

切换正系统的渐近稳定性、 L_1 增益及时变 H_∞ 控制

熊建栋^{1†}, 黄琼¹, 伍俊²

(1. 河南师范大学 数学与信息科学学院, 河南 新乡 453007; 2. 佛山科学技术学院 自动化学院, 广东 佛山 528000)

摘要: 本文针对带有驻留时间约束的离散时间切换线性正系统, 提出了依赖驻留时间的时变分段线性余正Lyapunov函数方法, 得到确保系统渐近稳定的充分条件. 另外, 将此方法推广到离散切换正系统的 L_1 增益性分析中, 得到系统具有未加权的 γ - L_1 增益的充分条件. 进一步, 对离散切换正系统设计一个时变 H_∞ 反馈控制, 使闭环系统具有最小 γ - L_1 增益. 最后给出一个数值算例验证文中的结论.

关键词: 渐近稳定性; 驻留时间; 余正Lyapunov函数; L_1 增益

引用格式: 熊建栋, 黄琼, 伍俊. 切换正系统的渐近稳定性、 L_1 增益及时变 H_∞ 控制. 控制理论与应用, 2019, 36(10): 1615 – 1621

DOI: 10.7641/CTA.2019.80416

Asymptotic stability, L_1 gain and time-varying H_∞ control of switched positive systems

XIONG Jian-dong^{1†}, HUANG Qiong¹, WU Jun²

(1. School of Mathematics and Information Science, Henan Normal University, Xinxiang Henan 453007, China;
2. Automation College, Foshan University, Foshan Guangdong 528000, China)

Abstract: A time-varying piecewise linear copositive Lyapunov function method is proposed for discrete time switched linear positive systems with dwell time, and a sufficient condition is established to ensure the asymptotic stability of the system in this paper. In addition, the method is used to analysis L_1 gain of discrete time switched linear positive systems, a sufficient condition ensuring the unweighted γ - L_1 gain of the system is derived. Further, a time-varying H_∞ feedback control is designed for the system, which keeps the closed-loop system having a minimum γ - L_1 gain. Finally, a numerical example is given to verify the conclusions.

Key words: asymptotic stability; dwell time; copositive Lyapunov function; L_1 gain

Citation: XIONG Jiandong, HUANG Qiong, WU Jun. Asymptotic stability, L_1 gain and time-varying H_∞ control of switched positive systems. *Control Theory & Applications*, 2019, 36(10): 1615 – 1621

1 引言

切换系统是一类典型的混杂动力系统, 其由有限个连续或离散子系统和一个切换法则构成, 其中切换法则协调各个子系统的运行. 切换系统由于其相对简单的数学描述和多模态表征能力, 在智能交通管理、电力系统、飞机上升过程的多工作点控制等实际问题中有广泛的应用, 成为当前系统控制领域的研究热点之一^[1-7]. 切换正系统是一类子系统为正系统的特殊切换系统. 所谓正系统, 指在此系统的初始条件和输入都非负时, 此系统的状态和输出都保持非负. 实际

生活中的人群传染病模型, 道路岔口的车辆拥堵排队模型等都可用切换正系统建模^[8-9]. 在过去的近20年间, 切换正系统的研究取得了丰硕成果^[10-22].

稳定性分析和镇定设计问题是切换正系统研究的基本问题. 目前, 一系列的研究表明即使切换正系统的子系统都是稳定的, 如果系统的切换频率过高, 也可能导致系统出现不稳定^[11, 23]. 为了限制切换频率, 文献[2, 4]设计慢切换及平均驻留时间来限制切换频率, 从而保持切换系统稳定. 另外, 在实际生活中, 由于物理限制, 系统不可能任意快的进行切换, 系统在

收稿日期: 2018-06-05; 录用日期: 2019-03-13.

[†]通信作者. E-mail: xiongjiandong5@163.com; Tel.: +86 15993004294.

本文责任编辑: 吴立刚.

国家自然科学基金项目(61603093), 河南省科技攻关项目(182102210379), 河南省高等学校重点科研项目(19A120003); 河南师范大学博士启动基金项目(qd13038)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (61603093), the Programs for Science and Technology Development of Henan Province (182102210379), the Key Research Projects of Henan Higher Education Institutions (19A120003) and the Ph.D. Research Startup Foundation of Henan Normal University (qd13038).

每个子系统至少都要驻留一段时间. 从而许多学者提出了受驻留时间限制的切换信号, 即要求切换信号在连续的两个切换时刻之间的间隔不能小于某个正常数 $d > 0$ ^[9, 15, 24-25]. 对驻留时间有限的切换正系统的稳定性分析, 主要研究的问题是确定使系统稳定的最小的驻留时间 d^* . Lyapunov 函数是研究切换正系统稳定性的最常用的工具. 当前的一系列结果表明线性余正 Lyapunov 函数是研究切换正系统的有力工具, 与传统的(共同)线性 Lyapunov 函数进行比较, 具有较低的保守性^[12, 19-21, 26].

Allerhand 等人在文献[24]提出一种分段线性时变 Lyapunov 函数方法, 得到了使含有不确定参数的线性切换系统鲁棒稳定的充分条件, 并可推广到系统的 L_2 增益分析. 文献[9, 27]分别将此分段线性 Lyapunov 函数的方法推广到不确定性离散时间切换线性系统和连续时间切换系统稳定性分析中. 受此方法的启发, 本文提出一类依赖驻留时间的时变分段定常线性余正 Lyapunov 函数方法, 并将此类方法推广到离散时间线性切换正系统稳定性分析中, 得到一个判定带驻留时间约束的离散线性切换正系统渐近稳定的充分条件. 基于前述结论, 本文得到求解最小驻留时间 d^* 的一个更为紧致的估计算法.

在实际的生产生活中, 系统不可避免地受到外部的扰动. 对切换正系统而言, 由于状态和输出的非负性, 基于 L_1 范数估计系统从扰动输入到输出的增益具有自然的物理意义. 又因向量的 L_1 范数是其各分量的和, 可用来简化表示人群感染传染病的数量和车流量等, 故受扰切换正系统的稳定性分析、 L_1 增益分析及 H_∞ 控制设计逐渐被大家关注. 目前的结果主要基于多余正 Lyapunov 函数估计系统的加权 L_1 增益^[13, 27], 而对不加权的 L_1 增益分析的结果较少.

