

双连杆刚柔机械臂无残余振动位置控制

孟庆鑫, 赖旭芝, 闫 泽, 王亚午[†], 吴 敏

(中国地质大学(武汉) 自动化学院, 湖北 武汉 430074; 复杂系统先进控制与智能化湖北省重点实验室, 湖北 武汉 430074)

摘要: 针对双连杆刚柔机械臂, 提出一种基于轨迹规划的无残余振动位置控制方法, 在将机械臂的末端执行器从任意初始位置移动到目标位置的同时, 确保系统没有残余振动产生。首先, 建立系统的动力学模型, 并通过分析该模型得到系统的状态约束方程。其次, 基于状态约束方程, 运用双向轨迹规划方法规划一条系统前向轨迹和一条系统反向轨迹。然后, 利用时间倒转方法及基于遗传算法的轨迹优化方法对两条轨迹进行拼合, 得到一条从系统初始状态到目标状态的期望轨迹。最后, 设计轨迹跟踪控制器使系统沿期望轨迹到达目标状态, 实现系统的无残余振动位置控制目标。仿真结果验证了本文所提方法的有效性。

关键词: 欠驱动机械系统; 柔性机械臂; 位置控制; 残余振动; 轨迹规划

引用格式: 孟庆鑫, 赖旭芝, 闫泽, 等. 双连杆刚柔机械臂无残余振动位置控制. 控制理论与应用, 2020, 37(3): 620–628

DOI: 10.7641/CTA.2019.90174

Position control without residual vibration for a two-link rigid-flexible manipulator

MENG Qing-xin, LAI Xu-zhi, YAN Ze, WANG Ya-wu[†], WU Min

(School of Automation, China University of Geosciences, Wuhan Hubei 430074, China;

Hubei Key Laboratory of Advanced Control and Intelligent Automation for Complex Systems, Wuhan Hubei 430074, China)

Abstract: This paper presents a position control method without residual vibration for a two-link rigid-flexible manipulator based on trajectory planning. This method can achieve that the end-effector of the manipulator has no residual vibration while rapidly reaching its target position. Firstly, the dynamic model of the system is built. By analyzing this dynamic model, the state constraint equations of the system are obtained. Next, based on these constraint equations, a forward trajectory and a reverse trajectory of the system are planned by using bidirectional trajectories planning method. Then, the time rewinding method and trajectory optimization method based on genetic algorithm are used to connect these two trajectories and obtain a desired trajectory from the initial state to the target state. Finally, a trajectory tracking controller is designed to make the system reach its target state along this desired trajectory. Thus, the position control objective without residual vibration is achieved. The simulation results demonstrate the effectiveness of the proposed method.

Key words: underactuated mechanical system; flexible manipulators; position control; residual vibration; trajectory planning

Citation: MENG Qingxin, LAI Xuzhi, YAN Ze, et al. Position control without residual vibration for a two-link rigid-flexible manipulator. *Control Theory & Applications*, 2020, 37(3): 620 – 628

1 引言

相对于刚性机械臂, 柔性机械臂具有结构轻、响应快、能耗低等优点, 可以适应苛刻的工作环境^[1–4], 在空间探索、航天器在轨服务以及高精度机械加工等领域有着非常广阔的应用前景。然而, 柔性机械臂是一

类分布参数系统, 其所表现出的特性是具有无限个自由度的同时控制输入为有限个。根据欠驱动系统的定义^[5–8]可知, 这类系统是欠驱动机械系统, 其模型中存在欠驱动变量, 且状态变量间存在复杂的耦合关系^[9]。因此, 柔性机械臂控制方法的研究被视为是一个具有

收稿日期: 2019–03–23; 录用日期: 2019–07–18.

[†]通信作者. E-mail: wangyawu@cug.edu.cn; Tel.: +86 27-67886325.

本文责任编辑: 方勇纯.

国家自然科学基金项目(61773353), 湖北省自然科学基金创新群体项目(2015CFA010), 高等学校学科创新引智计划(B17040), 中国地质大学(武汉)中央高校基本科研业务费资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (61773353), the Hubei Provincial Natural Science Foundation of China (2015CFA 010), the 111 Project (B17040) and the Fundamental Research Funds for National Universities, China University of Geosciences (Wuhan).

挑战性的课题,吸引了越来越多的学者。

对于柔性机械臂系统,学者们普遍研究其位置控制方法,即设计控制器将机械臂的末端执行器从任意初始位置稳定到目标位置^[10-12]。然而,由于这类系统存在欠驱动的变量,在位置控制中,很难针对系统欠驱动变量直接设计控制器使其收敛,这就导致在末端执行器到达目标位置后,系统存在弹性振动。这一振动称之为残余振动。残余振动的产生降低了系统的位置控制精度,且在外太空等空气阻尼微弱的工作环境中,残余振动很难自行消失^[13-14]。因此,如何解决柔性机械臂残余振动的问题是实现在该系统位置控制的关键。

目前比较常用的方法是主动抑制残余振动。文献[15]以压电陶瓷为传感器与作动器来抑制柔性机械臂的残余振动,取得了理想的抑振效果。文献[9]针对单连杆柔性机械臂提出了基于系统能量的位置控制方法,通过控制系统的总能量收敛到零来抑制系统的残余振动。文献[16]针对双连杆柔性机械臂提出了一种模糊补偿滑模控制方法,文献[17]针对双连杆刚柔机械臂系统提出了一种基于自适应迭代学习算法的边界控制方法。文献[18]利用PSO算法优化轨迹参数来最小化系统残余振动。上述控制方法均有效抑制了系统的残余振动并实现了系统的位置控制,然而,抑制残余振动的过程需要耗费一定的时间,也就是说,当机械臂的末端执行器到达目标位置后,不能立即开展后续工作而需等待其残余振动被抑制,这无疑降低了机械臂的工作效率。

基于上述研究背景,本文以双连杆刚柔机械臂为研究对象来研究基于轨迹规划的柔性机械臂无残余振动位置控制方法。所谓无残余振动位置控制,即控制柔性机械臂的末端执行器在到达目标位置时没有弹性振动。首先,运用欧拉-拉格朗日法和假设模态法来建立双连杆刚柔机械臂的动力学模型。然后,分析系统动力学模型,得到该系统的状态约束方程。基于此状态约束方程,提出一种双向轨迹规划方法,构造一条从系统初始状态到中间状态的前向轨迹和一条从系统目标状态到中间状态的反向轨迹。随后,利用时间倒转方法及基于遗传算法的轨迹优化方法对这两条轨迹进行处理,使得两条轨迹在中间状态拼合,从而得到一条从系统初始状态到目标状态的期望轨迹。最后,设计轨迹跟踪控制器,使系统的状态跟踪这条期望轨迹,实现双连杆刚柔机械臂的无残余振动位置控制。仿真结果表明,本文所提方法有效实现了双连杆刚柔机械臂的无残余振动位置控制。

2 系统建模及问题描述

本节将建立双连杆刚柔机械臂的动力学模型,并基于该动力学模型对系统的无残余振动位置控制目标进行讨论。

2.1 系统动力学建模

双连杆刚柔机械臂的结构如图1所示,其中: (x_t, y_t) 是系统的末端执行器坐标, XOY 是系统的惯性坐标系, $X_1O_1Y_1$ 和 $X_2O_2Y_2$ 分别是刚性连杆和柔性连杆的旋转坐标系, q_i , L_i 分别是系统第 i 根连杆的转角和长度, τ_i 是作用在第 i 个关节上的输入力矩, $i = 1, 2$, m_1 是刚性连杆的质量, l_1 是刚性连杆质心到第1关节的长度, J_1 是刚性连杆的转动惯量, ρ , A , EI , I_h 分别是柔性连杆的密度、截面面积、抗弯刚度和转动惯量, M_h 是第2个关节电机的质量, M_t 则是末端执行器的质量。 $\omega(x, t)$ 表示柔性连杆上位置 x 的一点在时刻 t 时相对坐标系 $X_2O_2Y_2$ 的弹性形变。

