes with double pendulum dynamics: design and experiments. *Mechanical Systems & Signal Processing*, 2018, 102: 87 – 101.
- [17] LI G D, LIU P, LIU X G. A control parameterization approach with variable time nodes for optimal control problems. *Asian Journal of Control*, 2016, 18(3): 976 – 984.
- [18] LIANG Haiyan, REN Zhigang, XU Chao, et al. Optimal homing trajectory design for parafoil systems using sensitivity analysis approach. *Control Theory & Applications*, 2015, 32(8): 1003 – 1011. (梁海燕, 任志刚, 许超, 等. 翼伞系统最优归航轨迹设计的敏感度分析方法. 控制理论与应用, 2015, 32(8): 1003 – 1011.)
- [19] CHEN Tehuan, REN Zhigang. Control of water hammer suppression via time-scaling technique. *Control Theory & Applications*, 2018, 35(2): 198 – 206. (陈特欢, 任志刚. 流体管道水锤抑制的时间尺度变换控制. 控制理论与应用, 2018, 35(2): 198 – 206.)
- [20] BITTNER M, BRUHS P, RICHTER M, et al. An automatic mesh refinement method for aircraft trajectory optimization problems. *A-IAA Guidance, Navigation, and Control Conference*. Boston, USA: AIAA, 2013.
- [21] LIU P, LIU X G. Empirical mode decomposition-based time grid refinement optimization approach for optimal control problems. *Optimization Letters*, 2017, 11(7): 1243 – 1256.
- [22] TERASHIMA K, SHEN Y, YANO K I. Modeling and optimal control of a rotary crane using the straight transfer transformation method. *Control Engineering Practice*, 2007, 15(9): 1179 – 1192.
- [23] LOXTON R C, LIN Q, REHBOCK V, et al. Control parameterization for optimal control problems with continuous inequality constraints: new convergence results. *Numerical Algebra, Control and Optimization*, 2012, 2(3): 571 – 599.
- [24] HU Yunqing, LIU Xinggao, XUE Anke. A penalty method for solving inequality path constrained optimal control problems. *Acta Automatica Sinica*, 2013, 39(12): 1996 – 2001. (胡云卿, 刘兴高, 薛安克. 带不等式路径约束最优控制问题的惩罚函数法. 自动化学报, 2013, 39(12): 1996 – 2001.)

#### 作者简介:

**刘平** 博士, 讲师, 主要从事最优控制与动态优化、轨迹优化等方面的研究, E-mail: liuping\_cqupt@cqupt.edu.cn;

**李国栋** 博士, 工程师, 主要从事系统建模、评估与优化方面的研究, E-mail: liguodong\_008@163.com;

**杨金凤** 硕士, 讲师, 主要从事轨道交通、港口运输、交通管理与控制等方面的研究, E-mail: yjf@cqjzc.edu.cn;

**刘兴高** 博士, 教授, 博士生导师, 主要从事工业过程建模、优化与控制等方面的研究, E-mail: lxxg@zju.edu.cn.