

随机性标量参数分布式量化的最优比特分配

沈志萍¹, 陈军勇², 邬依林^{3†}

(1. 河南师范大学 数学与信息科学学院, 大数据统计分析 & 优化控制河南省工程实验室, 河南 新乡 453007;

2. 浙江科技学院 信息与电子工程学院, 浙江 杭州 310023; 3. 广东第二师范学院 计算机科学系, 广东 广州 510310)

摘要: 本文研究了在总比特率设定的情况下, 改良并给出表现更优的量化器, 以及如何实现基于网络的随机标量参数分布式量化估计, 重点讨论传感器比特数最优分配. 与常规给定各传感器的量化比特率不同的是, 本文将结合估计器算法使用和不同量化器的构建, 来研究固定总比特率下的分配. 文中的观测模型噪声服从高斯分布, 并且以此模型为对象通过均匀量化探讨基于一般类型与线性估计器的最理想比特分配方式. 前者均方误差上限与后者对应下限在高精度处理方案下结果几乎相同, 都表现出网络中观测噪声误差反比于量化级数这一特性. 此外还借用交替序列比特分配算法以确保求解出的数值解恒非负. 最后从 MATLAB 仿真结果可以看到, 本文给出的最优比特分配估计器较传统方案的表现更优.

关键词: 最优比特分配; 分布式量化估计; 均匀量化器; 最小均方误差; 贝叶斯 Cramer-Rao 下界

引用格式: 沈志萍, 陈军勇, 邬依林. 随机性标量参数分布式量化的最优比特分配. 控制理论与应用, 2020, 37(2): 387 – 394

DOI: 10.7641/CTA.2019.80540

Optimal bit allocation for stochastic scalar parameter distributed quantization

SHEN Zhi-ping¹, CHEN Jun-yong², WU Yi-lin^{3†}

(1. Henan Engineering Laboratory for Big Data Statistical Analysis and Optimal Control, School of Mathematics and Information Sciences, Henan Normal University, Xinxiang Henan 453007, China;

2. School of Information and Electronic Engineering, Zhejiang University of Science and Technology, Hangzhou Zhejiang 310023, China;

3. Department of Computer Science, Guangdong University of Education, Guangzhou Guangdong 510310, China)

Abstract: Given the total bit rate, this paper studies the improved quantizer, the distributed quantization estimation for random scalar parameters, and focuses on the optimal allocation of sensor bit numbers. Different from the existing results in which the quantization bit rate of each sensor is given, this paper will combine the estimator algorithm and the construction of different quantizers to study the optimal allocation under the fixed total bit rate. The noise in the observation model obeys the Gaussian distribution, and this observation model is used to discuss the optimal allocation based on linear and general types estimators through uniform Quantization. The former mean square error upper limit and the latter corresponding lower limit are almost the same under the high-precision quantization scheme, and all show that the observation noise error is inversely proportional to the quantization series. In addition, an alternating sequence bit allocation algorithm is borrowed to ensure that the solved numerical solution is constant and non-negative. Finally, it can be seen from the Matlab simulation that the optimal bit allocation estimator given in this paper is better than the traditional scheme.

Key words: optimal bit allocation; distributed quantization estimation; uniform quantization; minimum mean-square error; Bayesian Cramer-Rao lower bound

Citation: SHEN Zhiping, CHEN Junyong, WU Yilin. Optimal bit allocation for stochastic scalar parameter distributed quantization. *Control Theory & Applications*, 2020, 37(2): 387 – 394

收稿日期: 2018-07-19; 录用日期: 2019-05-20.

†通信作者. E-mail: lyw@gdei.edu.cn; Tel.: +86 20-34115714.

本文责任编辑: 俞立.

广东省普通高校特色创新项目(自然科学类)(2018KTSCX163); 广东省科技计划项目(2016A010106007, 2016B090927010), 河南省高等学校重点科研项目(19A120003), 河南师范大学青年基金项目(5101019170204), 河南省科技攻关项目(182102210379), 广东第二师范学院网络工程重点学科项目(ZD2017004)资助.

Supported by the Guangdong Province Universities and Colleges Special Innovation Projects (Natural Science) (2018KTSCX163), the Science and Technology Planning Project of Guangdong Province (2016A010106007, 2016B090927010), the Key Research Projects of Henan Higher Education Institutions (19A120003), the Henan Normal University Youth Fund Project (5101019170204), the Henan Province Science and Technology Research Project (182102210379) and the Guangdong University of Education Network Engineering Key Subject (ZD2017004).

1 引言

无线传感器网络在这些年备受关注并引起了广大学者的研究兴趣,一度变成非常活跃的研究领域^[1-3]. 由于无线传感器网络高度灵活,系统稳定,可移动和成本低等特点,使得其在增加监视覆盖范围,军事监控和交通调控等领域得到重用,而在安全监管和环境保护等方面也有着应用潜力^[4-6]. 一般无线传感器网络的主框架由非常多的传感器组群构建而成,目前多数它们的使用已经达到了功耗和成本较低的要求,再据要求部署在特定应用场所收集观测值并做一定预处理. 其中有着上限的通信容量用于支持各个节点之间的通信. 这种情况下,往往设有一个融合中心用于处理来自各传感器的数据并做出预估计,例如,文献[7]使用无线传感器和融合中心对未知随机向量进行分散估计,采用线性模型对矢量源进行分散估计,提出了迭代算法;文献[8]考虑在非均匀分布的无线传感器网络中利用线性观测模型对高斯矢量进行分布式估计,其中融合中心使用线性估计器重建未知矢量,研究了最小化均方误差的发射功率和量化速率(以每个传感器的比特测量)分配方案.