本文对带驻留时间约束的切换正系统, 借助时变分段线性余正 Lyapunov 函数方法, 给出了系统具有 L_1 增益的充分条件, 及估计使系统渐近稳定且具有最小 L_1 增益的算法. 继而, 探究驻留时间与 L_1 增益之间的关系. 进一步, 对系统设计一个时变 H_∞ 状态反馈控制, 使闭环系统渐近稳定且具有最小 L_1 增益.

论文的组织结构如下: 第2节是问题描述和相关概念. 第3, 4, 5节分别给出系统的渐近稳定分析、 L_1 增益性及时变 H_∞ 反馈控制设计. 第6节是数值实例, 最后一节是本文的结论.

符号标记: \mathbb{R}^n 表示的是所有的 n 维实向量空间, \mathbb{R}_+ 表示非负实数集, \mathbb{Z}^+ 表示正整数集, $\mathbb{R}^{n \times n}$ 表示的是 $n \times n$ 维矩阵. 矩阵 $A < 0$ (≤ 0 , > 0 , ≥ 0) 表示矩阵的每一个元素都是负(非正, 正, 非负)的; 同理, 向量 $\mathbf{x} < 0$ 表示向量的每个元素都是负的. \mathbb{R}_+^n ($\mathbb{R}_+^{n \times m}$) 表示由所有元素都是非负的 n 维向量 ($n \times m$ 维矩阵) 组成的集

合, 本文 $\|\mathbf{x}\|$ 表示 1-范数, 定义为 $\|\mathbf{x}\| = \sum_{i=1}^n |x_i|$, 其中 x_i 表示向量 \mathbf{x} 的第 i 个分量; 另外 A^T 和 \mathbf{x}^T 分别表示矩阵 A 和向量 \mathbf{x} 的转置, 定义 $\mathbf{1} = [1 \ \cdots \ 1]^T$, A^+ 表示 A 的广义逆矩阵.

2 问题描述

2.1 离散时间切换线性正系统

本文考察如下的一类离散时间切换线性正系统:

$$\mathbf{x}(k+1) = A_{\sigma(k)}\mathbf{x}(k) + B_{\sigma(k)}\boldsymbol{\omega}(k) + E_{\sigma(k)}\mathbf{u}(k), \quad (1)$$

$$\mathbf{y}(k) = C_{\sigma(k)}\mathbf{x}(k) + D_{\sigma(k)}\boldsymbol{\omega}(k) + F_{\sigma(k)}\mathbf{u}(k), \quad (2)$$

其中: 系统初始状态 $\mathbf{x}(0) \succeq 0$, $\mathbf{x}(k) \in \mathbb{R}_+^n$ 为系统状态, $\boldsymbol{\omega}(k) \in \mathbb{R}_+^m$ 为扰动输入, $\mathbf{y}(k) \in \mathbb{R}_+^q$ 是系统输出, $\mathbf{u}(k) \in \mathbb{R}_+^p$ 为控制输入, 系数矩阵具有相容的维数. 系统的切换信号 $\sigma(k): \mathbb{Z}^+ \rightarrow \bar{\mathbb{N}} = \{1, 2, \dots, N\}$, 其中 N 为子系统的个数. 特别地, 当 $\sigma(k) = i, i \in \bar{\mathbb{N}}$ 时, 第 i 个子系统处于激活状态.

记 τ_h 为系统(1)-(2)的第 h 个切换时刻, $h = 0, 1, \dots$, 并设初始时刻为 $\tau_0 = 0$. 系统相应时刻间的差值为驻留时间, 若一个切换法则满足 $\tau_{h+1} - \tau_h \geq d > 0, h = 0, 1, 2, \dots$, 则称该切换法则具有驻留时间 d . 并记 \mathcal{D}_d 为所有具有驻留时间 d 的切换法则的集合.

定义 1 若系统(1)-(2)的初始状态 $\mathbf{x}(0) \succeq 0$, 扰动输入 $\boldsymbol{\omega}(k) \succeq 0$, 任意切换信号 $\sigma(k)$ 对应的系统状态 $\mathbf{x}(k) \succeq 0, \forall k$, 则系统(1)-(2)为正系统.

引理 1 系统(1)-(2)为正系统当且仅当下列条件成立:

- i) 系统初始状态 $\mathbf{x}(0) \succeq 0$;
- ii) 系数矩阵 $A_i, B_i, C_i, D_i, E_i, F_i, i \in \bar{\mathbb{N}}$ 均为相容维数的非负矩阵.

定义 2 若给定的正系统(1)-(2)满足初始状态 $\mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}_+^n, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $\|\mathbf{x}(0)\| < \delta$, 有

- i) $\|\mathbf{x}(k)\| < \varepsilon$;
- ii) $\|\mathbf{x}(k)\| \rightarrow 0 (k \rightarrow \infty)$,

则称该系统为渐近稳定的.

为限制切换频率, 提出带驻留时间限制的切换信号, 即在连续的两个切换时刻之间的间隔不能小于某个正常数 $d > 0$, 从而提出如下问题.

问题 1 对系统(1)-(2), 令 $\boldsymbol{\omega}(k) = 0$ 及 $\mathbf{u}(k) = 0$, 确定使系统渐近稳定的最小驻留时间 d^* .

当系统存在扰动输入时, 提出 γ - L_1 增益, 来描述系统扰动对输出的影响.

定义 3 若线性正系统(1)-(2)渐近稳定且具有 γ - L_1 增益性, 当且仅当下列条件成立:

- i) 在扰动输入 $\boldsymbol{\omega}(k) = 0$ 及控制输入 $\mathbf{u}(k) = 0$ 时线性正系统(1)-(2)为渐近稳定的;

ii) 当初始状态为零时, 满足以下不等式:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|\mathbf{y}(k)\| \leq \gamma \sum_{k=0}^{\infty} \|\boldsymbol{\omega}(k)\|, \forall \boldsymbol{\omega}(k) \neq 0. \quad (3)$$

其中: γ 为系统(1)–(2)的 L_1 增益, 定义最小 L_1 增益为 $\gamma^* := \min\{\gamma > 0: \text{式(3)成立}, \forall \boldsymbol{\omega} \in l^1 \text{ 空间}, \boldsymbol{\omega} \neq 0\}$.

