基于矩阵方法的Banzhaf值的计算及应用

夏美霞, 李海涛†, 丁雪莹, 刘衍胜

(山东师范大学 数学与统计学院, 山东 济南 250014)

摘要: 在合作博弈中, Banzhaf 值提供了每个参与者形成大联盟的预期边际贡献, 因此Banzhaf值的求解是一个重要的研究内容. 本文首先回顾合作博弈及Banzhaf值的定义, 并且运用矩阵半张量积, 给出合作博弈特征函数的代数表示. 然后给出了Banzhaf值的等价的代数形式和简捷的计算方法. 最后将所得结果应用于生物网络中, 用Banzhaf值度量遗传疾病基因相关性的可能性, 确定与遗传疾病发病高度相关的基因.

关键词: 博弈; Banzhaf值; 矩阵半张量积; 微阵列矩阵

引用格式: 夏美霞, 李海涛, 丁雪莹, 等. 基于矩阵方法的 Banzhaf 值的计算及应用. 控制理论与应用, 2020, 37(2): 446 – 452

DOI: 10.7641/CTA.2019.80967

Matrix approach to calculation of Banzhaf value with applications

XIA Mei-xia, LI Hai-tao†, DING Xue-ying, LIU Yan-sheng

(School of Mathematics and Statistics, Shandong Normal University, Jinan Shandong 250014, China)

Abstract: In cooperative games, Banzhaf value provides the expected marginal contribution of each participant to form a major alliance. Therefore, the calculation of Banzhaf value is an important issue. Firstly, this paper recalls the definitions of cooperative game and Banzhaf value, and establishes the algebraic representation for the characteristic function of cooperative game by using the semi-tensor product of the matrices. Secondly, based on the algebraic representation, the equivalent algebraic form of Banzhaf value is presented, and a simple calculation method is provided for Banzhaf value. Finally, the obtained results are applied to biological networks, and the Banzhaf value is used to determine the genes which are highly associated with genetic diseases.

Key words: games; Banzhaf value; semi-tensor product of matrices; microarray matrix

Citation: XIA Meixia, LI Haitao, DING Xueying, et al. Matrix approach to calculation of Banzhaf value with applications. *Control Theory & Applications*, 2020, 37(2): 446 – 452

1 引言

合作博弈描述了有限的一组玩家N可以通过合作产生一定的收益. 在合作博弈中, 单点解是为每个合作博弈分配一个n维的实向量的函数, 这个实向量表示玩家的收益分布. 在过去的几十年, 对合作博弈中单点解的研究引起了国内外很多学者的研究兴趣. 其中, Shapley值和Banzhaf值是最著名的单点解. Shapley值是由Shapley[1]在1953年首次提出. Banzhaf指数最初由Penrose[2]于1946年引入, 后来由Banzhaf [3]于1965年引入投票博弈. 在此背景下, Banzhaf指数被推广为所有合作博弈的Banzhaf值[4]. 这两种单点解将不同的权重与每个联盟[1]联系起来, 它们分配给每个玩家的收益都是玩家所属的任何联盟的边际贡献[2]的平均值. Shapley值给出了每个玩家在随机排序中形成大联盟的预期边际贡献[6–7]. Banzhaf值提供了每个参与者形成大联盟的预期边际贡献, 其中每个联盟以相同的概率形成. Dubey和Shapley[8]证明了Banzhaf值的一些数学性质.

最近, 程代展教授等[9]提出了矩阵半张量积方法(semi-tensor product of matrices), 并使用这种方法来

收稿日期: 2018−12−10; 录用日期: 2019−05−10.

†通信作者. E-mail: haitaoli09@gmail.com; Tel.: +86 15253130216.

本文责任编委: 刘淑君.

国家自然科学基金项目(61873150, 61503225), 山东省自然科学基金项目(JQ201613) 资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (61873150, 61503225) and the Natural Science Foundation of Shandong Province (JQ201613).

[1]联盟[5]: 设$N=\{1,2,\cdots,n\}$, N中的任意一个非空子集K称为一个联盟, 空集$\varnothing$为一个特殊的联盟, 因此n个玩家可以形成2^n个联盟.

[2]边际贡献[5]: 合作博弈中, 对$\forall\ i\in N$ 和满足$i\in K$的每个联盟$K\in 2^N$, i对联盟的边际贡献为$\bar{M}_i=v(K)-v(K\setminus\{i\})$.

研究有限静态博弈和有限演化博弈的建模、分析与控制. 矩阵半张量积方法的主要特征是将策略局势转换成逻辑变量, 这有利于有限博弈的线性表示. 在过去10年, 国内外很多学者使用这种方法研究有限博弈, 建立了很多优秀的研究结果[10–14]. 文献[10]提出了一种用于网络演化博弈的建模、分析和控制的矩阵方法. 文献[12]提出了一种具有多面体策略集的线性动态博弈. 此外矩阵半张量积方法也被应用于布尔网络[15–21]、布尔控制网络[22–29]、自动机理论[30–31]和移位寄存器[32]等问题的研究. 关于矩阵半张量积方法的综述, 参见文献[33–37].

目前Banzhaf值已经在不同场景中得到了广泛应用, 包括联盟结构[38–40]、通信情况[41]、层次关系[42]和邻近关系[43]等. Parmigiani等[44]利用微阵列技术以产生大量关于人类基因表达的信息, 这些数据可用于鉴定导致特定疾病的基因, 从基因表达数据的矩阵推断基因的相互作用以及当生物系统的状况发生变化时它们的行为. Moretti等[45]提出了一种基于联盟博弈的基因表达分析的替代方法. 该方法的主要优点是可以计算称为相关性指数的数值指数, 该指数可以反应特定疾病中每个基因的相关性. 需要指出的是, 目前关于Banzhaf值的计算主要是直接基于定义的求解, 因此很难使用计算机进行辅助求解.