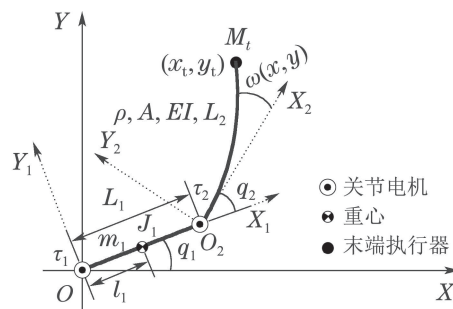


图1 双连杆刚柔机械臂的结构图

Fig. 1 Structure of the two-link rigid-flexible manipulator

基于假设模态法, $\omega(x, t)$ 可以表示为

$$\omega(x, t) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x) p_i(t), \quad (1)$$

其中: $\phi_i(x)$ 为柔性连杆第 i 阶模态函数, $p_i(t)$ 为柔性连杆第 i 阶模态坐标, n 表示假设模态法所选取的模式阶数。模态函数 $\phi_i(x)$ 的具体表达式可参考文献[9, 19]。另外, 根据文献[9]所得结论, 当 n 取值为2时, 所建立的模型就足够描述柔性连杆的振动行为, 因此, 在本文的研究中, 选取 $n = 2$ 。

令 R 为柔性连杆上任意点相对于惯性坐标系 XOY 的位置向量, 则其可以表示为

$$R = \begin{bmatrix} L_1 \cos q_1 + x \cos(q_1 + q_2) - \omega(x, t) \sin(q_1 + q_2) \\ L_1 \sin q_1 + x \sin(q_1 + q_2) + \omega(x, t) \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix}, \quad (2)$$

其中 x 为 R 相对 $X_2O_2Y_2$ 坐标系的 x -轴坐标。因此, 柔性机械臂末端执行器的位置向量可以表示为

$$R_t = R|_{x=L_2}.$$

系统的动能可以表示为

$$T = \frac{1}{2} (m_1 l_1^2 + J_1) \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} (M_h L_1^2 \dot{q}_1^2 + I_h (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2) + \frac{1}{2} \rho A \int_0^{L_2} \dot{R}^T \dot{R} dx + \frac{1}{2} M_t \dot{R}_t^T \dot{R}_t. \quad (3)$$

系统的弹性势能可以表示为

$$D = \frac{1}{2} EI \int_0^{L_2} [\omega(x, t)']^2 dx. \quad (4)$$

选取 $L = T - D$ 为拉格朗日方程, 应用欧拉-拉格朗日公式可以得到系统的动力学模型为

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \tau_i, & i = 1, 2, \\ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{p}_j} \right] - \frac{\partial L}{\partial p_j} = 0, & j = 1, 2. \end{cases} \quad (5)$$

令 $\theta = [q_1 \ q_2 \ p_1 \ p_2]^T$, 式(5)可以改写为

$$M(\theta)\ddot{\theta} + H(\theta, \dot{\theta}) + K\theta = \tau, \quad (6)$$

其中 $\tau = [\tau_1 \ \tau_2 \ 0 \ 0]^T$ 为系统的输入力矩矩阵.

$M(\theta)$ 是一个正定对称矩阵, 其具体形式可以表示为

$$M(\theta) = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34} \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44} \end{bmatrix}, \quad (7)$$

其中:

$$\begin{cases} M_{11} = I_h + J_1 + m_1 l_1^2 + M_h L_1^2 + M_t L_1^2 + \rho A L_1^2 L_2 + \\ \quad a_1 + a_2 + a_3 \cos q_2 + a_4 p_1^2 + a_5 p_2^2 + a_6 p_1 p_2 - \\ \quad 2L_1(a_7 + a_8) \sin q_2, \\ M_{12} = M_{21} = I_h + a_1 + a_2 + \frac{1}{2} a_3 \cos q_2 + a_4 p_1^2 + \\ \quad a_5 p_2^2 + a_6 p_1 p_2 - L_1(a_7 + a_8) \sin q_2, \\ M_{13} = M_{31} = a_9 + L_1 a_7 \cos q_2, \\ M_{14} = M_{41} = a_{10} + L_1 a_8 \cos q_2, \\ M_{22} = I_h + a_1 + a_2 + a_4 p_1^2 + a_5 p_2^2 + a_6 p_1 p_2, \\ M_{23} = M_{32} = a_9, \quad M_{24} = M_{42} = a_{10}, \\ M_{33} = a_4, \quad M_{34} = M_{43} = a_{11}, \quad M_{44} = a_5. \end{cases} \quad (8)$$

$M(\theta)$ 的结构参数为

$$\begin{aligned} a_1 &= M_t L_2^2, \quad a_2 = \frac{1}{3} \rho A L_2^3, \quad a_3 = L_1 L_2 (2M_t + \rho A L_2), \\ a_4 &= \rho A \eta_1 + M_t \phi_1^2(L_2), \quad a_5 = \rho A \eta_2 + M_t \phi_2^2(L_2), \\ a_6 &= 2M_t \phi_1(L_2) \phi_2(L_2), \quad a_7 = \rho A \sigma_1 + M_t \phi_1(L_2), \\ a_8 &= \rho A \sigma_2 + M_t \phi_2(L_2), \quad a_9 = \rho A \psi_1 + M_t L_2 \phi_1(L_2), \\ a_{10} &= \rho A \psi_2 + M_t L_2 \phi_2(L_2), \quad a_{11} = M_t \phi_1(L_2) \phi_2(L_2), \end{aligned} \quad (9)$$

其中:

$$\begin{cases} \eta_i = \int_0^{L_2} \phi_i^2(x) dx, \\ \sigma_i = \int_0^{L_2} \phi_i(x) dx, \\ \psi_i = \int_0^{L_2} x \cdot \phi_i(x) dx, \end{cases} \quad (10)$$

其中 $i = 1, 2$.

$H(\theta, \dot{\theta})$ 为系统的科里奥利力与离心力的结合矩阵, 可以表示为

$$H(\theta, \dot{\theta}) = [H_1 \ H_2 \ H_3 \ H_4]^T =$$

$$\frac{dM(\theta)}{dt} \dot{\theta} - \frac{1}{2} \frac{\partial [\dot{\theta}^T M(\theta) \dot{\theta}]}{\partial \theta}. \quad (11)$$

K 为系统的弹性力矩阵, 可以表示为

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_2 \end{bmatrix}, \quad (12)$$

其中 k_1, k_2 为系统的弹性系数, 可以表示为

$$k_i = \int_0^{L_2} EI [\phi_i''(x)]^2 dx, \quad i = 1, 2. \quad (13)$$

根据建立的双连杆刚柔机械臂动力学模型(6), 接下来将讨论系统的无残余振动位置控制问题.

2.2 问题描述

在讨论柔性机械臂系统的位置控制之前, 首先根据机械臂末端执行器的初始位置和目标位置来求解机械臂两根连杆的初始角度及目标角度.