融合中心处理和估计随机参数问题问题时,通常借助贝叶斯估计将待估量假定为随机变量,并且具有一定的先验分布,而该随机变量的具体数值是基于接收到的量化观测值估计而得到. 1988年Ephraim和Gray^[9]通过适当的修改失真度量,矢量量化问题转化成噪声源和修改的失真度量的标准量化问题,进而得到单个噪声源的最优估计算法和量化方式;Ayanoglu^[10]于两年后考虑了同类型噪声源的量化,包括量化区的分割及最优量化值的确定,同时对各种方案进行综合分析. Lam和Reibman^[11]研究了分布式量化估计系统中的随机参数,并给出最优量化器需满足的条件,且对各种方案做了实验. 但文献[7-11]中提出的量化器的构造方法存在实现难度高,并需要进行高维数函数处理与运算等不足. 上世纪九十年代初, Gubner^[12]在只涉及到两个变量的情况下给出另一种量化器算法,该算法局部最优且可以迭代,单传感器情况下变为Lloyd-Max量化器^[13,15]. Zhang等人^[16]在Gubner^[12]研究基础之上,对线性量化估计器的最优构造进一步研究. 而Marano^[14]在Cover等人^[17]设计的量化器基础上^[15],就如何构造渐近最优进行研究^[18-20].

由文献[9-20]中可见研究者在研究如何分布式量化估计随机参数时,往往假设给定各个传感器的比特率,再讨论量化器与估计器的最优构造方法. 而本文在总比特率给定下讨论量化估计及比特率分配的研究,是上述研究基础的扩展.

本文采用一种最常用且简单的量化方式—均匀量化器^[21-23]. 均匀量化具有等分量化分区间隔、易于物理上实现等优点而广泛应用于网络控制、信号处理等

领域^[24-27]. 考虑高斯信源—高斯噪声模型,首先采用均匀量化器设计一个准最小均方误差估计器(quasi minimum mean squared error, Quasi-MMSE),并给出其均方误差上界,再通过最小化均方误差上界得到对应的最优分配方法. 同时借助估计器的Bayesian Cramer-Rao下限(Bayesian Cramer-Rao lower bound, BCRLB)理论得到适用于一般类型估计器最优比特分配方式. 其中最优量化级数在高精度均匀量化情况下与观测噪声方差成反比. 所得结论表明两种方案在高精度均匀量化时一致呈上述反比关系. 同时借助比特分配的交替序列法解决最优方案中比特数可能为小数或者负数的特殊情形. MATLAB仿真验证本文所提出基于最优比特分配方案的估计器,较传统比特率平均分配法得到的,其均方误差下降明显.

2 问题描述

考虑节点数为 N ,存在一个融合中心(fusion center)的传感器网络,随机性标量参数 θ 被每个传感器观测,各观测值经编码处理后发送到融合中心,然后融合中心根据量化观测值估计随机信号 θ ,具体如图1所示.

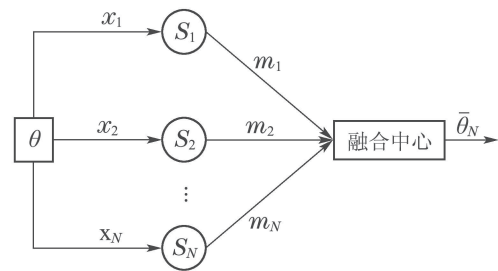


图1 分布式量化估计结构图

Fig. 1 Distributed quantization estimation scheme

传感器 n 的观测模型为

$$x_n = \theta + w_n, n = 1, 2, \dots, N. \quad (1)$$

假定随机性标量参数和观测噪声分别满足 $\theta \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\theta^2)$ 和 $w_n \sim \mathcal{N}(0, \sigma_n^2)$, 从而有 $x_n \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\theta^2 + \sigma_n^2)$, 并且 $\{w_n\}_{n=1}^N$ 是空间上互相独立的白噪声. 同时假定式(1)中模型规定了能够覆盖观测到的 $[-W, W]$ 信号区域. 其中的常量 W 是与投入使用的无线传感器性能相关的参量.

设 m_n 用于表示第 n 个节点的量化观测值, 融合函数记为 $\Gamma(\cdot)$, 则在融合中心有

$$\bar{\theta}_N = \Gamma(m_1, m_2, \dots, m_N). \quad (2)$$

而性能的评估标准用均方误差(mean squared error, MSE)表示, 即

$$\text{MSE} = \text{E}(|\bar{\theta}_N - \theta|^2). \quad (3)$$

问题提出: 由于该类网络系统中带宽的制约, 观测值需经量化处理后发送, 假定每个采样周期共发送给传感器 Q 位观测值. 考虑到均匀分配比特法会因不同

观测噪声方差无法满足最佳的性能要求. 设网络中第 n 个节点分配到的量化比特数为 q_n , 本文探究目的有两个: 一是基于量化观测值实现对随机性标量参数 θ 的最优估计, 二是将总的给定比特数 Q 最优分配到各传感器, 于是此联合优化问题可描述如下:

$$\begin{cases} \min E(\bar{\theta}_N - \theta)^2, \\ \text{s.t. } \sum_{n=1}^N q_n = Q, Q \geq 0, Q \in \mathbb{Z}. \end{cases} \quad (4)$$

3 最小均方误差估计器及基于最小均方误差估计器的最优比特分配

由于传感器网络存在带宽限制, 而观测值在传送前需经量化处理, 为提高整个网络的工作能力和表现, 故有必要合理分配网络中各个节点传感器获取到的通讯资源, 即比特数占有比. 接下来讨论准最小均方误差估计器和比特数的分配, 首先假设在每个传感器分配到最优比特数的情况下设计估计器, 然后根据估计器的均方误差最小来设计最优比特分配.

3.1 准最小均方误差估计器

本小节首先讨论修正的无偏均匀量化器, 如图2所示; 再在量化处理和最小均方误差估计器之上构造出准最小均方误差估计器, 即线性估计器.