本文利用矩阵半张量积方法研究Banzhaf值计算问题, 并将所得结果应用于生物网络中的遗传疾病基因的相关性研究中. 本文的主要贡献是利用矩阵半张量积方法将Banzhaf值转化成等价的代数形式, 并建立了一个简捷的计算方法. 相较于定义中直接计算的方法, 本文给出的方法便于使用计算机进行辅助求解, 并且适用于求解任意有限合作博弈的Banzhaf值. 由于使用定义计算Banzhaf值与根据本文提出的方法计算Banzhaf值所需的计算量复杂度均为$\mathrm{O}(n2^n)$, 所以本文用一台配置为因特尔酷睿i7–6500U 2.5 GHz CPU的电脑进行MATLAB数值仿真时, 当玩家数超过15时就无法运行了. 数值仿真表明, 在MATLAB容许的玩家数范围内, 与定义相比, 本文给出的计算Banzhaf值的方法所需要的MATLAB运行时间更短.

本文的剩余部分安排如下: 第2节列出了矩阵半张量积的一些必要的预备知识; 第3节给出Banzhaf值的等价代数形式和计算方法; 第4节将得到的结果应用于生物遗传疾病基因的相关性度量; 第5节给出本文的结论.

下面给出本文中用到的符号: $\mathbb{R}$表示实数; $\mathbf{1}_p = [\underbrace{1\ 1\ \cdots\ 1}_{p}]^{\mathrm{T}}$, $\mathcal{L}_{p\times q}$为所有$p\times q$维逻辑矩阵的集合, $\mathcal{D} := \{0,1\}$, $\mathcal{D}^n := \underbrace{\mathcal{D}\times\cdots\times\mathcal{D}}_{n}$; $\varDelta_p := \{\delta_p^i | i=1,2,\cdots,p\}$, 其中$\delta_p^i$表示单位矩阵$I_p$的第$i$列; 一个$n\times t$维逻辑矩阵$M=[\delta_n^{i_1}\ \delta_n^{i_2}\ \cdots\ \delta_n^{i_t}]$, 可以简记为$M=\delta_n\cdot[i_1\ i_2\ \cdots\ i_t]$; $\mathrm{Col}_i(M)$表示矩阵M的第i列, $\mathrm{Col}(M)$表示了矩阵M的所有列组成的集合, 设$M\in\mathbb{R}^{m\times r}$, $N\in\mathbb{R}^{n\times r}$, 则$M*N := [\mathrm{Col}_1(M)\otimes\mathrm{Col}_1(N)\ \cdots\ \mathrm{Col}_r(M)\otimes\mathrm{Col}_r(N)]$, 其中$\otimes$表示矩阵的Kronecker积.

2 预备知识

本文使用的主要数学工具为矩阵半张量积, 定义如下所示.

定义 1[9] 给定两个矩阵$M\in\mathbb{R}^{m\times n}$和$N\in\mathbb{R}^{p\times q}$. 矩阵$M$和$N$的半张量积定义为

$$M\ltimes N = (M\otimes I_{\frac{\alpha}{n}})(N\otimes I_{\frac{\alpha}{p}}), \tag{1}$$

其中α为n和p的最小公倍数.

注 1 矩阵半张量积是普通矩阵乘积的推广, 因此一般省略符号“$\ltimes$”.

下面给出换位矩阵的定义:

定义 2[9] 换位矩阵 $W_{[m,n]}\in\mathcal{L}_{mn\times mn}$定义为

$$\begin{aligned}\delta_{mn}[&1\ \ m+1\ \ \cdots\ \ (n-1)m+1\\ &2\ \ m+2\ \ \cdots\ \ (n-1)m+2\\ &\qquad\qquad\vdots\\ &m\ \ m+m\ \ \cdots\ \ (n-1)m+m].\end{aligned} \tag{2}$$

引理 1[9] 设$X\in\mathbb{R}^m$和$Y\in\mathbb{R}^n$为两个列向量, 则有$W_{[m,n]}XY = YX$.

为了将逻辑映射转化为代数形式, 本文分别使用“δ_2^1”和“δ_2^2”表示“1”和“0”的向量形式.

引理 2[9] 设$f:\mathcal{D}^n\to\mathcal{D}$为一个逻辑映射. 则存在唯一的逻辑矩阵$M_{\mathrm{f}}\in\mathcal{L}_{2\times 2^n}$使得

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n) = M_{\mathrm{f}}\ltimes_{i=1}^n x_i, \tag{3}$$

其中M_{f}称为f的结构矩阵.

定义 3[35] (有限)正规博弈$G=(N,S,C)$由3部分构成, 其中$N=\{1,2,\cdots,n\}$表示有n个玩家, $S=\prod_{i=1}^n S_i$称为局势, S_i为第i个玩家的策略集, $C=\{c_1,\cdots,c_n\}$, $c_i: S\to\mathbb{R}$为第i个玩家的收益函数.

定义 4[35] 一个带有可转移效用[3](transferable utility, TU)的n人合作博弈可由二元结构(N,v)表示, 其中: $N=\{1,2,\cdots,n\}$是玩家集, $v: 2^N\to\mathbb{R}$为特征函数[4], 满足$v(\varnothing)=0$.