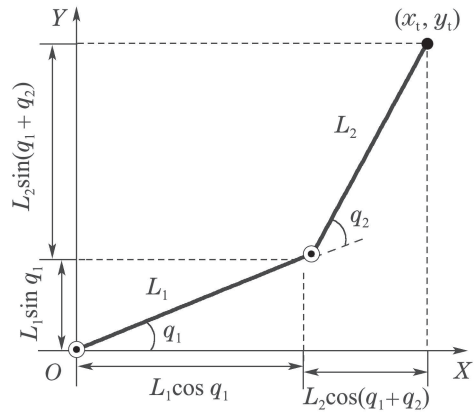


图2 静止状态下双连杆刚柔机械臂结构图

Fig. 2 Structure of the two-link rigid-flexible manipulator under static state

如图2所示, 当机械臂处于静止状态时, 柔性连杆没有弹性振动, 此时, 系统的末端执行器坐标 (x_t, y_t) 与两杆角度 q_1, q_2 存在以下关系:

$$\begin{cases} x_t = L_1 \cos q_1 + L_2 \cos(q_1 + q_2), \\ y_t = L_1 \sin q_1 + L_2 \sin(q_1 + q_2). \end{cases} \quad (14)$$

根据逆运动学方法, 可以求得

$$\begin{cases} q_1 = 2\vartheta_1\pi + \text{atan2}(y_t, x_t) - \\ \quad \text{atan2}(L_2 \sin q_2, L_1 + L_2 \cos q_2), \\ q_2 = 2\vartheta_2\pi + \text{atan2}(\sin q_2, \cos q_2), \end{cases} \quad (15)$$

其中:

$$\begin{cases} \cos q_2 = \frac{x_t^2 + y_t^2 - L_1^2 - L_2^2}{2L_1 L_2}, \\ \sin q_2 = \pm \sqrt{1 - \cos^2 q_2}. \end{cases} \quad (16)$$

ϑ_1, ϑ_2 为整数, 且 $\text{atan2}(b, a)$ 表示向量 (a, b) 和 X 轴正方向的夹角.

定义 (x_{ti}, y_{ti}) 为机械臂末端执行器的初始位置, (x_{td}, y_{td}) 为目标位置. 根据式(15)可以求解得到两杆初始角度 q_{1i}, q_{2i} 及目标角度 q_{1d}, q_{2d} .

记 $\Theta = [\theta^T \ \dot{\theta}^T]^T$ 表示系统的状态变量, 对于双连杆刚柔机械臂系统而言, 它的静止状态可以表示为 $\Theta_* = [q_{1*} \ q_{2*} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$, 其中 q_{1*}, q_{2*} 是常数. 因此, 系统的初始状态 Θ_i 和目标状态 Θ_d 可以分别表示为

$$\begin{cases} \Theta_i = [q_{1i} \ q_{2i} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T, \\ \Theta_d = [q_{1d} \ q_{2d} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T. \end{cases} \quad (17)$$

系统的位置控制目标是将双连杆刚柔机械臂的末端执行器从 (x_{ti}, y_{ti}) 稳定到 (x_{td}, y_{td}) . 即, 将系统的状态从 Θ_i 控制到 Θ_d . 然而, 由于 $p_1, p_2, \dot{p}_1, \dot{p}_2$ 为系统的欠驱动变量, 无法对其进行直接的控制. 它们与系统的驱动变量存在以下状态约束:

$$\begin{bmatrix} M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34} \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44} \end{bmatrix} \ddot{\theta} + \begin{bmatrix} H_3 + k_1 p_1 \\ H_4 + k_2 p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (18)$$

由式(18)可知, 系统的欠驱动变量可以通过控制驱动变量来间接控制. 因此, 传统的位置控制方法通常通过以下控制策略实现控制目标:

1) 对系统的驱动变量进行调节控制, 使它们收敛到各自的目标值, 即为 $q_1 \rightarrow q_{1d}, q_2 \rightarrow q_{2d}, \dot{q}_1 \rightarrow 0, \dot{q}_2 \rightarrow 0$;

2) 通过控制系统的驱动变量, 间接控制系统的欠驱动变量收敛到目标值, 即 $p_1 \rightarrow 0, p_2 \rightarrow 0, \dot{p}_1 \rightarrow 0, \dot{p}_2 \rightarrow 0$.

然而, 上述控制策略无法实现系统的所有状态变量同时收敛到目标值, 这就导致了系统残余振动的产生.

为了实现双连杆刚柔机械臂的无残余振动位置控制目标, 需要设计一种控制策略, 可以控制系统的所有状态同时收敛到目标值. 在本文中, 这一控制问题将被转化为轨迹规划与跟踪控制问题来讨论.

3 轨迹规划

本节讨论双连杆刚柔机械臂从初始状态 Θ_i 到目标状态 Θ_d 的轨迹规划问题. 根据系统的无残余振动位置控制目标, 待规划的期望轨迹应该具有以下边界条件:

当 $t \rightarrow 0$ 时,

$$\begin{cases} q_1(t) = q_{1i}, \ q_2(t) = q_{2i}, \ \dot{q}_1(t) = 0, \ \dot{q}_2(t) = 0, \\ p_1(t) = 0, \ p_2(t) = 0, \ \dot{p}_1(t) = 0, \ \dot{p}_2(t) = 0. \end{cases} \quad (19)$$

当 $t \rightarrow t_f$ 时,

$$\begin{cases} q_1(t) = q_{1d}, \ q_2(t) = q_{2d}, \ \dot{q}_1(t) = 0, \ \dot{q}_2(t) = 0, \\ p_1(t) = 0, \ p_2(t) = 0, \ \dot{p}_1(t) = 0, \ \dot{p}_2(t) = 0. \end{cases} \quad (20)$$

其中, t_f 为机械臂两根连杆到达目标角度的时间.

下面, 本文提出双向轨迹规划方法及轨迹拼合方法来规划符合上述边界条件的期望轨迹.

3.1 双向轨迹规划

因为欠驱动变量的存在, 直接规划系统从 Θ_i 到 Θ_d 的轨迹是困难的. 因此, 本文提出一种双向轨迹规划的方法, 分别规划一条前向轨迹和一条反向轨迹.

其中前向轨迹是一条从 Θ_i 到系统中间状态 Θ_i^m 的轨迹, 反向轨迹是一条从 Θ_d 到系统中间状态 Θ_d^m 的轨迹. 鉴于双连杆刚柔机械臂的欠驱动变量无法直接控制, 下面针对系统的驱动变量进行轨迹规划. 为保证机械臂可以平滑地跟踪规划的轨迹, 系统驱动变量的轨迹应该满足 $q_j(t), \dot{q}_j(t), \ddot{q}_j(t)$ 均有界, 其中 $j = 1, 2$.