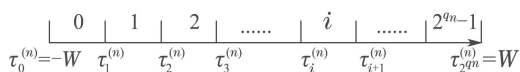


图 2 均匀量化结构图

Fig. 2 Uniform quantization

修正的无偏均匀量化器: 图2中 2^{q_n} 个子区块共同组成了 $[-W, W]$, 由其平均分割得到, 而用 $\{\tau_i^{(n)}\}_{i=0}^{2^{q_n}}$ 表示 n 个节点的量化阈值集合, 并记 Δ_n 为均匀间隔的长度:

$$\Delta_n = \frac{2W}{2^{q_n}}. \quad (5)$$

每个经过量化处理的信号 x_n 都能找到对应的分区, 且选用分区质心表示该区的量化值, 并用 \bar{x}_n 表示:

$$\bar{x}_n = \frac{\int_{\tau_i^{(n)}}^{\tau_{i+1}^{(n)}} x_n f(x_n) dx_n}{\int_{\tau_i^{(n)}}^{\tau_{i+1}^{(n)}} f(x_n) dx_n}, \quad (6)$$

其中函数 $f(x_n)$ 为观测值 x_n 的概率密度函数.

设 $\varepsilon_n = \bar{x}_n - x_n$ 表示量化误差, 则对于修正后的量化器有

$$E(\varepsilon_n) = 0, \quad (7)$$

且

$$|\varepsilon_n| < \Delta_n. \quad (8)$$

假设各个传感器的量化误差相互独立, 则对于传感器 i 和 j 存在关系 $E(\varepsilon_i \varepsilon_j) = E(\varepsilon_i) E(\varepsilon_j) = 0 (i \neq j)$.

最小均方误差估计器: 理想情况下传感器与融合中心彼此间的通信由足够大的带宽保障, 即各传感器能够把观测值 $\{x_n\}_{n=1}^N$ 无失真地发送到融合中心, 而其最小均方误差估计器^[28]及其相应均方误差可分别表示为

$$\hat{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_N) = \left(\frac{1}{\sigma_\theta^2} + \sum_{n=1}^N \frac{1}{\sigma_n^2} \right)^{-1} \sum_{n=1}^N \frac{x_n}{\sigma_n^2}, \quad (9)$$

$$E(\hat{\theta} - \theta)^2 = \left(\frac{1}{\sigma_\theta^2} + \sum_{n=1}^N \frac{1}{\sigma_n^2} \right)^{-1}. \quad (10)$$

接下来基于上述修正的均匀量化器和最小均方误差估计器, 给出准最小均方误差估计器表达式.

准最小均方误差估计器:

$$\begin{aligned} \bar{\theta}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_N) &= \\ & \left(\frac{1}{\sigma_\theta^2} + \sum_{n=1}^N \frac{1}{\sigma_n^2} \right)^{-1} \sum_{n=1}^N \frac{\bar{x}_n}{\sigma_n^2} = \\ & \hat{\theta} + \left(\frac{1}{\sigma_\theta^2} + \sum_{n=1}^N \frac{1}{\sigma_n^2} \right)^{-1} \sum_{n=1}^N \frac{\varepsilon_n}{\sigma_n^2}. \end{aligned} \quad (11)$$

式(11)中使用量化观测值 $\{\bar{x}_n\}_{n=1}^N$ 取代最小均方误差估计器的观测值 $\{x_n\}_{n=1}^N$.

注 1 1) 根据均匀量化器修正后的量化规则, 它是无偏量化并且符合Lloyd-Max量化器原理^[13, 15], 说明它可以最小化均方误差;

2) 式(11)可看成由两部分组成, 一是未量化测量值的最小均方误差估计, 二是由量化引起的误差估计;

3) 其中“准”字是为了区别式(9)和式(11)中两个不同估计器对观测值的处理与取用, 而从式(11)中可见准最小均方误差估计器的描述关于量化观测呈线性函数形式.

3.2 基于最小均方误差估计器的最优比特分配

需要注意的是, 上节中是在每个传感器分配最优比特数时设计估计器, 而接下来则是在设计的估计器均方误差最小时, 反过来求最优的比特数分配.

定理 1 基于准最小均方误差估计器的分配方法: 当传感器的最优量化级数与观测噪声方差成反比时, 基于线性估计器均方误差上界达到最小值, 此时则有

$$q_n^* = \frac{Q}{N} + \log_2 \left(\frac{\left(\prod_{k=1}^N \sigma_k^2 \right)^{\frac{1}{N}}}{\sigma_n^2} \right), \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (12)$$

式中 q_n^* 表示传感器 n 的最优比特率.

证 式(11)描述的估计器均方误差为

$$\begin{aligned} E(\bar{\theta} - \theta)^2 &= E(\bar{\theta} - \hat{\theta} + \hat{\theta} - \theta)^2 = \\ & E(\bar{\theta} - \hat{\theta})^2 + 2E[(\bar{\theta} - \hat{\theta})(\hat{\theta} - \theta)] + E(\hat{\theta} - \theta)^2 \leq \\ & E(\bar{\theta} - \hat{\theta})^2 + 2|E[(\bar{\theta} - \hat{\theta})(\hat{\theta} - \theta)]| + E(\hat{\theta} - \theta)^2. \end{aligned} \quad (13)$$

而由式(8)和式(11)可得

$$\begin{aligned} E(\bar{\theta} - \hat{\theta})^2 &= \\ & \left(\frac{1}{\sigma_\theta^2} + \sum_{n=1}^N \frac{1}{\sigma_n^2}\right)^{-2} E\left(\sum_{n=1}^N \frac{\varepsilon_n}{\sigma_n^2}\right)^2 = \\ & \left(\frac{1}{\sigma_\theta^2} + \sum_{n=1}^N \frac{1}{\sigma_n^2}\right)^{-2} \sum_{n=1}^N \frac{E\varepsilon_n^2}{\sigma_n^4} < \\ & 4W^2 \left(\frac{1}{\sigma_\theta^2} + \sum_{n=1}^N \frac{1}{\sigma_n^2}\right)^{-2} \sum_{n=1}^N \frac{1}{4^{b_n} \sigma_n^4}. \end{aligned} \quad (14)$$