3 主要结果

本节给出Banzhaf值的等价代数形式和计算方法. 首先回顾Banzhaf值的定义.

[3]可转移效用[5]: 各个玩家都用相同的尺度来衡量他们的收益, 并且各个联盟的收益都可以用任何方式分配给各玩家.

[4]特征函数[5]: 给定$N=\{1,2,\cdots,n\}$, n人合作博弈的特征函数v是从$2^N=\{K|K\subseteq N\}$到实数集$\mathbb{R}$的映射.

设$K \subseteq N$, 则K是一个联盟, $v(K)$表示合作博弈中联盟K的收益. 记

$$x_j^K = \begin{cases} \delta_2^1,\ j \in K, \\ \delta_2^2,\ 其他. \end{cases}$$

则由式(3), 可以找到v的结构向量$M_{\rm v}$使得

$$v(K) = M_{\rm v} \ltimes_{i=1}^n x_i^K, \tag{4}$$

其中$M_{\rm v} \in \mathbb{R}^{1\times 2^n}$.

为了方便下面的计算与应用, 这里先定义一个无异议博弈.

定义 5[46] 一个在$R\subseteq N$上的无异议博弈(N, u_R)定义为

$$u_R(K) = \begin{cases} 1,\ R \subseteq K, \\ 0,\ 其他. \end{cases}$$

Banzhaf 值提供了每个参与者形成大联盟的预期边际贡献, 其中每个联盟以相同的概率形成. 下面给出Banzhaf值的定义.

定义 6[4] 给定合作博弈(N, v), 其Banzhaf值β是一个定义在$\mathbb{R}^n$上的向量:

$$\beta(v) = (\beta_1(v)\ \ \beta_2(v)\ \ \cdots\ \ \beta_n(v)),$$

其中:

$$\beta_i(v) = \sum_{K\subseteq 2^N;\, i\in K} \frac{1}{2^{n-1}}(v(K) - v(K\setminus\{i\})), \tag{5}$$

其中$i = 1, 2, \cdots, n$.

下面使用矩阵半张量积方法研究式(5), 给出Banzhaf值的等价代数形式和计算方法.

由式(4)和换位矩阵的性质可得

$$\begin{aligned}
&v(K) - v(K\setminus\{i\}) = \\
&M_{\rm v}x_1^K\cdots x_{i-1}^K \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} x_{i+1}^K\cdots x_n^K - \\
&M_{\rm v}x_1^K\cdots x_{i-1}^K \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} x_{i+1}^K\cdots x_n^K = \\
&M_{\rm v}W_{[2,2^{i-1}]} \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} x_1^K\cdots x_{i-1}^K x_{i+1}^K\cdots x_n^K - \\
&M_{\rm v}W_{[2,2^{i-1}]} \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} x_1^K\cdots x_{i-1}^K x_{i+1}^K\cdots x_n^K = \\
&M_{\rm v}W_{[2,2^{i-1}]} \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} x_1^K\cdots x_{i-1}^K x_{i+1}^K\cdots x_n^K,
\end{aligned}$$

其中$M_{\rm v}$是v的结构向量.

由于对任意的$l = 1, \cdots, n$, $x_l^K \in \{\delta_2^1, \delta_2^2\}$, 即$l \in K$时, $x_l^K = \delta_2^1$, $l \notin K$时$x_l^K = \delta_2^2$. 本文令

$$x_1^K\cdots x_{i-1}^K x_{i+1}^K\cdots x_n^K = \delta_{2^{n-1}}^j,$$

其中$j \in \{1, 2, \cdots, 2^{n-1}\}$. 则对于任意的$i = 1, 2, \cdots, n$, 式(5)可表示为

$$\begin{aligned}
\beta_i(v) = &\sum_{K\subseteq 2^N;\, i\in K} \frac{1}{2^{n-1}}(v(K) - v(K\setminus\{i\})) = \\
&\sum_{j=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{2^{n-1}} M_{\rm v}W_{[2,2^{i-1}]} \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} \delta_{2^{n-1}}^j.
\end{aligned}$$

构造矩阵$\varLambda_i \in \mathbb{R}^{2^n\times 2^{n-1}}$, $i = 1, 2, \cdots, n$如下:

$$\begin{aligned}
&\varLambda_i = (W_{[2,2^{i-1}]} \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}) \otimes I_{2^{n-i}} = \\
&\begin{bmatrix}
\begin{bmatrix} I_{2^{n-i}} \\ -I_{2^{n-i}} \end{bmatrix} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \begin{bmatrix} I_{2^{n-i}} \\ -I_{2^{n-i}} \end{bmatrix} & \cdots & \mathbf{0} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \begin{bmatrix} I_{2^{n-i}} \\ -I_{2^{n-i}} \end{bmatrix}
\end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

其中$\mathbf{0}$表示$2^{n-i+1} \times 2^{n-i}$维零矩阵.

容易得出

$$W_{[2,2^{i-1}]} \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} \delta_{2^{n-1}}^j = {\rm Col}_j(\varLambda_i).$$

因此,

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{2^{n-1}} W_{[2,2^{i-1}]} \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} \delta_{2^{n-1}}^j = \\
&\sum_{j=1}^{2^{n-1}} {\rm Col}_j(\varLambda_i) = \varLambda_i \mathbf{1}_{2^{n-1}} = \\
&\begin{bmatrix} \mathbf{1}_{2^{n-i}} \\ -\mathbf{1}_{2^{n-i}} \\ \vdots \\ \mathbf{1}_{2^{n-i}} \\ -\mathbf{1}_{2^{n-i}} \end{bmatrix} := E_i,
\end{aligned} \tag{6}$$

这里E_i是一个2^n维列向量, $i = 1, 2, \cdots, n$.