基于上述思想, 在系统前向轨迹中, 规划驱动变量的轨迹为

$$\begin{cases} q_j^f(t) = q_{ji} + (q_{jm} - q_{ji})(k_a t - \frac{\sin(2\pi k_a t)}{2\pi}), \\ \dot{q}_j^f(t) = k_a(q_{jm} - q_{ji})(1 - \cos(2\pi k_a t)), \\ \ddot{q}_j^f(t) = 2\pi k_a^2(q_{jm} - q_{ji}) \sin(2\pi k_a t). \end{cases} \quad (21)$$

在系统反向轨迹中, 规划驱动变量的轨迹为

$$\begin{cases} q_j^r(t) = q_{jd} + (q_{jm} - q_{jd})(k_b t - \frac{\sin(2\pi k_b t)}{2\pi}), \\ \dot{q}_j^r(t) = k_b(q_{jm} - q_{jd})(1 - \cos(2\pi k_b t)), \\ \ddot{q}_j^r(t) = 2\pi k_b^2(q_{jm} - q_{jd}) \sin(2\pi k_b t), \end{cases} \quad (22)$$

其中: q_{ji}, q_{jm}, q_{jd} 分别表示机械臂第 j 根连杆的初始角度、中间角度及目标角度. 式(21)中 $t \in [0, \frac{1}{k_a}]$, 式(22)中 $t \in [0, \frac{1}{k_b}]$. $k_a > 0, k_b > 0$ 分别是系统前向轨迹和反向轨迹的时间因子. 显然, $q_j^f(t), \dot{q}_j^f(t), \ddot{q}_j^f(t)$ 及 $q_j^r(t), \dot{q}_j^r(t), \ddot{q}_j^r(t)$ 均有界. 因此, 所规划的前向轨迹及反向轨迹满足本文对轨迹平滑性的要求.

对于式(21), 当 $t \rightarrow \frac{1}{k_a}$ 时,

$$[q_1 \ q_2 \ \dot{q}_1 \ \dot{q}_2]^T \rightarrow [q_{1m} \ q_{2m} \ 0 \ 0]^T. \quad (23)$$

将式(21)及初始值(19)代入式(18)中, 通过对式(18)进行数值求解, 可以得到相应欠驱动变量的轨迹 $[p_1^f(t) \ p_2^f(t) \ \dot{p}_1^f(t) \ \dot{p}_2^f(t)]^T$. 且当 $t \rightarrow \frac{1}{k_a}$ 时,

$$[p_1 \ p_2 \ \dot{p}_1 \ \dot{p}_2]^T \rightarrow [p_{1m}^f \ p_{2m}^f \ \dot{p}_{1m}^f \ \dot{p}_{2m}^f]^T,$$

其中 $p_{1m}^f, p_{2m}^f, \dot{p}_{1m}^f, \dot{p}_{2m}^f$ 为常数. 因此, 前向轨迹的系统中间状态 Θ_i^m 可以表示为

$$\Theta_i^m = [q_{1m} \ q_{2m} \ p_{1m}^f \ p_{2m}^f \ 0 \ 0 \ \dot{p}_{1m}^f \ \dot{p}_{2m}^f]^T. \quad (24)$$

同样的方法易得反向轨迹中, 系统的欠驱动变量轨迹为 $[p_1^r(t) \ p_2^r(t) \ \dot{p}_1^r(t) \ \dot{p}_2^r(t)]^T$, 且系统的中间状

态 Θ_d^m 为

$$\Theta_d^m = [q_{1m} \ q_{2m} \ p_{1m}^r \ p_{2m}^r \ 0 \ 0 \ p_{1m}^r \ \dot{p}_{2m}^r]^T, \quad (25)$$

其中 $p_{1m}^r, p_{2m}^r, \dot{p}_{1m}^r, \dot{p}_{2m}^r$ 同样为常数。

由此, 系统从 Θ_i 到 Θ_d 的轨迹规划问题转化为系统前向轨迹与反向轨迹在中间状态的拼合问题。下面利用时间倒转方法及基于遗传算法的轨迹优化方法来拼合两条轨迹。

3.2 轨迹拼合

由于反向轨迹与系统真正的运动方向相反, 本小节利用时间倒转的方法^[8]使其轨迹方向与系统运动方向一致。具体的, 设计一条倒转轨迹, 使其驱动变量满足

$$\begin{cases} \dot{q}_j^r(t) = \dot{q}_j^r(\frac{1}{k_b} - t), \\ \dot{q}_j^r(t) = -\dot{q}_j^r(\frac{1}{k_b} - t), \\ \ddot{q}_j^r(t) = \ddot{q}_j^r(\frac{1}{k_b} - t). \end{cases} \quad (26)$$

则其所对应的欠驱动变量轨迹为

$$\begin{cases} p_1^r(t) = p_1^r(\frac{1}{k_b} - t), \ p_2^r(t) = p_2^r(\frac{1}{k_b} - t), \\ \dot{p}_1^r(t) = -\dot{p}_1^r(\frac{1}{k_b} - t), \ \dot{p}_2^r(t) = -\dot{p}_2^r(\frac{1}{k_b} - t). \end{cases} \quad (27)$$

显然, 这一倒转轨迹是一条从 Θ_d^m 到 Θ_i 的轨迹, 其中:

$$\Theta_d^m = [q_{1m} \ q_{2m} \ p_{1m}^r \ p_{2m}^r \ 0 \ 0 \ -\dot{p}_{1m}^r \ -\dot{p}_{2m}^r]^T. \quad (28)$$

不难看出, 当使 $\Theta_i^m = \Theta_d^m$ 时, 本文规划的前向轨迹和倒转轨迹可以拼合成一条从 Θ_i 到 Θ_d 的轨迹, 这便是本文的期望轨迹。

根据状态约束方程(18)可知, Θ_i^m, Θ_d^m 所对应的状态与式(21)(26)中的参数 q_{1m}, q_{2m}, k_a, k_b 有关, 可以通过调节 q_{1m}, q_{2m}, k_a, k_b 的值来改变 Θ_i^m, Θ_d^m 的值。本文利用遗传算法来优化系统前向轨迹和倒转轨迹中的 q_{1m}, q_{2m}, k_a, k_b 参数使 $\Theta_i^m = \Theta_d^m$, 从而拼合得到系统的期望轨迹。

遗传算法的评价函数定义如下:

$$ft = \text{abs}(p_{1m}^f - p_{1m}^r) + \text{abs}(p_{2m}^f - p_{2m}^r) + \text{abs}(\dot{p}_{1m}^f + \dot{p}_{1m}^r) + \text{abs}(\dot{p}_{2m}^f + \dot{p}_{2m}^r). \quad (29)$$

基于遗传算法的优化过程如下:

步骤1 随机初始化 N 条染色体组成遗传算法的初始群体。每条染色体代表一组轨迹参数 q_{1m}, q_{2m}, k_a, k_b 。初始化代数计数器 $\text{gen} = 1$ 。

步骤2 将所有的染色体所对应的参数 q_{1m}, q_{2m}, k_a, k_b 分别代入式(21)(26)中。通过方程(18)计算得到每条染色体分别对应的 $p_{1m}^f, p_{1m}^r, p_{2m}^f, p_{2m}^r, \dot{p}_{1m}^f, \dot{p}_{1m}^r,$

$\dot{p}_{2m}^f, \dot{p}_{2m}^r$ 的值。

步骤3 将得到的值代入评价函数(29), 从而得到每一条染色体所对应的评价值 ft 的值。

步骤4 如果种群中最小的 ft 值小于或等于一个非常小的正数 ϖ , 程序跳转到步骤6, 否则, 程序跳转到步骤5。

步骤5 如果 gen 等于最大优化代数 Max , 退出程序。否则, 对种群中的染色体以代沟 P_g 进行选择重组操作, 以概率 P_c 进行交叉操作, 以概率 P_m 进行变异操作。更新所有染色体且 $\text{gen} = \text{gen} + 1$ 。程序跳转到步骤2。