由Cauchy-Schwartz不等式^[29], 对任意两个随机变量 X 和 Y , 有

$$|E(XY)|^2 \leq E X^2 E Y^2. \quad (15)$$

由式(15)(10)和式(14), 有

$$\begin{aligned} |E[(\bar{\theta} - \hat{\theta})(\hat{\theta} - \theta)]| &\leq \\ & \sqrt{E(\bar{\theta} - \hat{\theta})^2 E(\hat{\theta} - \theta)^2} < \\ & 2W \left(\frac{1}{\sigma_\theta^2} + \sum_{n=1}^N \frac{1}{\sigma_n^2}\right)^{-\frac{3}{2}} \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{4^{q_n} \sigma_n^4}\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (16)$$

将式(10)(14)(16)代入式(13), 得

$$\begin{aligned} E(\bar{\theta} - \theta)^2 &< 4W^2 \left(\frac{1}{\sigma_\theta^2} + \sum_{n=1}^N \frac{1}{\sigma_n^2}\right)^{-2} \sum_{n=1}^N \frac{1}{2^{2q_n} \sigma_n^4} + \\ & 4W \left(\frac{1}{\sigma_\theta^2} + \sum_{n=1}^N \frac{1}{\sigma_n^2}\right)^{-\frac{3}{2}} \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{2^{2q_n} \sigma_n^4}\right)^{\frac{1}{2}} + \\ & \left(\frac{1}{\sigma_\theta^2} + \sum_{n=1}^N \frac{1}{\sigma_n^2}\right)^{-1}. \end{aligned} \quad (17)$$

根据上述分析, 优化问题可转换成易求解形式如下.

优化问题转换: 由上述分析可见, 该类分配优化可以转变成较易解决的情况. 式(17)上界为二次式, 式(4)在 Q 受到限定条件下可转变成式(17)中的均方误差上阈值, 即等价于如下极小化函数:

$$J = \sum_{n=1}^N \frac{1}{4^{q_n} \sigma_n^4}. \quad (18)$$

式(18)根据均值不等式可进一步^[29]转化为

$$J = \sum_{n=1}^N \frac{1}{4^{q_n} \sigma_n^4} \geq \frac{N}{(4^Q \prod_{n=1}^N \sigma_n^4)^{\frac{1}{N}}}, \quad (19)$$

且当

$$2^{q_1} \sigma_1^2 = 2^{q_2} \sigma_2^2 = \dots = 2^{q_N} \sigma_N^2. \quad (20)$$

式(19)所述函数 J 达到极小值.

根据式(19)和式(20), 式(17)中的MSE在量化级数刚好反比于噪声方差时出现最小上阈值, 而各节点分配 q_n^* 为如下所示:

$$q_n^* = \frac{Q}{N} + \log_2 \left(\frac{(\prod_{k=1}^N \sigma_k^2)^{\frac{1}{N}}}{\sigma_n^2} \right), \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (21)$$

证毕.

注2 考虑到式(12)中 q_n^* 可能为负数或小数的特殊情况, 故对其进行交替序列比特分配算法^[30]进行修正:

$$\frac{2^{q_i^*}}{2^{q_j^*}} = \frac{\sigma_j^2}{\sigma_i^2}, \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, N, \quad (22)$$

$$q_n^* = \frac{Q}{N} + \log_2 \left(\frac{(\prod_{k=1}^N \sigma_k^2)^{\frac{1}{N}}}{\sigma_n^2} \right), \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (23)$$

而对方差 σ_n^2 按照式(24)修正, 即

$$2\sigma_n^2 \rightarrow \sigma_n^2. \quad (24)$$

如此循环直至所有比特率分完为止.

注3 1) 式(12)表明各传感器分配的最优比特数与自身及整体观测噪声都相关, 意味着与噪声方差紧密相关;

2) 式(12)表明各传感器的最优比特数与总比特数 Q 成正比关系, 而且分配的比特数位数也随着 Q 的增大而增大, 符合实际情况;

3) 在实际设计过程中, 先对各传感器分配完最优比特数, 用无偏均匀量化器进行量化, 最后再根据式(11)完成估计器的设计.

前面讨论了基于最小均方误差估计器的分布式参数估计器设计及最优比特分配方案, 接下来, 将估计器一般化来讨论最优比特分配方案.

4 基于一般类型估计器的最优比特分配

本小节中将在估计器一般化后研究最优比特分配的问题, 首先引入必要的理论原理.

4.1 Bayesian Cramer-Rao 下限(BCRLB)和Fisher 信息

基于观测值信息集 \mathbf{x} 设计, 用于估计随机变量 θ 的估计器的MSE需满足^[31]

$$\text{MSE} \geq \frac{1}{E\left(\frac{\partial \ln f_\theta(\theta)}{\partial \theta}\right)^2 + E\left(\frac{\partial \ln f(\mathbf{x}|\theta)}{\partial \theta}\right)^2}. \quad (25)$$

式(25)不等式右边项即为BCRLB, 不等式中是有关 \mathbf{x} 和 θ 的期望, 式中: $I_\theta = E\left(\frac{\partial \ln f_\theta(\theta)}{\partial \theta}\right)^2$, 则 I_θ 为 θ 的先验Fisher信息, 而 $E\left(\frac{\partial \ln f(\mathbf{x}|\theta)}{\partial \theta}\right)^2$ 表示通过 \mathbf{x} 增加 θ 的Fisher信息, 于是两者之和就是观测值信息集 \mathbf{x} 下 θ 的总Fisher信息.

观测模型(1)中的 θ 和 $\{w_n\}_{n=1}^N$ 都服从高斯分布, 则有^[29]

$$I_\theta = E\left(\frac{\partial \ln f_\theta(\theta)}{\partial \theta}\right)^2 = \frac{1}{\sigma_\theta^2}, \quad (26)$$

$$f(x_n|\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} e^{-\frac{(x_n-\theta)^2}{2\sigma_n^2}}, \quad (27)$$

其中 x_n 为式(1)中观测.