问题 2 判定系统(1)–(2)渐近稳定及具有 L_1 增益的充分条件, 及使系统具有最小 L_1 增益 γ^* 的估计算法. 进一步, 探究驻留时间 d 与 L_1 增益 γ^* 之间的关系. 最后, 对系统设计一个时变 H_∞ 状态反馈控制, 使闭环系统渐近稳定且具有最小 L_1 增益, 从而抑制扰动输入对系统性能的影响.

2.2 时变分段线性余正 Lyapunov 函数方法

将文献[26]中 Allerhand 等人提出将 Lyapunov 函数在切换时刻内分段线性变化的思想推广到离散切换正系统(1)–(2)中, 作为分析此系统稳定性的工具. 取 Lyapunov 函数形式: $V_i: \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+$, 函数 V_i 的形式如下:

$$V_i(\mathbf{x}(k)) = \mathbf{x}^T(k) \boldsymbol{\lambda}_i(k), \quad (4)$$

其中 $\boldsymbol{\lambda}_i(k)$ 取值如下:

$$\boldsymbol{\lambda}_i(k) = \begin{cases} \boldsymbol{\lambda}_{i,l}, & l = k - \tau_h, k \in [\tau_h, \tau_h + d), \\ \boldsymbol{\lambda}_{i,d}, & k \in [\tau_h + d, \tau_{h+1}), \end{cases}$$

其中: $\boldsymbol{\lambda}_{i,l} \succ 0, l = 0, 1, \dots, d-1, \forall i \in \bar{N}$. 此依赖驻留时间的时变分段线性余正 Lyapunov 函数方法与常规的 Lyapunov 函数方法区别在于 $\boldsymbol{\lambda}_i(k), i \in \bar{N}$ 随时间线性变化, 在驻留时间区间 $[\tau_h, \tau_h + d)$ 内为时变向量, 取值为 $\boldsymbol{\lambda}_{i,l}, l = 0, 1, 2, \dots, d-1, i \in \bar{N}$, 在 $[\tau_h + d, \tau_{h+1})$ 时间区间内取常值 $\boldsymbol{\lambda}_{i,d}$.

3 渐近稳定性

基于上述的依赖驻留时间的时变分段线性余正 Lyapunov 函数方法, 考虑扰动输入 $\boldsymbol{\omega}(k) = 0$ 及控制输入 $\mathbf{u}(k) = 0$ 时的稳定性分析.

定理 1 考虑离散时间切换线性正系统(1)–(2), 给定一个标量 $d > 0$, 如果存在一系列正向量 $\boldsymbol{\lambda}_{i,l}, l = 0, 1, \dots, d-1, i \in \bar{N}$, 使得下列条件成立:

$$A_i^T \boldsymbol{\lambda}_{i,l+1} - \boldsymbol{\lambda}_{i,l} \prec 0, \quad (5)$$

$$A_i^T \boldsymbol{\lambda}_{i,d} - \boldsymbol{\lambda}_{i,d} \prec 0, \quad (6)$$

$$\boldsymbol{\lambda}_{j,0} - \boldsymbol{\lambda}_{i,d} \preceq 0, i \neq j, \forall i, j \in \bar{N}, \quad (7)$$

那么系统(1)–(2)在 $\boldsymbol{\omega}(k) = 0$ 及 $\mathbf{u}(k) = 0$ 时为渐近稳定的.

证 对于整个切换系统, Lyapunov 函数形式如下:

$$V(\mathbf{x}(k)) = \sum_{i \in \bar{N}} \theta_i(k) V_i(\mathbf{x}(k)) = \sum_{i \in \bar{N}} \theta_i(k) \mathbf{x}^T(k) \boldsymbol{\lambda}_i(k).$$

其中 Lyapunov 函数为 $V_i(\mathbf{x}(k)) = \mathbf{x}^T(k) \boldsymbol{\lambda}_i(k)$, 指标函

数 $\theta_i(k): \mathbb{Z}^+ \rightarrow \{0, 1\}$, 且满足 $\sum_{i=1}^N \theta_i(k) = 1$. 当系统切换到第 i 个系统时, $\sigma(k) = i$, 且 $\theta_i(k) = 1$.

设 $\sigma(\tau_h) = i$, 当 $k \in [\tau_h, \tau_h + d)$ 时,

$$\Delta V(\mathbf{x}(k)) = V(\mathbf{x}(k+1)) - V(\mathbf{x}(k)) = \mathbf{x}^T(k) (A_i^T \boldsymbol{\lambda}_{i,l+1} - \boldsymbol{\lambda}_{i,l}), l = 0, 1, \dots, d-1.$$

由式(5)可知,

$$\Delta V(\mathbf{x}(k)) < 0, k \in [\tau_h, \tau_h + d). \quad (8)$$

当 $k \in [\tau_h + d, \tau_{h+1})$ 时,

$$\Delta V(\mathbf{x}(k)) = V(\mathbf{x}(k+1)) - V(\mathbf{x}(k)) = \mathbf{x}^T(k) A_i^T \boldsymbol{\lambda}_{i,d} - \mathbf{x}^T(k) \boldsymbol{\lambda}_{i,d} = \mathbf{x}^T(k) (A_i^T \boldsymbol{\lambda}_{i,d} - \boldsymbol{\lambda}_{i,d}).$$

由式(6)可知,

$$\Delta V(\mathbf{x}(k)) < 0, k \in [\tau_h + d, \tau_{h+1}). \quad (9)$$

由式(8)–(9)可知,

$$\Delta V(\mathbf{x}(k)) < 0, \forall k \in [\tau_h, \tau_{h+1}), \quad (10)$$

即 $V(\mathbf{x}(k))$ 的值在每个子系统内单调递减. 证毕.

下面判断 $V(\mathbf{x}(k))$ 在切换发生前后也是递减.