因此式(5)可重新表示为下式

$$\begin{aligned}
\beta_i(v) = &\sum_{j=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{2^{n-1}} M_{\rm v}W_{[2,2^{i-1}]} \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} \delta_{2^{n-1}}^j = \\
&\frac{1}{2^{n-1}} M_{\rm v}E_i,\ i = 1, 2, \cdots, n.
\end{aligned} \tag{7}$$

基于以上分析, 得到如下计算Banzhaf值的代数表示办法.

定理 1 给定合作博弈(N, v), 其中: $N = \{1, \cdots, n\}$, $M_{\rm v}$是v的结构矩阵. 则该合作博弈的Banzhaf值可计算如下:

$$\beta(v) = M_{\rm v}\varPsi_n, \tag{8}$$

其中

$$\varPsi_n=\frac{1}{2^{n-1}}\left[\begin{bmatrix}\mathbf{1}_{2^{n-1}}\\-\mathbf{1}_{2^{n-1}}\end{bmatrix}\ \begin{bmatrix}\mathbf{1}_{2^{n-2}}\\-\mathbf{1}_{2^{n-2}}\\\mathbf{1}_{2^{n-2}}\\-\mathbf{1}_{2^{n-2}}\end{bmatrix}\cdots\begin{bmatrix}\mathbf{1}_1\\-\mathbf{1}_1\\\vdots\\\mathbf{1}_1\\-\mathbf{1}_1\end{bmatrix}\right] \tag{9}$$

是一个$2^n\times n$维矩阵.

证 由于该合作博弈的Banzhaf值为

$$\beta(v)=(\beta_1(v)\ \ \beta_2(v)\ \ \cdots\ \ \beta_n(v)).$$

由式(7)可得

$$\beta(v)=\left(\frac{1}{2^{n-1}}M_{\rm v}E_1\ \ \frac{1}{2^{n-1}}M_{\rm v}E_2\ \ \cdots\ \ \frac{1}{2^{n-1}}M_{\rm v}E_n\right)=\frac{1}{2^{n-1}}M_{\rm v}(E_1\ \ E_2\ \ \cdots\ \ E_n).$$

又通过式(6), 可以计算出

$$E_1=\begin{bmatrix}\mathbf{1}_{2^{n-1}}\\-\mathbf{1}_{2^{n-1}}\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{2^n\times 1},$$

$$E_2=\begin{bmatrix}\mathbf{1}_{2^{n-2}}\\-\mathbf{1}_{2^{n-2}}\\\mathbf{1}_{2^{n-2}}\\-\mathbf{1}_{2^{n-2}}\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{2^n\times 1},$$

$$\vdots$$

$$E_n=\begin{bmatrix}\mathbf{1}_1\\-\mathbf{1}_1\\\vdots\\\mathbf{1}_1\\-\mathbf{1}_1\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{2^n\times 1}.$$

因此,

$$\beta(v)=\frac{M_{\rm v}}{2^{n-1}}\left[\begin{bmatrix}\mathbf{1}_{2^{n-1}}\\-\mathbf{1}_{2^{n-1}}\end{bmatrix}\ \begin{bmatrix}\mathbf{1}_{2^{n-2}}\\-\mathbf{1}_{2^{n-2}}\\\mathbf{1}_{2^{n-2}}\\-\mathbf{1}_{2^{n-2}}\end{bmatrix}\cdots\begin{bmatrix}\mathbf{1}_1\\-\mathbf{1}_1\\\vdots\\\mathbf{1}_1\\-\mathbf{1}_1\end{bmatrix}\right]=M_{\rm v}\varPsi_n.$$

证毕.

例 1 考虑一个合作博弈(N,v), 其中$N=\{1,2,3\}$, 特征函数的结构矩阵如下:

$$M_{\rm v}=[90\ \ 55\ \ 38\ \ 40\ \ 26\ \ 90\ \ 35\ \ 0].$$

由式(9)可以得到式(10), 因此可以计算出这个合作博弈的Banzhaf值为$\beta(v)=M_{\rm v}\varPsi_3=[18\ \ 37\ \ 1]$.

$$\varPsi_3=\frac{1}{2^{3-1}}\left[\begin{bmatrix}\mathbf{1}_{2^{3-1}}\\-\mathbf{1}_{2^{3-1}}\end{bmatrix}\ \begin{bmatrix}\mathbf{1}_{2^{3-2}}\\-\mathbf{1}_{2^{3-2}}\\\mathbf{1}_{2^{3-2}}\\-\mathbf{1}_{2^{3-2}}\end{bmatrix}\ \begin{bmatrix}\mathbf{1}_1\\-\mathbf{1}_1\\\mathbf{1}_1\\-\mathbf{1}_1\\\mathbf{1}_1\\-\mathbf{1}_1\\\mathbf{1}_1\\-\mathbf{1}_1\end{bmatrix}\right]=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&-1\\1&-1&1\\1&-1&-1\\-1&1&1\\-1&1&-1\\-1&-1&1\\-1&-1&-1\end{bmatrix}. \tag{10}$$

因此, 可以计算出这个合作博弈的Banzhaf值为

$$\beta(v)=M_v\varPsi_3=[18\ \ 37\ \ 1].$$

例 2 考虑手套市场博弈[47]. 假设玩家集合$N=\{1,\cdots,n\}$可分为两个互不相交的子集L和R. L中的玩家每个人有一只左手套, R中的玩家每个人有一只右手套. 左右手套两只搭配起来可以产生价值1美元, 而单独一只手套没有任何价值. 本文可以用n人合作博弈(N,v)来表示这个问题: $v(K)=\min\{|L\cap K|,|R\cap K|\}$, $\forall K\in 2^N$.