假设理想时观测值信息集 \mathbf{x} 为未量化过的, 且有 $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$, 再根据观测噪声 $\{w_n\}_{n=1}^N$ 的

相互独立性, 存在

$$\mathbb{E}\left(\frac{\partial \ln f(\mathbf{x}|\theta)}{\partial \theta}\right)^2 = \sum_{n=1}^N \mathbb{E}\left(\frac{\partial \ln f(x_n|\theta)}{\partial \theta}\right)^2 = \sum_{n=1}^N \frac{1}{\sigma_n^2}. \quad (28)$$

再将式(26)(28)代入式(25)中可得

$$\text{MSE} \geq \frac{1}{\frac{1}{\sigma_\theta^2} + \sum_{n=1}^N \frac{1}{\sigma_n^2}}. \quad (29)$$

故当传感器和融合中心拥有充足的通信带宽时, 各传感器可以精确传送观测值, 则这种情况下的估计误差只是观测噪声造成的. 而观测噪声满足空间无关下的高斯分布, 此时最小均方误差估计器可用式(9)表示, 而式(10)达到Bayesian Cramer-Rao下界(29).

4.2 最优比特分配设计

本节中先给出一般类型估计器下的最优比特分配定理, 然后将该问题转化成易求解的形式.

定理 2 基于一般类型估计器的分配: 在高精度量化下, 一般类型的均方误差会在节点量化级数恰好反比于噪声方差时出现最小下阈值, 此时则有

$$q_n^* = \frac{Q}{N} + \log_2 \left(\frac{\left(\prod_{k=1}^N \sigma_k^2\right)^{\frac{1}{N}}}{\sigma_n^2} \right), \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (30)$$

证 图2所示观测值经过均匀量化器的处理, 传感器 n 量化观测值二进制形式用 b_n 表示, 而 $b_n = 0, 1, \dots, 2^{q_n} - 1$, I_{b_n} 则是传感器 n 的Fisher信息, 并用 I_B 表示整个网络总的Fisher信息. 二进制形式的量化观测值集 $\{b_n\}_{n=1}^N$ 在给定 θ 时条件独立, 因此有

$$I_B = I_\theta + \sum_{n=1}^N I_{b_n}, \quad (31)$$

其中 $I_{b_n} = \mathbb{E}\left(\frac{\partial \ln p(b_n|\theta)}{\partial \theta}\right)^2$, 表示对随机变量 b_n 和 θ 的函数取期望. 根据式(1)模型, b_n 由 w_n 和 θ 共同决定,

$$\mathbb{E}_{w_n|\theta} \left(\frac{\partial \ln p(b_n|\theta)}{\partial \theta} \right)^2 = \sum_{i=0}^{2^{q_n}-1} \left(\frac{\partial \ln \mathbb{P}\{b_n = i|\theta\}}{\partial \theta} \right)^2 \mathbb{P}\{b_n = i|\theta\}. \quad (32)$$

在式(32)基础上, 又考虑到 w_n 和 θ 相互独立, 则有

$$\begin{aligned} I_{b_n} &= \int \sum_{i=0}^{2^{q_n}-1} \left(\frac{\partial \ln \mathbb{P}\{b_n = i|\theta\}}{\partial \theta} \right)^2 \mathbb{P}\{b_n = i|\theta\} f_\theta(\theta) d\theta = \\ &= \int \sum_{i=0}^{2^{q_n}-1} \frac{(\partial \mathbb{P}\{b_n = i|\theta\})^2}{\mathbb{P}\{b_n = i|\theta\}} f_\theta(\theta) d\theta = \\ &= \int \sum_{i=0}^{2^{q_n}-1} \frac{(\partial \mathbb{P}\{x_n \in [\tau_i^{(n)}, \tau_{i+1}^{(n)}|\theta\})^2}{\mathbb{P}\{x_n \in [\tau_i^{(n)}, \tau_{i+1}^{(n)}|\theta\}}} f_\theta(\theta) d\theta = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int \sum_{i=0}^{2^{q_n}-1} \frac{(p_n(\tau_{i+1}^{(n)} - \theta) - p_n(\tau_i^{(n)} - \theta))^2}{F_n(\tau_{i+1}^{(n)} - \theta) - F_n(\tau_i^{(n)} - \theta)} f_\theta(\theta) d\theta = \\ &= \sum_{i=0}^{2^{q_n}-1} \int \frac{(p_n(\tau_{i+1}^{(n)} - \theta) - p_n(\tau_i^{(n)} - \theta))^2}{F_n(\tau_{i+1}^{(n)} - \theta) - F_n(\tau_i^{(n)} - \theta)} f_\theta(\theta) d\theta. \end{aligned} \quad (33)$$

由于 $w_n \sim \mathcal{N}(0, \sigma_n^2)$, 则有关观测噪声的描述如下:

概率密度函数

$$p_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_n^2}}. \quad (34)$$

累计概率分布函数

$$F_n(x) = \int_{-\infty}^x p_n(x) dx. \quad (35)$$

设 $t = \tau_i^{(n)} - \theta$, $i = 0, 1, \dots, 2^{q_n} - 1$, 并对式(33)引入新的积分变量 t ,

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(p_n(\tau_{i+1}^{(n)} - \theta) - p_n(\tau_i^{(n)} - \theta))^2}{F_n(\tau_{i+1}^{(n)} - \theta) - F_n(\tau_i^{(n)} - \theta)} f_\theta(\theta) d\theta = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(p_n(t + \Delta_n) - p_n(t))^2}{F_n(t + \Delta_n) - F_n(t)} f_\theta(\tau_i^{(n)} - t) dt, \end{aligned} \quad (36)$$

于是

$$\begin{aligned} I_{b_n} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(p_n(t + \Delta_n) - p_n(t))^2}{F_n(t + \Delta_n) - F_n(t)} \sum_{i=0}^{2^{q_n}-1} f_\theta(\tau_i^{(n)} - t) dt. \end{aligned} \quad (37)$$