步骤6 将种群中最小 ft 值所对应的染色体作为优化后的结果, 读取其所对应的轨迹参数 q_{1m}, q_{2m}, k_a, k_b 。将这些参数代入式(21)及式(26)中, 从而将这两条轨迹拼合成一条系统的期望轨迹(30)。退出程序。

拼合后的系统期望轨迹的驱动变量轨迹可以表示为

$$\begin{cases} q_j^d(t) = q_j^f(t), \\ \dot{q}_j^d(t) = \dot{q}_j^f(t), \\ \ddot{q}_j^d(t) = \ddot{q}_j^f(t), \\ q_j^d(t) = q_j^r(t - \frac{1}{k_a}), \\ \dot{q}_j^d(t) = \dot{q}_j^r(t - \frac{1}{k_a}), \\ \ddot{q}_j^d(t) = \ddot{q}_j^r(t - \frac{1}{k_a}), \end{cases} \quad (30)$$

其中: 前3个分式中 $t \in [0, \frac{1}{k_a}]$, 后3个分式中 $t \in (\frac{1}{k_a}, \frac{1}{k_a} + \frac{1}{k_b}]$ 。

欠驱动变量的轨迹可以表示为

$$\begin{cases} p_1^d(t) = p_1^f(t), \\ p_2^d(t) = p_2^f(t), \\ \dot{p}_1^d(t) = \dot{p}_1^f(t), \\ \dot{p}_2^d(t) = \dot{p}_2^f(t), \\ p_1^d(t) = p_1^r(t - \frac{1}{k_a}), \\ p_2^d(t) = p_2^r(t - \frac{1}{k_a}), \\ \dot{p}_1^d(t) = \dot{p}_1^r(t - \frac{1}{k_a}), \\ \dot{p}_2^d(t) = \dot{p}_2^r(t - \frac{1}{k_a}), \end{cases} \quad (31)$$

其中: 前4个分式中 $t \in [0, \frac{1}{k_a}]$, 后4个分式中 $t \in (\frac{1}{k_a}, \frac{1}{k_a} + \frac{1}{k_b}]$ 。

由于期望轨迹的驱动变量轨迹在 $t = \frac{1}{k_a}$ 处连续且

$q_j^d(t), \dot{q}_j^d(t), \ddot{q}_j^d(t)$ 均有界. 因此, 期望轨迹的驱动变量轨迹依旧是平滑的.

对于从初始状态 Θ_i 出发的双连杆刚柔机械臂, 倘若能够设计一个轨迹跟踪控制器使系统的驱动变量在 $t \in [0, \frac{1}{k_a} + \frac{1}{k_b}]$ 上跟踪轨迹(30), 由于系统状态约束的存在, 其欠驱动变量也将被动跟踪轨迹(31). 那么, 在 $t = (\frac{1}{k_a} + \frac{1}{k_b})$ s时刻, 系统的所有变量同时收敛于 Θ_d . 此时系统没有残余振动产生. 这样的话, 双连杆刚柔机械臂的无残余振动位置控制问题就转化为了跟踪期望轨迹的控制问题.

注1 当 $t > (\frac{1}{k_a} + \frac{1}{k_b})$ s时, 为使系统维持在目标状态, 系统驱动变量的轨迹为 $q_j^d(t) \equiv q_{jd}$, 其对应的欠驱动变量的轨迹为 $p_1^d(t) = p_2^d(t) \equiv 0$.

4 轨迹跟踪控制器设计

在得到期望轨迹之后, 本节讨论轨迹跟踪控制器的设计问题. 针对系统的驱动变量设计轨迹跟踪控制器, 使其跟踪轨迹(30).

令 $x = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6 \ x_7 \ x_8]^T = \Theta$, 然后, 将系统的模型(6)改写为状态空间的形式:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)\tau, \quad (32)$$

其中:

$$\begin{cases} f(x) = [x_5 \ x_6 \ x_7 \ x_8 \ f_1 \ f_2 \ f_3 \ f_4]^T, \\ g(x) = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix}, \end{cases} \quad (33)$$

f_1, f_2, f_3 和 f_4 满足

$$[f_1 \ f_2 \ f_3 \ f_4]^T = -M(\theta)^{-1}[H(\theta, \dot{\theta}) + K\theta], \quad (34)$$

g_1 是一个 4×4 的零矩阵, g_2 满足

$$g_2 = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & \beta_2 & 0 & 0 \\ \alpha_3 & \beta_3 & 0 & 0 \\ \alpha_4 & \beta_4 & 0 & 0 \end{bmatrix} = M(\theta)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (35)$$

为方便描述跟踪控制器设计, 定义如下符号:

$$\begin{cases} x_{1d}(t) = q_1^d(t), \dot{x}_{1d}(t) = \dot{q}_1^d(t), \ddot{x}_{1d}(t) = \ddot{q}_1^d(t), \\ x_{2d}(t) = q_2^d(t), \dot{x}_{2d}(t) = \dot{q}_2^d(t), \ddot{x}_{2d}(t) = \ddot{q}_2^d(t), \end{cases} \quad (36)$$

设计两个滑模函数如下所示:

$$S_1 = \iota_1 \varepsilon_1 + \dot{\varepsilon}_1, \quad S_2 = \iota_2 \varepsilon_2 + \dot{\varepsilon}_2, \quad (37)$$

其中: ι_1, ι_2 是正的常数, $\varepsilon_1 = x_1 - x_{1d}(t)$, $\varepsilon_2 = x_2 - x_{2d}(t)$, $\dot{\varepsilon}_1 = \dot{x}_5 - \dot{x}_{1d}(t)$ 及 $\dot{\varepsilon}_2 = \dot{x}_6 - \dot{x}_{2d}(t)$ 表示系统的跟踪误差. 对 S_1, S_2 求导得

$$\begin{cases} \dot{S}_1 = \iota_1 \dot{\varepsilon}_1 + \dot{f}_1 + \alpha_1 \tau_1 + \beta_1 \tau_2 - \ddot{x}_{1d}(t), \\ \dot{S}_2 = \iota_2 \dot{\varepsilon}_2 + \dot{f}_2 + \alpha_2 \tau_1 + \beta_2 \tau_2 - \ddot{x}_{2d}(t). \end{cases} \quad (38)$$

设计轨迹跟踪控制器为

$$\tau_1 = -\frac{\beta_1 A_2 - \beta_2 A_1}{\alpha_2 \beta_1 - \alpha_1 \beta_2}, \quad \tau_2 = -\frac{\alpha_2 A_1 - \alpha_1 A_2}{\alpha_2 \beta_1 - \alpha_1 \beta_2}, \quad (39)$$

其中:

$$\begin{cases} A_1 = f_1 - \ddot{x}_{1d}(t) + \delta_1 \text{sat}(\frac{S_1}{\Delta_1}) + \iota_1 \dot{\varepsilon}_1 + \psi_1 S_1, \\ A_2 = f_2 - \ddot{x}_{2d}(t) + \delta_2 \text{sat}(\frac{S_2}{\Delta_2}) + \iota_2 \dot{\varepsilon}_2 + \psi_2 S_2, \end{cases} \quad (40)$$

$\delta_1, \delta_2, \psi_1, \psi_2, \Delta_1$ 以及 Δ_2 均为正的常数, $\text{sat}(\cdot)$ 是饱和函数, 可以表示为

$$\text{sat}(\frac{S_i}{\Delta_i}) = \begin{cases} 1, & S_i > \Delta_i, \\ \frac{S_i}{\Delta_i}, & |S_i| \leq \Delta_i, \\ -1, & S_i < -\Delta_i, \end{cases} \quad (41)$$

其中 $i = 1, 2$.