假设

当$n=5$时, $L=\{1,2,5\}$, $R=\{3,4\}$;

当$n=6$时, $L=\{2,3,5\}$, $R=\{1,4,6\}$;

当$n=7$时, $L=\{2,6\}$, $R=\{1,3,4,5,7\}$;

当$n=8$时, $L=\{1,2,3\}$, $R=\{4,5,6,7,8\}$;

当$n=9$时, $L=\{1,4,5,6\}$, $R=\{2,3,7,8,9\}$;

当$n=10$时, $L=\{2,3,5,6,8,9,10\}$, $R=\{1,4,7\}$;

当$n=11$时, $L=\{2,4,6,7,9,10,11\}$, $R=\{1,3,5,8\}$;

当$n=12$时,

$$L=\{2,6,7,9,10,11\},\ R=\{1,3,4,5,8,12\};$$

当$n=13$时,

$$L=\{1,2,4,6,7,9,10,11\},\ R=\{3,5,8,12,13\};$$

当$n=14$时,

$$L=\{2,4,6,7,9,10,11,14\},\ R=\{1,3,5,8,12,13\}.$$

本文用一台配置为因特尔酷睿i7–6500U 2.5 GHz CPU的电脑进行MATLAB数值仿真, 对不同的n分别用定义6和定理1计算Banzhaf值, 并得出所用的运行时间, 见表1. 表中方法1是用定义6直接计算, 方法2是用定理1提出的代数表示计算的, 而最后一列就是得出的Banzhaf值. 当$n\geqslant 15$时, 使用该配置的电脑在这两种方法下都无法再进行MATLAB数值仿真.

表 1 不同玩家数下计算Banzhaf值的两种方法所用MATLAB运行时间比较

Table 1 Comparisons of the running time of MATLAB for two methods of calculating Banzhaf value under different number of players

玩家数	方法1[4]时间/s	方法2(定理1)时间/s	Banzhaf值
5	0.025	0.024	[0.3125 0.3125 0.6875 0.6875 0.3125]
6	0.029	0.026	[0.5000 0.5000 0.5000 0.5000 0.5000 0.5000]
7	0.034	0.028	[0.1094 0.8906 0.1094 0.1094 0.1094 0.8906 0.1094]
8	0.050	0.032	[0.7734 0.7734 0.7734 0.2266 0.2266 0.2266 0.2266 0.2266]
9	0.083	0.045	[0.6367 0.3633 0.3633 0.6367 0.6367 0.6367 0.3633 0.3633 0.3633]
10	0.183	0.096	[0.9102 0.0898 0.0898 0.9102 0.0898 0.0898 0.9102 0.0898 0.0898 0.0898]
11	0.343	0.273	[0.8281 0.1719 0.8281 0.1719 0.8281 0.1719 0.1719 0.8281 0.1719 0.1719 0.1719]
12	0.869	0.771	[0.5000 0.5000 0.5000 0.5000 0.5000 0.5000 0.5000 0.5000 0.5000 0.5000 0.5000 0.5000]
13	1.532	1.433	[0.1938 0.1938 0.8062 0.1938 0.8062 0.1938 0.1938 0.8062 0.1938 0.1938 0.1938 0.8062 0.8062]
14	3.530	3.273	[0.7095 0.2905 0.7095 0.2905 0.7095 0.2905 0.2905 0.7095 0.2905 0.2905 0.2905 0.7095 0.7095 0.2905]

注 2 经过分析作者发现, 根据定义6计算Banzhaf值与根据本文提出的定理1计算Banzhaf 值所需的计算量复杂度均为O$(n2^n)$. 但是, 本文建立的代数表示方法在形式上对Banzhaf值的计算更加简洁. 并且由于定理1提出的代数表示方法将子集的信息存储在矩阵Ψ_n中, 所以通过表1可以看出, 与定义6相比, 定理1计算Banzhaf值所需要的MATLAB运行时间更短.

4 应用

生命活动中, 基因表达发生改变是一种常见的现象, 也是生物学研究的核心问题. 通过对基因差异表达的研究, 可以推断细胞分化中基因“开启”或“关闭”的机制, 揭示基因与疾病的发生, 发展, 转归的内在联系. 近年来, 一种称为微阵列技术的新的研究方法被提出[44], 利用该技术可以产生大量关于人类基因表达的信息, 可用于鉴定导致特定疾病的基因. 然后通过某种判别方法, 将基因表达信息转化为一个布尔表达矩阵, 称之为微阵列矩阵, 利用该矩阵推断基因的相互作用以及当生物系统的状况发生变化时它们的行为.