优化问题转换: 因为传感器观测值范围已界定在 $[-W, W]$, 从而 Δ_n 和 $\{\tau_i^{(n)}\}_{i=1}^{2^{q_n}-1}$ 只与 q_n 相关, 从而可令 $I_{b_n} = W_n(q_n)$, 则最优比特分配问题转换为

$$\begin{cases} \max \sum_{n=1}^N W_n(q_n), \\ \text{s.t.} \sum_{n=1}^N q_n = Q, \quad n = 1, 2, \dots, N. \end{cases} \quad (38)$$

而式(38)所述模型可通过拉格朗日优化算法解得比特最优分配数值解^[32]. 同时考虑使用高精度量化方案 $\{\Delta_n \rightarrow 0\}_{n=1}^N$ 来求解上述问题的解析解. 记第 n 个节点直接观测结果和量化处理后的得分函数分别为

$$\xi_{x_n}(x_n, \theta) = \frac{\partial \ln f(x_n|\theta)}{\partial \theta}, \quad \xi_{b_n}(b_n, \theta) = \frac{\partial \ln p(b_n|\theta)}{\partial \theta}. \quad (39)$$

而式(39)各自对应的Fisher信息为

$$I_{x_n} = \mathbb{E}(\xi_{x_n}^2(x_n, \theta)), \quad I_{b_n} = \mathbb{E}(\xi_{b_n}^2(b_n, \theta)). \quad (40)$$

结合式(28), 对应的Fisher信息在观测噪声方差确定时为常数. 则所求问题在此方案下转化为

$$\begin{cases} \min \sum_{n=1}^N (I_{x_n} - I_{b_n}), \\ \text{s.t.} \sum_{n=1}^N q_n = Q, \quad n = 1, 2, \dots, N. \end{cases} \quad (41)$$

为简化后文的分析过程, 部分变量做如下简化表示: $\xi_{x_n} := \xi_{x_n}(x_n, \theta)$, $\xi_{b_n} := \xi_{b_n}(b_n, \theta)$.

$$E_{x_n|\theta} = (\xi_{x_n}^2) E_{x_n|\theta}((\xi_{x_n} - \xi_{b_n} + \xi_{b_n})^2) = E_{x_n|\theta}((\xi_{x_n} - \xi_{b_n})^2) + 2E_{x_n|\theta}((\xi_{x_n} - \xi_{b_n})\xi_{b_n}) + E_{x_n|\theta}(\xi_{b_n}^2), \quad (42)$$

则量化观测得分函数可重写为

$$\xi_{b_n} = \frac{\partial p(b_n|\theta)}{p(b_n|\theta)} = \frac{\int_{\tau_i^{(n)}}^{\tau_{i+1}^{(n)}} \left(\frac{\partial f(x_n|\theta)}{\partial \theta}\right) dx_n}{\int_{\tau_i^{(n)}}^{\tau_{i+1}^{(n)}} f(x_n|\theta) dx_n} = \frac{\int_{\tau_i^{(n)}}^{\tau_{i+1}^{(n)}} \xi_{x_n} f(x_n|\theta) dx_n}{\int_{\tau_i^{(n)}}^{\tau_{i+1}^{(n)}} f(x_n|\theta) dx_n}. \quad (43)$$

通过式(43)可知 ξ_{b_n} 在 θ 给定时表示未量化得分 ξ_{x_n} 对应区间的质心,再由平面几何基本定理以及对 ξ_{x_n} 做线性均方误差估计^[21],则有

$$E_{x_n|\theta}((\xi_{x_n} - \xi_{b_n})\xi_{b_n}) = 0. \quad (44)$$

对式(42)中 θ 求期望得到

$$I_{x_n} - I_{b_n} = E((\xi_{x_n} - \xi_{b_n})^2). \quad (45)$$

根据上述分析,可得高精度量化情况下 $\Delta_n \rightarrow 0$, ξ_{b_n} 则为 ξ_{x_n} 所在区间的质心,并且有

$$\xi_{x_n} - \xi_{b_n} \approx \xi_{x_n}(x_n, \theta) - \xi_{x_n}(v_n, \theta) \approx \left(\frac{\partial \xi_{x_n}(x_n, \theta)}{\partial x_n}\right)(x_n - v_n), \quad (46)$$

其中 v_n 是给定 b_n 分区下的质心.又因 $\Delta_n \rightarrow 0$ 可使各分区质心用各自的中点值替换,简化了分析与求解过程:

$$E((\xi_{x_n} - \xi_{b_n})^2) = \int \int \left(\frac{\partial \xi_{x_n}}{\partial x_n}\right)^2 (x_n - c_n)^2 f(x_n, \theta) dx_n d\theta = \frac{1}{\sigma_n^4} \int \int (x_n - c_n)^2 f(x_n, \theta) dx_n d\theta = \frac{1}{\sigma_n^4} \int \int (x_n - c_n)^2 f(x_n|\theta) dx_n f_\theta(\theta) d\theta = \frac{\Delta_n^2}{12\sigma_n^4}. \quad (47)$$

优化问题进一步转换:在式(41)(45)和式(47)的基础上,问题被进一步转化为如下描述:

$$\begin{cases} \min \sum_{n=1}^N \frac{W^2}{3 \cdot 4^{q_n} \sigma_n^4}, \\ \text{s.t.} \sum_{n=1}^N q_n = Q. \end{cases} \quad (48)$$

根据均值不等式性质^[29]可以推算出式(22)同为式(48)和式(19)中代价函数为极小值时的条件:

$$q_n^* = \frac{Q}{N} + \log_2 \left(\frac{\left(\prod_{k=1}^N \sigma_k^2\right)^{\frac{1}{N}}}{\sigma_n^2} \right), \quad (49)$$

其中: $n = 1, 2, \dots, N$. 证毕.

注4 1) 基于最小均方误差估计器或一般类型的关于比特数分配的最理想方法是相同的;

2) 无论是分析极小化均方误差的上阈值还是下阈值,最终得到的分配方案是一致的;

3) 本文通过将优化问题逐次简化成更易求解的形式,提出了基于一般类型估计器的方案.