假设系统(1)–(2)在切换时刻 τ_h , 从第 i 个子系统切换到第 j 个子系统, 定义

$$\begin{aligned} \Delta V(\mathbf{x}(\tau_h)) &= V(\mathbf{x}(\tau_h^+)) - V(\mathbf{x}(\tau_h^-)) = \\ &V_j(\mathbf{x}(\tau_h^+)) - V_i(\mathbf{x}(\tau_h^-)) = \mathbf{x}^T(\tau_h) (\boldsymbol{\lambda}_{j,0} - \boldsymbol{\lambda}_{i,d}), \\ &h = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

其中 $V(\mathbf{x}(\tau_h^+))$ 与 $V(\mathbf{x}(\tau_h^-))$ 定义分别为

$$\begin{aligned} V(\mathbf{x}(\tau_h^+)) &= \lim_{\Delta k \rightarrow 0^+} V(\mathbf{x}(\tau_h + \Delta k)), \\ V(\mathbf{x}(\tau_h^-)) &= \lim_{\Delta k \rightarrow 0^-} V(\mathbf{x}(\tau_h + \Delta k)). \end{aligned}$$

由式(7)可知,

$$\Delta V(\mathbf{x}(\tau_h)) \leq 0, h = 1, 2, \dots. \quad (11)$$

综合式(10)–(11)所述, 可知 $\Delta V(\mathbf{x}(k)) < 0$.

因此, 当 $\boldsymbol{\omega}(k) = 0, \mathbf{u}(k) = 0$ 时, 由 Lyapunov 第 2 方法可知系统(1)–(2)是渐近稳定的.

注 1 给定驻留时间 d , 定理 1 提供了判别离散时间线性切换正系统渐近稳定的方法, 即存在一系列正向量 $\boldsymbol{\lambda}_{i,l}$, 使得不等式(5)–(7)成立. 此方法可通过以 $\min \gamma$ 为目标函数, 以式(5)–(7)为约束条件的线性规划检验.

注 2 定理 1 提供了求解使系统(1)–(2)渐近稳定所容许的最小驻留时间 d^* 的方法. 若对某个 $d^* > 0$, 系统为渐近稳定的, 则对 $\forall d > d^*$, 均可得到系统(1)–(2)为渐近稳定的.

实质上, 正向量

$$\boldsymbol{\lambda}_i(k) = \begin{cases} \boldsymbol{\lambda}_{i,l}, & l = k - \tau_h, k \in [\tau_h, \tau_h + d^*), \\ \boldsymbol{\lambda}_{i,d}, & k \in [\tau_h + d^*, \tau_h + d) \cup [\tau_h + d, \tau_{h+1}), \end{cases}$$

其中 $i \in \bar{N}$, 满足定理 1 的要求.

基于此, 对足够大的 $d > 0$, 在区间 $[0, d]$ 上, 由对分法, 利

用线性规划依次验证当驻留时间等于区间中点值时, 定理1的可行性, 进而确定系统的最小驻留时间 d^* :

$$d^* = \min\{d \in \mathbb{Z}^+ : \text{使得式(5)-(7)成立}\}. \quad (12)$$

4 L_1 增益性

定理2 考虑控制输入 $\mathbf{u}(k)=0$ 时离散时间切换线性正系统(1)-(2), 对给定的标量 $\gamma > 0, d > 0$, 如果存在一系列向量 $\boldsymbol{\lambda}_{i,l} \succ 0, l = 0, 1, \dots, d-1, i \in \bar{\mathbb{N}}$ 使得下列条件成立:

$$A_i^T \boldsymbol{\lambda}_{i,l+1} - \boldsymbol{\lambda}_{i,l} + C_i^T \mathbf{1} \prec 0, \quad (13)$$

$$B_i^T \boldsymbol{\lambda}_{i,l+1} + D_i^T \mathbf{1} - \gamma \mathbf{1} \prec 0, \quad (14)$$

$$A_i^T \boldsymbol{\lambda}_{i,d} - \boldsymbol{\lambda}_{i,d} + C_i^T \mathbf{1} \prec 0, \quad (15)$$

$$\boldsymbol{\lambda}_{j,0} - \boldsymbol{\lambda}_{i,d} \preceq 0, i \neq j, \quad (16)$$

那么离散时间切换线性正系统(1)-(2)为渐近稳定的, 且具有 $\gamma-L_1$ 增益性.

证 由定理1易知系统(1)-(2)为渐近稳定的.

下面主要证明此系统的 L_1 增益性. 令

$$\mathcal{J} = \sum_{k=0}^{\infty} [\|\mathbf{y}(k)\| - \gamma \|\boldsymbol{\omega}(k)\|].$$

定义 $V(\mathbf{x}(k))$ 形式如式(4)所示, 其中初始值设定为 $\tau_0 = 0, \mathbf{x}(0) = 0$. \mathcal{J} 可被改写成

$$\begin{aligned} \mathcal{J} = & \sum_{h=0}^{\infty} \left\{ \sum_{k=\tau_h^+}^{\tau_{h+1}^-} \mathcal{N}(k) + [V(\mathbf{x}(\tau_h^+)) - V(\mathbf{x}(\tau_{h+1}^-))] \right\} = \\ & \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{k=\tau_h^+}^{\tau_{h+1}^-} \mathcal{N}(k) + \sum_{h=1}^{\infty} [V(\mathbf{x}(\tau_h^+)) - V(\mathbf{x}(\tau_h^-))], \end{aligned}$$

其中 $\mathcal{N}(k)$ 的定义如下式所示:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(k) = & \|\mathbf{y}(k)\| - \gamma \|\boldsymbol{\omega}(k)\| + \Delta V(\mathbf{x}(k)) = \\ & \mathbf{y}^T(k) \mathbf{1} - \gamma \boldsymbol{\omega}^T(k) \mathbf{1} + \Delta V(\mathbf{x}(k)), \end{aligned}$$

由式(16)可得

$$\begin{aligned} V(\mathbf{x}(\tau_h^+)) - V(\mathbf{x}(\tau_h^-)) = & \mathbf{x}^T(\tau_h) \boldsymbol{\lambda}_{j,0} - \mathbf{x}^T(\tau_h) \boldsymbol{\lambda}_{i,d} \leq 0, \forall h = 1, 2, \dots \quad (17) \end{aligned}$$