定理1 系统(33)的跟踪误差, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dot{\varepsilon}_1$ 和 $\dot{\varepsilon}_2$ 在所设计的轨迹跟踪控制器(39)作用下可以收敛到零.

证 构造以下Lyapunov函数:

$$V = \frac{S_1^2}{2} + \frac{S_2^2}{2} \geq 0. \quad (42)$$

将 V 对时间进行求导, 结合式(38)–(39)可得

$$\begin{aligned} \dot{V} &= S_1 \dot{S}_1 + S_2 \dot{S}_2 = \\ &= -\psi_1 S_1^2 - \delta_1 \text{sat}(\frac{S_1}{\Delta_1}) S_1 - \psi_2 S_2^2 - \delta_2 \text{sat}(\frac{S_2}{\Delta_2}) S_2 \leq \\ &= 0. \end{aligned} \quad (43)$$

当 $\dot{V} \equiv 0$ 时, $S_1 \equiv 0$, 并且 $S_2 \equiv 0$. 因此, 根据LaSalle不变原理易知, 滑模函数(37)在控制器的作用下可以达到滑模面 $S_1 = 0, S_2 = 0$. 也就是说

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon_1 = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\varepsilon}_1 = 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon_2 = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\varepsilon}_2 = 0. \end{cases} \quad (44)$$

证毕.

因此, 本节设计的轨迹跟踪控制器可以实现系统的轨迹跟踪控制目标.

5 仿真结果与分析

本节利用MATLAB联合Simulink来进行仿真研究. 其中MATLAB提供的ODE45求解器被用来解决仿真中的数值求解问题.

双连杆刚柔机械臂的模型参数选取为

$$\begin{aligned} L_1 &= 1.3 \text{ m}, \quad L_2 = 1.7 \text{ m}, \quad EI = 4 \text{ N} \cdot \text{m}^2, \\ \rho A &= 0.3 \text{ kg/m}, \quad m_1 = 1 \text{ kg}, \quad M_h = 0.2 \text{ kg}, \\ M_t &= 0.8 \text{ kg}, \quad J_1 = 0.56 \text{ kg} \cdot \text{m}^2, \quad I_h = 0.06 \text{ kg} \cdot \text{m}^2, \end{aligned}$$

同时, 选取末端执行器的初始位置为 $(x_{ti}, y_{ti}) = (-1, 2) \text{ m}$, 目标位置为 $(x_{td}, y_{td}) = (1.5, 0.5) \text{ m}$. 则根据式(15), 可以求得一组连杆的初始角度和目标角度为

$$\begin{cases} q_{1i} = 2.8929 \text{ rad}, \quad q_{2i} = -1.4756 \text{ rad}, \\ q_{1d} = 1.5708 \text{ rad}, \quad q_{2d} = -2.0608 \text{ rad}. \end{cases} \quad (45)$$

在轨迹规划中,选取遗传算法的参数为

$$\begin{cases} P_c = 0.8, P_m = 0.3, P_g = 0.7, \\ N = 50, \varpi = 1 \times 10^{-4}, \text{Max} = 200. \end{cases} \quad (46)$$

同时,选取轨迹跟踪控制器的设计参数为

$$\begin{cases} \iota_1 = \iota_2 = 1.2, \psi_1 = \psi_2 = 1, \\ \delta_1 = \delta_2 = 0.3, \Delta_1 = \Delta_2 = 0.1. \end{cases} \quad (47)$$

下面验证所提控制方法的有效性和优越性.

5.1 实例1

本小节使系统分别跟踪一条未经优化的摆线轨迹^[20]和本文规划得到的期望轨迹(30). 通过对比二者的仿真结果,来说明本文所提轨迹规划方法在实现系统无残余振动位置控制上的有效性. 其中,从初始角度 q_{ji} 到目标角度 q_{jd} 的摆线轨迹表达式给出如下:

$$\begin{cases} x_{jd}(t) = q_{ji} + (q_{jd} - q_{ji}) \left(\frac{t}{t_r} - \frac{\sin \frac{2\pi t}{t_r}}{2\pi} \right), & 0 \leq t \leq t_r, \\ x_{jd}(t) = q_{jd}, & t > t_r, \end{cases} \quad (48)$$

其中 $j = 1, 2$, $t_r = 8$ s为摆线轨迹的到达时间.

利用轨迹跟踪控制器(39)来使系统跟踪摆线轨迹(48),仿真结果如图3所示.

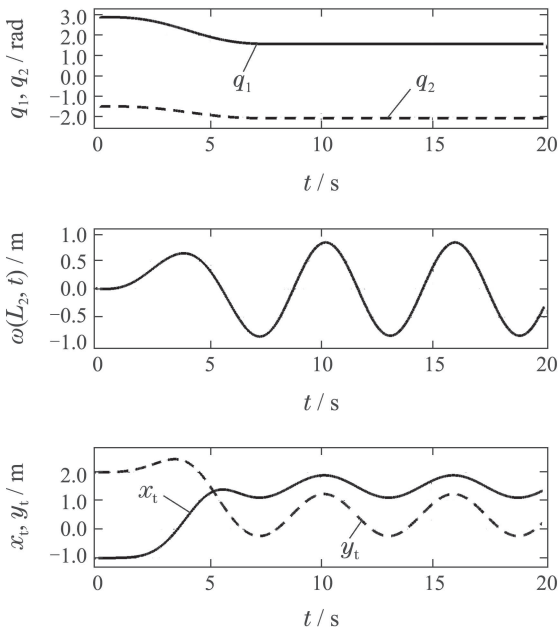


图3 跟踪轨迹(48)的仿真结果

Fig. 3 Simulation results of tracking the trajectory (48)

从图3所示的仿真结果中可以看出,当系统跟踪摆线轨迹(48)时,机械臂的两根连杆可以到达各自的目标角度. 但之后,机械臂的柔性连杆呈现出等幅振动的状态,这一振动便是残余振动. 这一仿真结果说明,摆线轨迹(48)无法消除柔性机械臂的残余振动. 因此,当系统跟踪这一未经规划的轨迹时,其末端执行器无

法实现高精度的定位.

根据本文所提出的轨迹规划方法,通过遗传算法优化,得到了一组轨迹规划的优化结果

$$\begin{cases} q_{1m} = 2.2712 \text{ rad}, q_{2m} = -1.7253 \text{ rad}, \\ k_a = 0.3002, k_b = 0.3399, \end{cases} \quad (49)$$

将优化结果代入式(21)及式(26)中,进而利用轨迹跟踪控制器(39)使系统跟踪期望轨迹(30),仿真结果如图4所示.