5 仿真研究

本节介绍了如何通过MATLAB验证上述分配方法的有效性和可行性.在仿真实验中设定随机参数服从 $\theta \sim \mathcal{N}(0, 1)$,并且设传感器观测范围 $W = 20$ 和节点数 $N = 10$.在表1中,观测噪声方差固定、总带宽有限情况下整个无线传感器网络的最优比特分配,同时给出了几种总带宽限定下的分配情况.需要注意的是,表1中 $q_n = 0$ 代表传感器未激活.表1可以看出部分节点在总带宽较小时没有投入工作,有利于观测性能好的节点更加高效地利用有限的带宽资源,而噪声大的传感器的观测结果不被纳入后续分析中;而在总带宽足够充足时可激活全部的传感器.

表1 最优比特分配

Table 1 Optimal bit allocation

σ_n^2	Q(30)	Q(40)	Q(50)	Q(60)	Q(70)	Q(80)
0.0025	6	7	8	9	10	11
0.0034	6	7	8	9	10	11
0.0054	5	6	7	8	9	10
0.0095	4	5	6	7	8	9
0.0137	4	5	6	7	8	9
0.0324	3	4	5	6	7	8
0.0723	1	2	3	4	5	6
0.1285	1	2	3	4	5	6
0.1568	0	1	2	3	4	5
0.1821	0	1	2	3	4	5

图3给出本文构造的一般类型和线性估计器的均方误差曲线,是上千次仿真模拟综合的结果.

图3(a)分别给出了最佳分配下准最小均方误差估计器以及平均分配下准最小均方误差估计器的MSE下阈值.可以看出,比特数在最佳分配下估计器的误差总体上较另一种方案更低,说明基于该方案的估计器的性能更好;从图中还可看出两种分配方案下的估计器的MSE在总带宽 Q 大到一定程度后都趋近于其理论上的下阈值.

而对于后者,若网络中采样数量充足,此时有 $N \rightarrow \infty$,可用极大似然估计器(maximum likelihood estimate, MLE)作为一般类型的代表,借此验证本文提出分配方法下估计器的性能,且在该条件下它将无限接近理论下阈值.其中 b_n 的log似然函数^[33]为

$$L_n(\theta) = \sum_{i=0}^{2^{q_n}-1} \delta(i - b_n) \ln(F_n(\tau_{i+1}^{(n)} - \theta) - F_n(\tau_i^{(n)} - \theta)). \quad (50)$$

综合文中条件假设, 可得整个无线传感器网络的联合log似然函数如下:

$$L(\theta) = \ln(f_{\Theta}(\theta)) + \sum_{n=1}^N L_n(\theta). \quad (51)$$

于是, 关于 θ 的极大似然估计器为

$$\bar{\theta}_N = \arg \max_{\theta} \{L(\theta)\}. \quad (52)$$

图3(b)分别给出了极大似然估计器在不同方案下的MSE及其理论下限. 从中可得最优分配下的极大似然估计器性能明显更优于均匀分配下的情况. 该结论与基于线性估计器得到的结论一致.

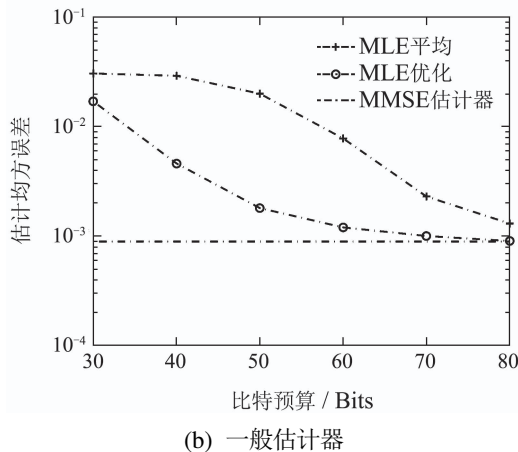
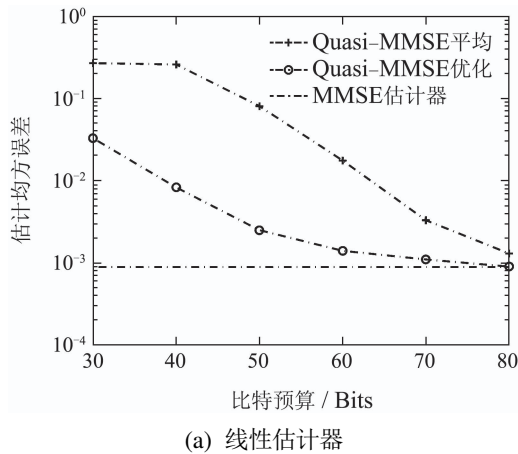


图3 估计器均方误差比较

Fig. 3 Comparison of Estimation MSE

综上, 无论是基于线性估计器还是基于一般类型估计器的MATLAB仿真结果, 都明确表明本文给出的关于比特数的最佳分配法的有效性和可行性.

6 结论

本文以高斯信源-高斯噪声模型为基础, 首先在均匀量化器的基础上构造线性估计器并给出对应的MSE上阈值. 然后最小化该上阈值计算出适用于该类估计器比特数的理想分配方法. 另外结合无偏类型估

计器MSE的BCRLB下阈值, 给出适用于高精度量化条件下对应于一般类型估计器的比特数的最优分配. 最后仿真表明两个方案在高精度均匀量化情况下的结论一致. 此外为避免所提出方案下分配的比特数可能为小数或负数的情形, 引入了比特分配的交替序列算法.