假设第 i 个系统处于激活状态, 当 $k \in [\tau_h, \tau_h+d)$, 可得

$$\mathcal{N}(k) = [\mathbf{x}^T(k) \quad \boldsymbol{\omega}^T(k)] \begin{bmatrix} A_i^T \boldsymbol{\lambda}_{i,l+1} - \boldsymbol{\lambda}_{i,l} + C_i^T \mathbf{1} \\ B_i^T \boldsymbol{\lambda}_{i,l+1} + D_i^T \mathbf{1} - \gamma \mathbf{1} \end{bmatrix}.$$

当 $k \in [\tau_h + d, \tau_{h+1})$, 可得

$$\mathcal{N}(k) = [\mathbf{x}^T(k) \quad \boldsymbol{\omega}^T(k)] \begin{bmatrix} A_i^T \boldsymbol{\lambda}_{i,d} - \boldsymbol{\lambda}_{i,d} + C_i^T \mathbf{1} \\ B_i^T \boldsymbol{\lambda}_{i,d} + D_i^T \mathbf{1} - \gamma \mathbf{1} \end{bmatrix}.$$

由式(13)-(15)可得

$$\mathcal{N}(k) < 0, \forall k \in [\tau_h, \tau_{h+1}). \quad (18)$$

由式(17)-(18)可推导出 $\mathcal{J} < 0$, 即离散时间切换线性

正系统(1)-(2)具有 $\gamma-L_1$ 增益性. 证毕.

注3 在给定正标量 d 和 γ 的条件下, 定理2提出了一种判断离散时间切换线性正系统渐近稳定及具有 $\gamma-L_1$ 增益的充分条件.

注4 给定驻留时间 d , 由定理2, 通过解下列最优问题来计算相应的 $\gamma-L_1$ 增益的最小值,

$$\min_{\gamma > 0} \gamma \text{ s.t. 式(13)-(16)}, \quad (19)$$

从而探究得到驻留时间 d 与最小 L_1 增益 γ 之间的函数关系.

给定一个有限增益 γ , 通过计算下列最优问题求得使得系统渐近稳定所容许的最小驻留时间,

$$\min_{d \in \mathbb{Z}^+} d \text{ s.t. 式(13)-(16)}, \quad (20)$$

继而探究得到 L_1 增益 γ 与最小驻留时间 d 之间的函数关系.

5 时变 H_∞ 控制

对于给定的离散时间切换正系统(1)-(2), 假定系统与相应的控制之间的切换是同步的, 给定以下的时变静态反馈控制:

$$\mathbf{u}(k) = \mathcal{K}_{\sigma(k)}(k) \mathbf{x}(k), \quad (21)$$

其中当 $\sigma(k) = i, i \in \bar{\mathbb{N}}$ 时, $\mathcal{K}_i(k)$ 满足

$$\mathcal{K}_i(k) = \begin{cases} \mathcal{K}_{i,l}, & l = k - \tau_h, k \in [\tau_h, \tau_h + d), \\ \mathcal{K}_{i,d}, & k \in [\tau_h + d, \tau_{h+1}). \end{cases}$$

将同步控制器(21)代入系统(1)-(2)中可得一闭环系统:

$$\mathbf{x}(k+1) = \bar{A}_{\sigma(k)} \mathbf{x}(k) + B_{\sigma(k)} \boldsymbol{\omega}(k), \quad (22)$$

$$\mathbf{y}(k) = \bar{C}_{\sigma(k)} \mathbf{x}(k) + D_{\sigma(k)} \boldsymbol{\omega}(k), \quad (23)$$

其中:

$$\bar{A}_{\sigma(k)} = A_{\sigma(k)} + E_{\sigma(k)} \mathcal{K}_{\sigma(k)}(k) \succ 0,$$

$$\bar{C}_{\sigma(k)} = C_{\sigma(k)} + F_{\sigma(k)} \mathcal{K}_{\sigma(k)}(k) \succ 0.$$

定理3 对于离散时间切换线性系统(1)-(2), 给定正标量 $\gamma > 0, d > 0$. 如果存在一系列向量 $\boldsymbol{\lambda}_{i,l} \succ 0, \mathcal{X}_{i,l}$, 其中 $l = 0, 1, 2, \dots, d-1, \forall i \in \bar{\mathbb{N}}$ 使得下列条件成立:

$$C_i^T \mathbf{1} + A_i^T \boldsymbol{\lambda}_{i,l+1} + \mathcal{X}_{i,l} - \boldsymbol{\lambda}_{i,l} \prec 0, \quad (24)$$

$$C_i^T \mathbf{1} + A_i^T \boldsymbol{\lambda}_{i,d} + \mathcal{X}_{i,d} - \boldsymbol{\lambda}_{i,d} \prec 0, \quad (25)$$

$$B_i^T \boldsymbol{\lambda}_{i,l+1} + D_i^T \mathbf{1} - \gamma \mathbf{1} \prec 0, \quad (26)$$

$$\boldsymbol{\lambda}_{j,0} - \boldsymbol{\lambda}_{i,d} \preceq 0, i \neq j, \quad (27)$$

那么闭环系统(22)-(23)为渐近稳定的, 且具有 $\gamma-L_1$ 增益性. 其中时变 H_∞ 反馈控制器, 由下列式子给定:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_i(k) = & \begin{cases} (\mathbf{1}F_i + \boldsymbol{\lambda}_{i,l+1}^T E_i)^+ \mathcal{X}_{i,l}^T, & l = k - \tau_h, k \in [\tau_h, \tau_h + d), \\ (\mathbf{1}F_i + \boldsymbol{\lambda}_{i,d}^T E_i)^+ \mathcal{X}_{i,d}^T, & k \in [\tau_h + d, \tau_{h+1}). \end{cases} \end{aligned} \quad (28)$$

证 当扰动输入 $\boldsymbol{\omega}(k) = 0$ 时, 由定理1易知离散

切换正系统(1)–(2)为渐近稳定的. 下面主要证明此系统的 γ - L_1 增益性. 令 $\mathcal{J} = \sum_{k=0}^{\infty} [\|\mathbf{y}(k)\| - \gamma\|\boldsymbol{\omega}(k)\|]$.