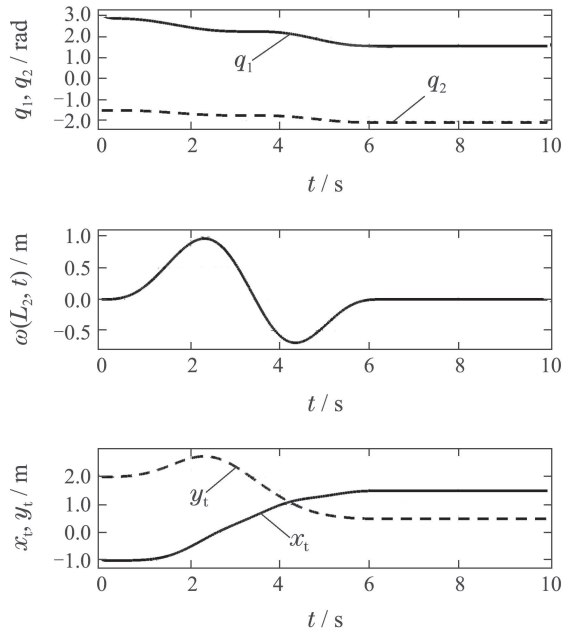


图4 跟踪轨迹(30)的仿真结果

Fig. 4 Simulation results of tracking the trajectory (30)

图4显示,当系统跟踪期望轨迹(30)时,机械臂的两根连杆同样可以到达各自的目标角度. 与图3所示仿真结果不同的是,机械臂的末端执行器由初始位置 $(-1, 2)$ m到达目标位置 $(1.5, 0.5)$ m的同时,柔性连杆的弹性振动也被抑制收敛到零,这表明柔性连杆机械臂的末端执行器在到达目标位置时没有产生残余振动. 于是,通过对比图3—4所示的仿真结果,可以验证,本文所提出的轨迹规划方法可以有效实现双连杆刚柔机械臂的无残余振动位置控制目标.

注2 在摆线轨迹(48)中,不同的 t_r 会带来不同的控制效果. 当 t_r 较小时,机械臂的两根连杆可以较快速地到达各自目标角度,但柔性连杆的振动幅度较大,导致机械臂的末端执行器在目标位置附近剧烈振动. 而当 t_r 较大时,柔性连杆的振幅较小,但系统两根连杆到达目标角度所需的时间较长. 在本文中,综合考虑连杆到达目标角度所需的时间以及柔性连杆的振动幅度,选择 $t_r = 8$ s.

5.2 实例2

为了说明本文提出的无残余振动位置控制方法相对传统柔性机械臂位置控制方法的优越性,本小节分别对PD控制方法^[21]和本文提出的控制方法进行仿真.

PD控制器设计如下:

$$\tau_i = -K_p(x_i - q_{id}) - K_d\dot{x}_i, \quad i = 1, 2, \quad (50)$$

其中 K_p , K_d 为控制器增益. 在仿真中, 设置为 $K_p = 4$, $K_d = 3$. 仿真结果如图5所示.

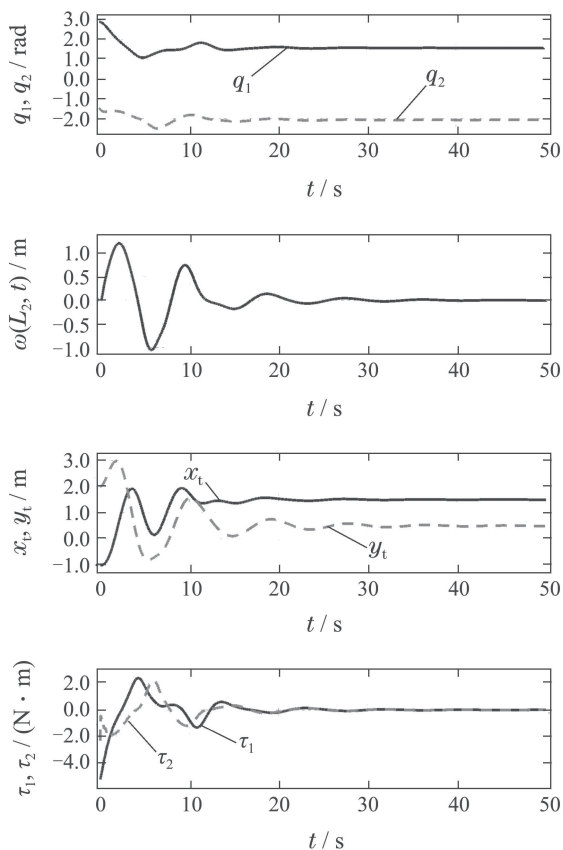


图5 PD控制方法的仿真结果

Fig. 5 Simulation results of the PD control method

从图5可以看出, 机械臂的两根连杆在5 s左右时便已到达目标角度, 随后在目标角度附近做往复运动, 以此来抑制柔性连杆的残余振动, 直至30 s左右时, 柔性机械臂的末端执行器才逐渐被稳定在目标位置(1.5, 0.5) m. 残余振动的抑制过程耗费近25 s, 严重影响了机械臂的工作效率. 此外, 在控制的过程中, 系统存在一定的超调且控制力矩存在初始跳变, 降低了系统的安全性.

本文提出的控制方法中, 基于机械臂两根连杆的初始角度和目标角度进行轨迹规划, 在轨迹拼合中, 可以优化得到一组结果为

$$\begin{cases} q_{1m} = 2.5939 \text{ rad}, q_{2m} = -1.9868 \text{ rad}, \\ k_a = 0.3527, k_b = 0.3585. \end{cases} \quad (51)$$

值得注意的是, 优化结果(51)与优化结果(49)是不同的. 这表明了, 在系统的轨迹拼合中, 优化的可行解是具有多样性的. 将优化的结果(51)代入式(21)及式(26)中, 使系统跟踪拼合后的期望轨迹(30). 仿真结果如图6所示.

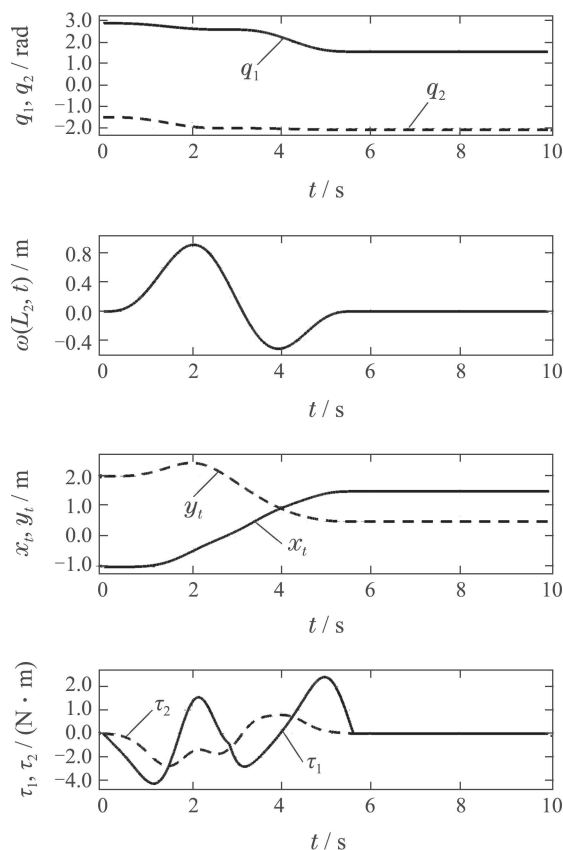


图6 本文提出控制方法的仿真结果

Fig. 6 Simulation results of the proposed control method

从图6中可以看出, 系统两根连杆均到达了其目标角度, 没有出现超调. 机械臂的末端执行器由初始位置(-1, 2) m平滑运动到目标位置(1.5, 0.5) m, 且柔性连杆没有产生残余振动, 系统整个位置控制过程耗费5.8 s左右. 因此, 相比较于PD控制方法, 本文提出的控制方法可以大幅提高机械臂的工作效率. 此外, 本文提出控制方法的控制输入力矩在 $\pm 2.5 \text{ N}\cdot\text{m}$ 范围内变化, 且初始输入力矩为0 N·m, 这表明本文提出的控制方法实现了机械臂的“软启动”^[22-23]. 因此, 本文提出的控制方法在系统的安全性上也优于PD控制方法.