$N=\{1,2,\cdots,n\}$是n个基因的集合. $S_{\rm R}=\{S_1^{\rm R}, S_2^{\rm R},\cdots,S_r^{\rm R}\}$是来自正常组织的一组细胞集合, $S_{\rm D}=\{S_1^{\rm D},S_2^{\rm D},\cdots,S_d^{\rm D}\}$ 是具有遗传疾病的组织的细胞集合. $A_{ij}\in\mathbb{R}$表示在样本$j(j\in S_{\rm R}\cup S_{\rm D})$ 中基因i的表达值. $S_{\rm R}$和$S_{\rm D}$中样本的表达矩阵分别定义为$A^{S_{\rm R}}=(A_{ij}^{S_{\rm R}})_{i\in N,\,j\in S_{\rm R}}$和$A^{S_{\rm D}}=(A_{ij}^{S_{\rm D}})_{i\in N,\,j\in S_{\rm D}}$. 微阵列实验情况(microarray experiment situation, MES)可表示为一个5元组$E=\langle N,S_{\rm R},S_{\rm D},A^{S_{\rm R}}, A^{S_{\rm D}}\rangle$. 实验的目的是将样本与表达局势相关联, 并根据某个判别方法m来判断$S_{\rm D}$中样本的基因关于$S_{\rm R}$中样本的表达值是否出现异常. 本文用“1”表示异常表达的基因, 用“0”表示正常表达的基因. 使用这个判别方法m可以得出相应的布尔表达矩阵即微阵列矩阵, 记为M.

给定一个微阵列矩阵$M=(m_{ij})$. 对于M的一个列$m_{\cdot j}$, $j=1,\cdots,d$, 定义了它的支撑为$\tilde{s}(m_{\cdot j})=\{i:m_{ij}=1\}$. 注意到对微阵列矩阵的每一列$j$, 至少存在一个$i$使得$m_{ij}\neq 0$.

为了反映特定疾病中每个基因的相关性, Moretti等[45]提出了一种基于联盟博弈的基因表达分析的替代方法, 利用该方法计算称为相关性指数的数值指数. Banzhaf值作为合作博弈的一个单点解, 提供了每个参与者形成大联盟的预期边际贡献. 基于此, Lucchetti等[46]提出了使用Banzhaf值来度量基因相关性的方法. 但是该文中Banzhaf值的计算是直接基于定义的求解, 很难使用计算机进行辅助求解. 下面本文将得到的Banzhaf值的计算方法应用于生物遗传疾病基因的相关性度量.

例 3 给定一个$n=4$的微阵列实验情况和判别方法m, 它对应的微阵列矩阵为

$$M=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&0&1\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

下面用Banzhaf值度量基因与肿瘤发作的相关性.

显然M的列对应的支撑分别为$\tilde{s}(m_{\cdot 1})=\{1,3\}$, $\tilde{s}(m_{\cdot 2})=\{3\}$, $\tilde{s}(m_{\cdot 3})=\{1,2,4\}$.

由于微阵列博弈的特征函数v是根据基因组的充分性原则, 为每个联盟$K \in 2^N$分配由K确定的肿瘤样本的平均数, 计算的等价方法是如下无异议博弈的和:

$$v(K)=\frac{1}{d}\sum_{j=1}^{d}u_{\tilde{s}(m_{\cdot j})}(K),$$

其中:

$$u_{\tilde{s}(m_{\cdot j})}(K)=\begin{cases}1,\ \tilde{s}(m_{\cdot j})\subseteq K,\\ 0,\ 其他.\end{cases}$$

于是M对应的$v(K)$计算为

$$v(K)=\frac{1}{3}(u_{\{1,3\}}(K)+u_{\{3\}}(K)+u_{\{1,2,4\}}(K)),$$

因此可以得到

$$\begin{aligned}&v(\{1\})=v(\{2\})=v(\{4\})=v(\varnothing)=0,\\&v(\{1,2\})=v(\{1,4\})=v(\{2,4\})=0,\\&v(\{3\})=v(\{2,3\})=v(\{3,4\})=\\&v(\{2,3,4\})=v(\{1,2,4\})=\frac{1}{3},\\&v(\{1,3\})=v(\{1,2,3\})=v(\{1,3,4\})=\frac{2}{3},\\&v(\{1,2,3,4\})=1,\end{aligned}$$

从而可得v的结构矩阵为

$$M_{\mathrm{v}}=[1\ \ \frac{2}{3}\ \ \frac{1}{3}\ \ 0\ \ \frac{2}{3}\ \ \frac{2}{3}\ \ 0\ \ 0\ \ \frac{1}{3}\ \ \frac{1}{3}\ \ 0\ \ 0\ \ \frac{1}{3}\ \ \frac{1}{3}\ \ 0\ \ 0].$$

由式(9)可以得到

$$\varPsi_4=\frac{1}{2^{4-1}}\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{1}_{2^{4-1}}\\-\mathbf{1}_{2^{4-1}}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\mathbf{1}_{2^{4-2}}\\-\mathbf{1}_{2^{4-2}}\\\mathbf{1}_{2^{4-2}}\\-\mathbf{1}_{2^{4-2}}\end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix}\mathbf{1}_1\\-\mathbf{1}_1\\\vdots\\\mathbf{1}_1\\-\mathbf{1}_1\end{bmatrix}\end{bmatrix}.$$

由定理1, 可以计算出这个合作博弈的Banzhaf值为

$$\beta(v)=M_{\mathrm{v}}\varPsi_4=[\frac{1}{4}\ \ \frac{1}{12}\ \ \frac{1}{2}\ \ \frac{1}{12}].$$

因此可以得到确定肿瘤发作的最重要的基因是基因3, 其次是基因1, 最后是基因2和基因4.

5 结论

本文研究了合作博弈的Banzhaf值的求解问题. 利用矩阵半张量积方法, 给出了合作博弈特征函数的代数表示, 基于此给出了Banzhaf值的等价代数形式和计算方法. 本文还将所得结果应用于生物网络中遗传疾病基因的相关性问题中, 利用Banzhaf值度量与疾病发作高度相关的基因.