定义 $V(\mathbf{x}(k))$ 形式如式(4)所示, 其中 \mathcal{J} 可被改写成

$$\mathcal{J} = \sum_{h=0}^{\infty} \left\{ \sum_{k=\tau_h^+}^{\tau_{h+1}^-} \mathcal{M}(k) + [V(\mathbf{x}(\tau_h^+)) - V(\mathbf{x}(\tau_{h+1}^-))] \right\} = \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{k=\tau_h}^{\tau_{h+1}^-} \mathcal{M}(k) + \sum_{h=1}^{\infty} [V(\mathbf{x}(\tau_h^+)) - V(\mathbf{x}(\tau_h^-))],$$

其中 $\mathcal{M}(k) = \mathbf{y}^T(k)\mathbf{1} - \gamma\boldsymbol{\omega}^T(k)\mathbf{1} + \Delta V(\mathbf{x}(k))$, 则可得

$$V(\mathbf{x}(\tau_h^+)) - V(\mathbf{x}(\tau_h^-)) < 0, \forall h = 1, 2, \dots \quad (29)$$

当 $\sigma(k) = i, k \in [\tau_h, \tau_h + d)$ 时, 可得

$$\mathcal{M}(k) = [\mathbf{x}^T(k) \quad \boldsymbol{\omega}^T(k)]\mathcal{Q}_1(k),$$

$$\mathcal{Q}_1(k) =$$

$$\begin{bmatrix} C_i^T \mathbf{1} + \mathcal{K}_{i,l}^T F_i^T \mathbf{1} + (A_i^T + \mathcal{K}_{i,l}^T E^T) \boldsymbol{\lambda}_{i,l+1} - \boldsymbol{\lambda}_{i,l} \\ B_i^T \boldsymbol{\lambda}_{i,l+1} + D_i^T \mathbf{1} - \gamma \mathbf{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_i^T \mathbf{1} + A_i^T \boldsymbol{\lambda}_{i,l+1} + \mathcal{X}_{i,l} - \boldsymbol{\lambda}_{i,l} \\ B_i^T \boldsymbol{\lambda}_{i,l+1} + D_i^T \mathbf{1} - \gamma \mathbf{1} \end{bmatrix}.$$

当 $k \in [\tau_h + d, \tau_{h+1})$ 时, 可得

$$\mathcal{M}(k) = [\mathbf{x}^T(k) \quad \boldsymbol{\omega}^T(k)]\mathcal{Q}_2(k),$$

$$\mathcal{Q}_2(k) =$$

$$\begin{bmatrix} C_i^T \mathbf{1} + \mathcal{K}_{i,d}^T F_i^T \mathbf{1} + (A_i^T + \mathcal{K}_{i,d}^T E^T) \boldsymbol{\lambda}_{i,d} - \boldsymbol{\lambda}_{i,d} \\ B_i^T \boldsymbol{\lambda}_{i,d} + D_i^T \mathbf{1} - \gamma \mathbf{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_i^T \mathbf{1} + A_i^T \boldsymbol{\lambda}_{i,d} + \mathcal{X}_{i,d} - \boldsymbol{\lambda}_{i,d} \\ B_i^T \boldsymbol{\lambda}_{i,d} + D_i^T \mathbf{1} - \gamma \mathbf{1} \end{bmatrix},$$

其中:

$$\mathcal{X}_{i,l} = \mathcal{K}_{i,l}^T (F_i^T \mathbf{1} + E_i^T \boldsymbol{\lambda}_{i,l+1}),$$

$$\mathcal{X}_{i,d} = \mathcal{K}_{i,d}^T (F_i^T \mathbf{1} + E_i^T \boldsymbol{\lambda}_{i,d}).$$

由式(24)–(26), 可得 $\mathcal{M}(k) < 0$, 从而可得

$$\mathbf{y}^T(k)\mathbf{1} - \gamma\boldsymbol{\omega}^T(k)\mathbf{1} + \Delta V(\mathbf{x}(k)) < 0, \forall k \in [\tau_h, \tau_{h+1}). \quad (30)$$

由式(29)–(30)综合可推导出 $\mathcal{J} < 0$, 即可得闭环系统(22)–(23)具有 $\gamma - \mathcal{L}_1$ 增益性. 证毕.

注 5 定理3设计了一种判断时变 H_∞ 反馈控制条件下闭环系统(22)–(23)具有最小 γ - L_1 增益的方法.

注 6 定理3给出了求解此最小增益所对应的时变 H_∞ 反馈控制器 $\mathcal{K}_i(k)$ 的方法, 即借助线性规划, 在给定驻留时间时, 求出使式(24)–(27)成立的最小 γ - L_1 增益, 及相应的 $\boldsymbol{\lambda}_{i,l}$, $\mathcal{X}_{i,l}$, 代入到式(28)中, 即可得相应的 H_∞ 反馈控制器 $\mathcal{K}_i(k)$.

6 数值算例

考虑一个二阶离散时间切换线性正系统, 其系统矩阵分别为

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.3 & 1.2 \\ 0.4 & 0.2 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 \\ 0.6 & 0.8 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = [0.5; 0.2], B_2 = [0.2; 0.3],$$

$$C_1 = [1.1 \ 0.2], C_2 = [0.3 \ 0.6],$$

$$E_1 = [0.05; 0.04], E_2 = [0.03; 0.07],$$

$$D_1 = 0.5, D_2 = 0.2, F_1 = 0.3, F_2 = 0.52,$$

其中: 系数矩阵 A_1 特征值为

$$\lambda_{1,1} = 0.9446, \lambda_{1,2} = -0.4446,$$

A_2 特征值为 $\lambda_{2,1} = 0.0417, \lambda_{2,2} = 0.9583$, 即两子系统均为稳定子系统.

由注2, 利用MATLAB的线性规划工具箱, 得当 $d^* = 2$, 此系统为渐近稳定的. 而对此系统采用共同线性Lyapunov函数方法经MATLAB实现, 求得使系统渐近稳定的最小驻留时间为 $d^* = 8$, 故与共同线性Lyapunov函数方法相比, 时变分段线性余正Lyapunov函数方法降低了保守性.

进一步, 绘制 $d = 3$ 时切换系统状态相位图如图1所示的, 初始状态 $\mathbf{x}(0) = [1.7; 1.8]$, 相位图与本文结论相一致, 系统为渐近稳定的.