参考文献:

- [1] RAJA B, RAJAKUMAR R, DHAVACHELVAN P, et al. A survey on classification of network structure routing protocols in wireless sensor networks. *International Conference on Computational Intelligence and Computing Research*. Chennai: IEEE, 2016: 1-5.
- [2] WU Yilin, SHEN Zhiping. The tracking problem in networked systems with periodic signal reference input. *Control Theory & Applications*, 2016, 33(5): 685-693.
(邬依林, 沈志萍. 网络化系统周期信号的跟踪. 控制理论与应用, 2016, 33(5): 685-693.)
- [3] SHEN Zhiping, CHEN Junyong, WU Yilin. Distributed quantization estimation and optimal bit allocation for a random variable. *Control Theory & Applications*, 2016, 33(8): 1074-1080.
(沈志萍, 陈军勇, 邬依林. 随机性参数分布式量化估计及其最优比特分配. 控制理论与应用, 2016, 33(8): 1074-1080.)
- [4] CARVALHO F, SANTOS E, IABRUDI A, et al. Indoor wireless sensor localization using mobile robot and RSSI. *IEEE International Conference on Mobile Ad-hoc & Sensor Systems*. Las Vegas: IEEE, 2012: 1-6.
- [5] MOHAMED R E, SALEH A I, ABDELRAZZAK M, et al. Survey on wireless sensor network applications and energy efficient routing protocols. *Wireless Personal Communications*, 2018, 101(6): 1-37.
- [6] XU T, GONG L, ZHANG W, et al. Application of wireless sensor network technology in logistics information system. *American Institute of Physics Conference Series*, 2017, 1834(1): 145-147.
- [7] BEHBAHANI A S, ELTAWIL A M, JAFARKHANI H. Linear estimation of correlated vector sources for wireless sensor networks with fusion center. *IEEE Wireless Communications Letters*, 2012, 1(4): 400-403.
- [8] SANI A, VOSOUGHI A. Distributed vector estimation for power and bandwidth-constrained wireless sensor networks. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2016, 64(15): 3879-3894.
- [9] EPHRAIM Y, GRAY R M. A unified approach for encoding clean and noisy sources by means of waveform and autoregressive model vector quantization. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1988, 34(4): 826-834.
- [10] AYANOGLU E. On optimal quantization of noisy sources. *IEEE Transaction on Information Theory*, 1990, 36(6): 1450-1452.
- [11] LAM W M, REIBMAN A R. Design of quantizers for decentralized estimation systems. *IEEE Transactions on Communication*, 1993, 41(11): 1602-1605.
- [12] GUBNER J A. Distributed estimation and quantization. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1993, 39(4): 1456-1459.
- [13] MAX J. Quantizing for minimum distortion. *IEEE Transactions on Informantion Theory*, 1964, 10(4): 384-385.
- [14] MARANO S, MATTA V, WILLETT P. Asymptotic design of quantizers for decentralized MMSE estimation. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2007, 55(11): 5485-5496.
- [15] LLOYD S P. Least squares quantization in PCM. *IEEE Transactions on Informantion Theory*, 1982, 28(2): 129-137.
- [16] ZHANG K S, LI X R. Optimal sensor data quantization for best linear unbiased estimation fusion. *The 43rd IEEE Conference on Decision and Control*. Nassau: IEEE, 2004: 2656-2661.

- [17] COVER T M, THOMAS J A. *Elements of Information Theory*. The 2nd Edition. Hoboken: John Wiley, 2006.
- [18] VISWANATHAN H, BERGER T. The quadratic gaussian CEO problem. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1997, 43(5): 1549 – 1559.
- [19] PRABHAKARAN V, TSE D, RAMCHANDRAN K. Rate region of the quadratic gaussian CEO problem. *IEEE International Symposium on Information Theory*. Chicago: IEEE, 2004: 119 – 126.
- [20] CHEN J, ZHANG X, BERGER T, et al. An upper bound on the sum-rate distortion function and its corresponding rate allocation schemes for the CEO problem. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 2004, 22(6): 977 – 987.
- [21] GERSHO A, GRAY R. *Vector Quantization and Signal Compression*. MA, USA: Kluwer Academic Publishers Norwell, 1991.
- [22] BUCKLEW J A, GALLAGHER N C. Some properties of uniform step size quantizers. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1980, 26(5): 610 – 613.
- [23] HUI D, NEUHOFF D L. Asymptotic analysis of optimal fixed-rate uniform scalar quantization. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2001, 47(3): 957 – 977.
- [24] TABESH A, MARCELLIN M W, NEIFELD M A. Optimal rate allocation for entropy-coded uniform scalar quantization of dependent sources in nonbinary hypothesis testing. *IEEE Transactions on Communications*, 2010, 58(1): 16 – 20.
- [25] FRAYSSE A, PESQUET P B, PESQUET J C. On the uniform quantization of a class of sparse sources. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2009, 55(7): 3243 – 3263.
- [26] BROCKETT R W, LIBERZON D. Quantized feedback stabilization of linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, 45(7): 1279 – 1289.
- [27] DELCHAMPS D F. Stabilizing a linear system with quantized state feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1990, 35(8): 916 – 924.
- [28] KAY S M. *Fundamentals of Statistical Signal Processing: Estimation Theory*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1993.
- [29] STEELE J M. *An Introduction to the Art of Mathematical Inequalities*. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.
- [30] RAMSTAD T A. Sub-band coder with a simple adaptive bit-allocation algorithm: A possible candidate for digital mobile telephony. *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*. Paris: IEEE, 1982: 203 – 207.
- [31] VAN TREES H L. *Detection, Estimation and Modulation Theory*. New York: Wiley, 2001.
- [32] SHOHAM Y, GERSHO A. Efficient bit allocation for an arbitrary set of quantizers. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 1988, 36(9): 1445 – 1453.
- [33] ZWIERNIK P, UHLER C, RICHARDS D. Maximum likelihood estimation for linear Gaussian covariance models. *Journal of the Royal Statistical Society*, 2017, 79(4): 1269 – 1292.

作者简介:

沈志萍 博士, 副教授, 目前研究方向为网络化控制、分布式量化估计等, E-mail: zpshen@htu.cn;

陈军勇 博士, 高级工程师, 目前研究方向为网络化控制、分布式量化估计等, E-mail: junonchern@zust.edu.cn;

邬依林 博士, 教授, 目前研究方向为分布式信号处理、网络化控制等, E-mail: lyw@gdei.edu.cn.