由于使用定义6计算Banzhaf值与根据本文提出的定理1计算Banzhaf值所需的计算量复杂度均为$\mathrm{O}(n2^n)$, 所以本文用一台配置为因特尔酷睿i7–6500 U 2.5 GHz CPU的电脑进行MATLAB数值仿真时, 当玩家数超过15时就无法运行了. 数值仿真表明, 与定义6相比, 定理1计算Banzhaf值所需要的MATLAB运行时间更短.

参考文献:

[1] SHAPLEY L S. A value for n-person games. *Annals of Mathematical Studies*, 1953, 28: 307 – 317.

[2] PENROSE L S. The elementary statistics of majority voting. *Journal of the Royal Statistical Society*, 1946, 109(1): 53 – 57.

[3] BANZHAF J F. Weighted voting doesn't work: A mathematical analysis. *Rutgers Law Review*, 1965, 19(2): 317 – 343.

[4] OWEN G. Multilinear extensions and the banzhaf value. *Naval Research Logistics Quarterly*, 1975, 22(4): 741 – 750.

[5] TAN Chunqiao, ZHANG Qiang. *Theory and Application of Cooperative Games*. Beijing: Science Press, 2011.
(谭春桥, 张强. 合作对策理论及应用. 北京: 科学出版社, 2011.)

[6] LIU Bin, CHEN Laijun, WANG Yuchen, et al. Allocating reserve cost for hedging against wind generation uncertainty: A coalitional-game-theoretic approach. *Control Theory & Applications*, 2016, 33(4): 437 – 445.
(刘斌, 陈来军, 汪雨辰, 等. 应对风电出力不确定性的备用成本分摊: 联盟博弈方法. 控制理论与应用, 2016, 33(4): 437 – 445.)

[7] ZHAO Min, SHEN Chen, LI Shunxin, et al. Coalitional game theoretic method to study multi-microgrids cooperation condition considering outage risk. *Control Theory & Applications*, 2018, 35(5): 688 – 698.
(赵敏, 沈沉, 李顺昕, 等. 采用联盟型博弈考虑停电风险的多微电网合作条件研究. 控制理论与应用, 2018, 35(5): 688 – 698.)

[8] DUBEY P, SHAPLEY L S. Mathematical properties of the Banzhaf power index. *Mathematics of Operations Research*, 1979, 4(2): 99 – 131.

[9] CHENG D Z, QI H S, LI Z Q. *Analysis and Control of Boolean Networks: A Semi-tensor Product Approach*. London: Springer, 2011.

[10] CHEN H, LI X, SUN J. Stabilization, controllability and optimal control of Boolean networks with impulsive effects and state constraints. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2015, 60(3): 806 – 811.

[11] LI C X, HE F H, LIU T, et al. Verification and dynamics of group-based potential games. *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, 2018. DOI: 10.1109/TCNS.2018.2808138.

[12] WU Y H, TOYODA M, SHEN T. Linear dynamic games with polytope strategy sets. *IET Control Theory & Applications*, 2017, 11(13): 2146 – 2151.

[13] ZHANG Jianlei, LI Zhiqi, CAO Ming. Control of states based on evolutionary games in multi-agent systems. *Control Theory & Applications*, 2018, 35(5): 601 – 609.
(张建磊, 李智琦, 曹明. 多智能体系统中基于演化博弈的群体状态控制. 控制理论与应用, 2018, 35(5): 601 – 609.)

[14] ZHU B, XIA X H, WU Z. Evolutionary game theoretic demand-side management and control for a class of networked smart grid. *Automatica*, 2016, 70: 94 – 100.

[15] GUO Y Q, WANG P, GUI W H, et al. Set stability and set stabilization of Boolean control networks based on invariant subsets. *Automatica*, 2015, 61: 106 – 112.

[16] HAN Ji, ZHANG Huaguang, TIAN Hui. Complete synchronization of the periodically time-variant Boolean networks. *Control Theory & Applications*, 2016, 33(7): 863 – 869.
(韩吉, 张化光, 田辉. 周期时变布尔网络的完全同步化. 控制理论与应用, 2016, 33(7): 863 – 869.)

[17] LI Haitao, WANG Yuzhen. Stability analysis for switched singular Boolean networks. *Control Theory & Applications*, 2014, 31(7): 908 – 914.
(李海涛, 王玉振. 切换奇异布尔网络的稳定性分析. 控制理论与应用, 2014, 31(7): 908 – 914.)

[18] MENG M, LIU L, FENG G. Stability and l_1 gain analysis of Boolean networks with Markovian jump parameters. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, 62(8): 4222 – 4228.

[19] ZHANG L J, ZHANG K Z. Controllability and observability of Boolean control networks with time-variant delays in states. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2013, 24(9): 1478 – 1484.

[20] ZHONG J, LU J Q, LIU Y, et al. Synchronization in an array of output-coupled Boolean networks with time delay. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2014, 25(12): 2288 – 2294.

[21] ZOU Y L, ZHU J D. Kalman decomposition for Boolean control networks. *Automatica*, 2015, 54: 65 – 71.

[22] CHENG D Z, HE F H, QI H S, et al. Analysis and control of networked evolutionary games. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2015, 60(9): 2402 – 2415.

[23] FORNASINI E, VALCHER M E. Observability, reconstructibility and state observers of Boolean control networks. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, 58(6): 1390 – 1401.