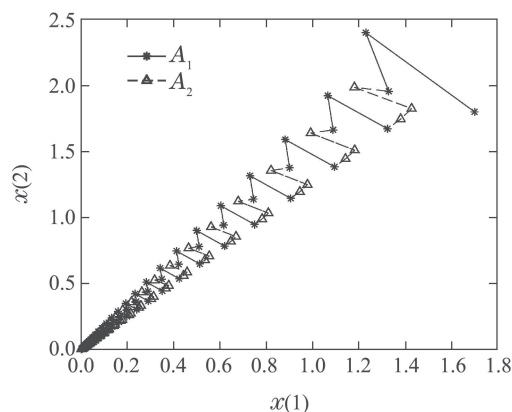


图 1 切换系统状态相位图

Fig. 1 Phase image of the states of switched systems

接下来考察驻留时间 d 对 L_1 增益 γ 之间的关系. 如图2所示, 随着驻留时间 d 的增大, 最小 L_1 增益 γ 递减, 当驻留时间 $d = 20$ 时, 达到最小增益 $\gamma^* = 10.15$.

此外, 定理2指出 L_1 增益 γ 对驻留时间 d 之间的关系. 给定 L_1 增益 γ , 如图3, 随着 L_1 增益 γ 的增大, 使得系统渐近稳定的最小驻留时间递减, 驻留时间 d 最终稳定值 $d^* = 2$. 另外, 驻留时间 d 与 L_1 增益 γ 的函数关系式在控制领域是仍待解决的问题^[28], 也是下一步研究的方向之一.

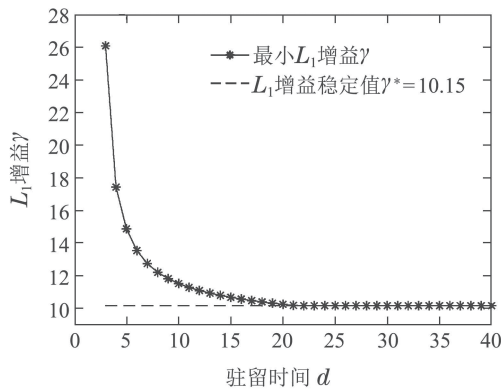


图2 L_1 增益随驻留时间变化关系图

Fig. 2 Relationship of L_1 gain versus dwell time

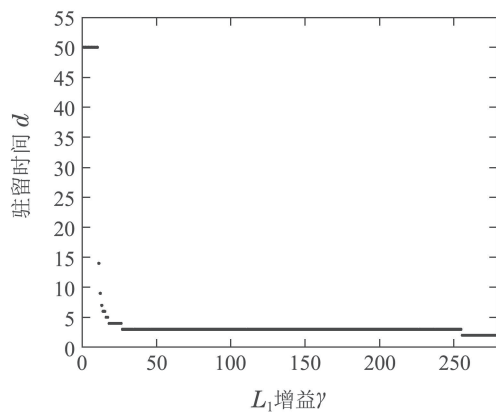


图3 驻留时间随 L_1 增益 γ 变化关系图

Fig. 3 Relationship of the dwell time versus L_1 gain

最后,由定理3,如图4所示,随着驻留时间的增大,最小 L_1 增益 γ^* 降低,当 $d = 11$ 时,取得最小增益 $\gamma^* = 7.70$.对比图2、图4结果,表明所设计的控制器能有效抑制扰动输入对系统性能的影响,并改善系统的稳定性能.

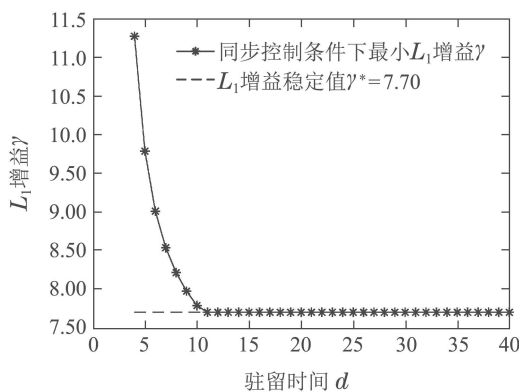


图4 L_1 增益随驻留时间变化关系图

Fig. 4 Relationship of L_1 gain versus dwell time

当驻留时间 $d = 4$ 时,对上述系统设计一个时变 H_∞ 反馈控制 $\mathbf{u}(k) = \mathcal{K}_{\sigma(k)}(k)\mathbf{x}(k)$,使闭环系统仍具有最小 L_1 增益性,此时,对应的反馈控制器 $\mathcal{K}_{i,l}$ 如表1所示.

表1 $d = 4$ 时对应的反馈控制器 $\mathcal{K}_{i,l}$

Table 1 Feedback controller $\mathcal{K}_{i,l}$ of $d = 4$

$\mathcal{K}_{i,l}$	$i = 1$	$i = 2$
$l = 0$	[0.2648 -0.1139]	[-0.0877 0.3445]
$l = 1$	[-0.1167 -0.1165]	[-0.0917 -0.0918]
$l = 2$	[-0.1151 -0.1151]	[-0.0901 -0.0902]
$l = 3$	[-0.1133 -0.1132]	[-0.0885 -0.0887]
$l = 4$	[0.0106 -0.0852]	[-0.1118 0.0361]

7 结论

本文借助于依赖驻留时间的时变分段线性余正Lyapunov函数方法,得到在驻留时间约束下确保离散时间切换正系统渐近稳定的充分条件,并推广到切换正系统的稳定性分析及 L_1 增益性分析中,探究了驻留时间与 γ - L_1 增益之间的关系,在给定驻留时间的条件下,借助线性规划,得到未加权的最小 L_1 增益 γ .进一步,为离散切换正系统设计一个时变 H_∞ 反馈控制,使闭环系统渐近稳定且具有最小 L_1 增益.最后数例仿真验证了结论的有效性.