6 结论

本文提出了一种基于轨迹规划的柔性机械臂无残余振动位置控制方法. 以平面双连杆刚柔机械臂为研究对象, 通过对该系统进行建模与分析, 得到了系统存在的状态约束关系. 进而利用这一约束关系, 通过双向轨迹规划及遗传算法轨迹拼合方法, 规划出一条从系统初始状态到目标状态的期望轨迹. 设计轨迹跟踪控制器, 使系统的状态变量沿着规划的期望轨迹到达目标状态. 这种控制方法可以保证系统的所有变量同时收敛到目标值. 这也就意味着, 机械臂的末端执行器在到达目标位置时没有残余振动产生. 仿真结果验证了本方法的有效性和优越性. 值得一提的是, 对于更为复杂的多柔性连杆多柔性模态的柔性机械臂,

该方法依旧有效。

参考文献:

- [1] DWIVEDY S K, EBERHARD P. Dynamic analysis of flexible manipulators: A literature review. *Mechanism and Machine Theory*, 2006, 41(7): 749 – 777.
- [2] HE W, HE X Y, ZOU M F, et al. PDE model-based boundary control design for a flexible robotic manipulator with input backlash. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2019, 27(2): 790 – 797.
- [3] ZHANG Niaoona, ZHANG Dejiang, FENG Yong. The optimal design of terminal sliding controller for flexible manipulators based on chaotic genetic algorithm. *Control Theory & Applications*, 2008, 25(3): 451 – 455.
(张袅娜, 张德江, 冯勇. 基于混沌遗传算法的柔性机械手滑模控制器优化设计. 控制理论与应用, 2008, 25(3): 451 – 455.)
- [4] HE W, OUYANG Y C, HONG J. Vibration control of a flexible robotic manipulator in the presence of input deadzone. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, 2017, 13(1): 48 – 59.
- [5] SUN Ning, FANG Yongchun, CHEN He. Antiswing tracking control for underactuated bridge cranes. *Control Theory & Applications*, 2015, 32(3): 326 – 333.
(孙宁, 方勇纯, 陈鹤. 欠驱动桥式吊车消摆跟踪控制. 控制理论与应用, 2015, 32(3): 326 – 333.)
- [6] SUN Ning, FANG Yongchun, QIAN Yuzhe. Motion planning for cranes with double pendulum effects subject to state constraints. *Control Theory & Applications*, 2014, 31(7): 974 – 980.
(孙宁, 方勇纯, 钱彧哲. 带有状态约束的双摆效应吊车轨迹规划. 控制理论与应用, 2014, 31(7): 974 – 980.)
- [7] SUN N, FANG Y C. Nonlinear tracking control of underactuated cranes with load transferring and lowering: Theory and experimentation. *Automatica*, 2014, 50(9): 2350 – 2357.
- [8] ZHANG A C, SHE J H, LAI X Z, et al. Motion planning and tracking control for an acrobot based on a rewinding approach. *Automatica*, 2013, 49(1): 278 – 284.
- [9] MENG Q X, LAI X Z, WANG Y W, et al. A fast stable control strategy based on system energy for a planar single-link flexible manipulator. *Nonlinear Dynamics*, 2018, 94(1): 615 – 626.
- [10] LAI X Z, WANG Y W, WU M, et al. Stable control strategy for planar three-link underactuated mechanical system. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 2016, 21(3): 1345 – 1356.
- [11] MONJE C A, RAMOS F, FELIU V, et al. Tip position control of a lightweight flexible manipulator using a fractional order controller. *IET Control Theory & Applications*, 2007, 1(5): 1451 – 1460.
- [12] CAO F F, LIU J K. Vibration control for a rigid-flexible manipulator with full state constraints via barrier Lyapunov function. *Journal of Sound and Vibration*, 2017, 406(13): 237 – 252.
- [13] YUAN Q F, LIU Y F, QI N M. Active vibration suppression for maneuvering spacecraft with high flexible appendages. *Acta Astronautica*, 2017, 139: 512 – 520.
- [14] ZHU Chunyan, SHAO Jiming, NA Shuai, et al. Design and simulation of input shaper for residual vibration suppression after attitude adjustment of a solar array. *Journal of Vibration and Shock*, 2012, 31(8): 176 – 180.
(朱春艳, 邵济明, 那帅, 等. 太阳能电池翼调姿后残余振动抑制的整形器设计. 振动与冲击, 2012, 31(8): 176 – 180.)
- [15] SUN D, MILLS J K, SHAN J, et al. A PZT actuator control of a single-link flexible manipulator based on linear velocity feedback and actuator placement. *Mechatronics*, 2004, 14(4): 381 – 401.
- [16] DAI Xuefeng, YAN Zheping, SUN Lining, et al. Sliding mode control with fuzzy compensation for two-link flexible manipulators. *Electric Machines and Control*, 2005, 9(1): 1 – 4.
(戴学丰, 严浙平, 孙立宁, 等. 双连杆柔性臂机器人的模糊补偿滑模控制. 电机与控制学报, 2005, 9(1): 1 – 4.)
- [17] CAO F F, LIU J K. An adaptive iterative learning algorithm for boundary control of a coupled ODE-PDE two-link rigid-flexible manipulator. *Journal of the Franklin Institute*, 2017, 354(1): 277 – 297.
- [18] XU Wenfu, XU Chao, MENG Deshan. Trajectory planning of vibration suppression for rigid-flexible hybrid manipulator based on PSO algorithm. *Control and Decision*, 2014, 29(4): 632 – 638.
(徐文福, 徐超, 孟得山. 基于粒子群优化的刚柔混合机械臂振动抑制规划. 控制与决策, 2014, 29(4): 632 – 638.)
- [19] SUN C Y, GAO H J, HE W, et al. Fuzzy neural network control of a flexible robotic manipulator using assumed mode method. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2018, 29(11): 5214 – 5227.
- [20] ABE A. Trajectory planning for residual vibration suppression of a two-link rigid-flexible manipulator considering large deformation. *Mechanism and Machine Theory*, 2009, 44(9): 1627 – 1639.
- [21] GAO H J, HE W, ZHOU C, et al. Neural network control of a two-link flexible robotic manipulator using assumed mode method. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, 2019, 15(2): 755 – 765.
- [22] SUN N, YANG T, FANG Y C, et al. Nonlinear motion control of underactuated three-dimensional boom cranes with hardware experiments. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, 2018, 14(3): 887 – 897.
- [23] SUN N, FANG Y C, CHEN H, et al. Adaptive nonlinear crane control with load hoisting/lowering and unknown parameters: Design and experiments. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 2015, 20(5): 2107 – 2119.

作者简介:

孟庆鑫 博士研究生, 主要研究方向为欠驱动机械系统、柔性机械臂系统控制, E-mail: mengqx@cug.edu.cn;

赖旭芝 教授, 主要研究方向为智能控制、机器人控制和非线性系统, E-mail: laixz@cug.edu.cn;

闫泽 硕士研究生, 主要研究方向为欠驱动机械系统、柔性机械臂系统控制, E-mail: yanz@cug.edu.cn;

王亚午 副教授, 主要研究方向为智能控制、欠驱动机械系统, E-mail: wangyawu@cug.edu.cn;

吴敏 教授, 主要研究方向为鲁棒控制、智能控制和过程控制, E-mail: wumin@cug.edu.cn.