[24] LASCHOV D, MARGALIOT M. A maximum principle for single-input Boolean control networks. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2011, 56(4): 913 – 917.

[25] LI F F, TANG Y. Set stabilization for switched Boolean control networks. *Automatica*, 2017, 78: 223 – 230.

[26] LI H T, XIE L H, WANG Y Z. On robust control invariance of Boolean control networks. *Automatica*, 2016, 68: 392 – 396.

[27] LI R, YANG M, CHU T G. State feedback stabilization for Boolean control networks. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, 58(7): 1853 – 1857.

[28] LIU Y, CHEN H W, LU J Q, et al. Controllability of probabilistic Boolean control networks based on transition probability matrices. *Automatica*, 2015, 52: 340 – 345.

[29] SONG Pingping, LI Haitao, YANG Qiqi, et al. Pinning output tracking control of multi-valued logical networks. *Control Theory & Applications*, 2016, 33(9): 1200 – 1206.
(宋平平, 李海涛, 杨琪琪, 等. 多值逻辑网络的输出跟踪牵制控制. 控制理论与应用, 2016, 33(9): 1200 – 1206.)

[30] HAN Xiaoguang, CHEN Zengqiang, LIU Zhongxin, et al. Calculation of siphons and traps in Petri nets using semi-tensor product of matrices. *Control Theory & Applications*, 2016, 33(7): 849 – 855.
(韩晓光, 陈增强, 刘忠信, 等. Petri网信标和陷阱计算的矩阵半张量积方法. 控制理论与应用, 2016, 33(7): 849 – 855.)

[31] XU X R, HONG Y G. Matrix approach to model matching of asynchronous sequential machines. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, 58(11): 2974 – 2979.

[32] LU J Q, LI M L, LIU Y, et al. Nonsingularity of grain-like cascade FSRs via semi-tensor product. *Science China Information Sciences*, 2018, 61(1): 010204.

[33] CHENG Daizhan, FU Shihua. A survey on game theoretical control. *Control Theory & Applications*, 2018, 35(5): 588 – 592.
(程代展, 付世华. 博弈控制论简述. 控制理论与应用, 2018, 35(5): 588 – 592.)

[34] CHENG Daizhan, QI Honsheng. Algebraic state space approach to logical dynamic systems and its applications. *Control Theory & Applications*, 2014, 31(12): 1632 – 1639.
(程代展, 齐洪胜. 逻辑系统的代数状态空间方法的基础、现状及其应用. 控制理论与应用, 2014, 31(12): 1632 – 1639.)

[35] CHENG Daizhan, XIA Yuanqing, MA Hongbin, et al. *Matrix Algebra, Control and Game*. Beijing: Beijing Institute of Technology Press, 2016.
(程代展, 夏元清, 马宏宾, 等. 矩阵代数、控制与博弈. 北京: 北京理工大学出版社, 2016.)

[36] LI H T, ZHAO G D, MENG M, et al. A survey on applications of semi-tensor product method in engineering. *Science China Information Sciences*, 2018, 61(1): 010202.

[37] LU J Q, LI H T, LIU Y, et al. Survey on semi-tensor product method with its applications in logical networks and other finite-valued systems. *IET Control Theory & Applications*, 2017, 11(13): 2040 – 2047.

[38] ALGABA E, BILBAO J M, VAN DEN BRINK R, et al. An axiomatization of the Banzhaf value for cooperative games on antimatroids. *Mathematical Methods of Operations Research*, 2004, 59(1): 147 – 166.

[39] AUMANN R J, DREZE J H. Cooperative games with coalition structures. *International Journal of Game Theory*, 1974, 3(4): 217 – 237.

[40] MUROS F J, ALGABA E, MAESTRE J M, et al. The Banzhaf value as a design tool in coalitional control. *Systems & Control Letters*, 2017, 104: 21 – 30.

[41] MYERSON R B. Graphs and cooperation in games. *Mathematics of Operations Research*, 1977, 2(3): 225 – 229.

[42] GILLES R P, OWEN G, VAN DER B R. Games with permission structures: The conjunctive approach. *International Journal of Game Theory*, 1992, 20(3): 277 – 293.

[43] FERNANDEZ J R, GALLEGO I, JIMENEZ-LOSADA A, et al. A Banzhaf value for games with a proximity relation among the agents. *International Journal of Approximate Reasoning*, 2017, 88: 192 – 208.

[44] PARMIGIANI G, GARRETT E S, IRIZARRY R A, et al. *The Analysis of Gene Expression Data: Methods and Software*. New York: Springer, 2003.

[45] MORETTI S, PATRONE F, BONASSI S. The class of microarray games and the relevance index for genes. *Top*, 2007, 15(2): 256 – 280.

[46] LUCCHETTI R, MORETTI S, PATRONE F, et al. The Shapley and Banzhaf values in microarray games. *Computers & Operations Research*, 2010, 37(8): 1406 – 1412.

[47] AUMANN R J. An axiomatization of the non-transferable utility value. *Econometrica*, 1985, 53(3): 599 – 612.

作者简介:

夏美霞 硕士研究生, 目前研究方向为博弈论, E-mail: xiameixia12@126.com;

李海涛 教授, 博士生导师, 目前研究方向为有限值动态系统的分析与控制, E-mail: haitaoli09@gmail.com;

丁雪莹 硕士研究生, 目前研究方向为随机逻辑动态系统, E-mail: 18366137906@163.com;

刘衍胜 教授, 博士生导师, 目前研究方向为非线性泛函分析, E-mail: yanshliu@gmail.com.