参考文献:

- [1] SUN Z, GE S S. *Stability Theory of Switched Dynamical Systems*. London: Springer, 2011.
- [2] LIBERZON D. *Switching in Systems and Control*. Boston: Birkhuser, 2003.
- [3] XIONG Jiandong, LIU Yongqi, SHEN Zhiping, et al. Stabilizing slow-switching strategy for continuous-time switched linear systems. *Control and Decision*, 2016, 31(5): 797 – 804. (熊建栋, 刘永奇, 沈志萍, 等. 连续线性切换系统的镇定慢切换设计. 控制与决策, 2016, 31(5): 797 – 804.)
- [4] LIBERZON D, MORSE A S. Basic problems in stability and design of switched systems. *IEEE Control Systems Magazine*, 1999, 19(5): 59 – 70.
- [5] XIONG Jiandong, REN Zhimin. Robust stability analysis of a class of switched linear systems under a switching strategy. *Journal of Henan Normal University (Natural Science Edition)*, 2018, 46(1): 29 – 36. (熊建栋, 任志敏. 切换线性系统在一类切换策略下的鲁棒稳定性分析. 河南师范大学学报(自然科学版), 2018, 46(1): 29 – 36.)
- [6] WANG B, ZHU Q. Stability analysis of semi-Markov switched stochastic systems. *Automatica*, 2018, 94(1): 72 – 80.
- [7] YAO Fengqi, ZHU Xingxing. Finite-time boundedness analysis and H_∞ control for a class of impulsive stochastic systems. *Control Theory & Applications*, 2018, 35(3): 291 – 298. (姚凤麒, 朱行行. 一类脉冲随机系统的有限时间有界性分析与 H_∞ 控制. 控制理论和应用, 2018, 35(3): 291 – 298.)
- [8] BLANCHINI F, COLANERI P, VALCHER M E. *Switched Positive Linear Systems*. Hanover: Now Publishers Inc, 2015.
- [9] XIANG W, LAM J, SHEN J. Stability analysis and L_1 -gain characterization for switched positive systems under dwell-time constraint. *Automatica*, 2017, 85(1): 1 – 8.
- [10] MENG Z, XIA W, JOHANSSON K H, et al. Stability of positive switched linear systems: weak excitation and robustness to time-varying delay. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, 62(1): 399 – 405.

- [11] GURVITS L, SHORTEN R, MASON O. On the stability of switched positive linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2007, 52(6): 1099 – 1103.
- [12] BLANCHINI F, COLANERI P, VALCHER M E. Co-positive Lyapunov functions for the stabilization of positive switched systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, 57(12): 3038 – 3050.
- [13] XIANG M, XIANG Z. Stability, L_1 -gain and control synthesis for positive switched systems with time-varying delay. *Nonlinear Analysis Hybrid Systems*, 2013, 9(1): 9 – 17.
- [14] LI S, XIANG Z, KARIMI H R. Stability and L_1 -gain controller design for positive switched systems with mixed time-varying delays. *Applied Mathematics and Computation*, 2013, 222(1): 507 – 518.
- [15] SANG H, NIE H. Asynchronous H_∞ control for discrete-time switched systems under state-dependent switching with dwell time constraint. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 2018, 29(1): 187 – 202.
- [16] XIANG M, XIANG Z. Exponential stability of discrete-time switched linear positive systems with time-delay. *Applied Mathematics and Computation*, 2014, 230(3): 193 – 199.
- [17] LI S, XIANG Z. Stability and \mathcal{L}_∞ -gain analysis for positive switched systems with time-varying delay under state-dependent switching. *Circuits Systems and Signal Processing*, 2016, 35(3): 1045 – 1062.
- [18] MA R, WANG X, LIU Y. Robust stability of switched positive linear systems with interval uncertainties via multiple time-varying linear copositive Lyapunov functions. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 2018, 30(1): 285 – 292.
- [19] FORNASINI E, VALCHER M E. Linear copositive Lyapunov functions for continuous-time positive switched systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, 55(8): 1933 – 1937.
- [20] ZHANG J, HAN Z, ZHU F, et al. Feedback control for switched positive linear systems. *Control Theory & Applications*, 2013, 7(3): 464 – 469.
- [21] ZHANG J, WANG Y, XIAO J, et al. Stability analysis of switched positive linear systems with stable and unstable subsystems. *International Journal of Systems Science*, 2014, 45(12): 2458 – 2465.
- [22] LIU Zhi, ZHANG Xianfu, WANG Yuzhen. Stability and stabilization for discrete-time positive switched multiple equilibria systems on finite time intervals. *Control Theory & Applications*, 2017, 34(4): 433 – 439.
(刘志, 张宪福, 王玉振. 离散多平衡点正切换系统有限区间稳定与镇定. 控制理论和应用, 2017, 34(4): 433 – 439.)
- [23] FAINSIL L, MARGALOT M, CHIGANSKY P. On the stability of positive linear switched systems under arbitrary switching laws. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, 54(4): 897 – 899.
- [24] ALLERHAND L I, SHAKED U. Robust stability and stabilization of linear switched systems with dwell time. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2011, 56(2): 381 – 386.
- [25] LI Y, ZHANG H. Stability, L_1 -gain analysis and asynchronous L_1 -gain control of uncertain discrete-time switched positive linear systems with dwell time. *Journal of the Franklin Institute*, 2019, 356(1): 382 – 406.
- [26] VASSILYEV S N, KOSOV A A. Analysis of hybrid systems' dynamics using the common Lyapunov functions and multiple homomorphisms. *Automation and Remote Control*, 2011, 72(6): 1163 – 1183.
- [27] XIANG W, XIAO J. Convex sufficient conditions on asymptotic stability and L_1 -gain performance for uncertain discrete-time switched linear systems. *IET Control Theory and Applications*, 2014, 8(3): 211 – 218.
- [28] BLONDEL V D, MEGRETSKI A. *Unsolved Problems in Mathematical Systems and Control Theory*. Princeton: Princeton University Press, 2012.

作者简介:

熊建栋 博士, 目前研究方向为混杂系统的稳定性分析与设计,

E-mail: xiongjiandong5@163.com;

黄琼 硕士研究生, 目前研究方向为切换正系统的稳定性分析,

E-mail: huangqiongsmile@163.com;

伍俊 博士, 目前研究方向为多平衡点混杂系统稳定性分析与设计, E-mail: susanwuj@163.com.