

分布式优化的多智能体方法

王 龙^{1†}, 卢开红², 关永强³

(1. 北京大学 系统与控制研究中心, 北京 100871; 2. 江苏大学 电气与信息工程学院, 江苏 镇江 212013;

3. 西安电子科技大学 机电工程学院, 陕西 西安 710071)

摘要: 分布式优化作为分布式协调控制领域中的一个基本而重要的研究课题, 近年来, 不同领域的众多学者对其产生了广泛的研究兴趣. 本文总结归纳了分布式优化的研究现状和近期的研究成果, 重点对离线分布式优化和在线分布式优化进行了阐述, 并从算法设计和收敛性分析这两个角度进行了剖析. 特别地, 针对一类混合均衡问题, 本文介绍了一类分布式求解算法. 最后, 阐述了当前尚未解决的问题和未来的研究方向.

关键词: 多智能体系统; 分布式优化; 协调控制

引用格式: 王龙, 卢开红, 关永强. 分布式优化的多智能体方法. 控制理论与应用, 2019, 36(11): 1820 – 1833

DOI: 10.7641/CTA.2019.90502

Distributed optimization via multi-agent systems

WANG Long^{1†}, LU Kai-hong², GUAN Yong-qiang³

(1. Center for Systems and Control, College of Engineering, Peking University, Beijing 100871, China;

2. School of Electrical and Information Engineering, Jiangsu University, Zhenjiang Jiangsu 212013, China;

3. Center for Complex Systems, School of Mechano-electronic Engineering, Xidian University, Xi'an Shaanxi 710071, China)

Abstract: As a basic and significant topic in the field of distributed coordination control, distributed optimization via multi-agent systems has attracted great interest in recent years. An overview on the state-of-the-art of the distributed optimization is presented in this paper, where results on offline/online distributed optimization are introduced, respectively. In the study of distributed optimization, algorithm design and convergence analysis are two key issues, which are discussed in detail. Furthermore, we introduce a related work: distributed strategies for solving mixed equilibrium problems. Finally, open problems and future research directions are presented.

Key words: multi-agent systems; distributed optimization; coordination control

Citation: WANG Long, LU Kaihong, GUAN Yongqiang. Distributed optimization via multi-agent systems. *Control Theory & Applications*, 2019, 36(11): 1820 – 1833

1 引言

多智能体系统是由多个具有一定传感、计算、执行和通信能力的智能体组成的控制系统^[1-5]. 从广义上讲, 智能体可以是机器人、飞行器、计算机等实体. 多智能体系统分布式协调控制作为系统控制领域的热点研究方向, 吸引了来自数学、物理、社会科学、控制、计算机和人工智能等众多学科的研究人员的关注^[1-16]. 多智能体系统分布式协调控制的研究, 不仅能够揭示自然界中许多现象的内在规律, 同时也能为人们的工作、生活和生产等实践活动提供指导^[17-24].

作为多智能体系统分布式协调控制领域中一个崭新的研究课题, 近年来, 分布式优化得到国内外诸多专家学者的广泛关注. 在分布式优化中, 通常将参与

通信、计算及决策的模块视为智能体. 基于多智能体系统的分布式优化的基本结构如图1所示, 每个智能体携带一个目标函数, 且全局目标函数由这些目标函数的和构成. 智能体通过执行分布式算法优化自身的目标函数, 并与自身的邻居进行局部信息交互, 最终使自身状态收敛到全局目标函数的一个最优解^[25-27]. 分布式优化算法具有如下特点: 1) 优化所需要的信息和数据独立地存储在每个智能体中, 智能体不需要与其他个体交换目标函数信息, 有利于保护智能体的隐私; 2) 智能体无需与网络中其他个体一一进行信息交互, 只需与其邻居进行局部的信息分享, 有利于节约通信成本; 3) 通信图可以是时变的, 分布式优化算法对通讯拓扑结构的改变具有良好的鲁棒性; 4) 分布式

收稿日期: 2019-06-30; 录用日期: 2019-11-06.

[†]通信作者. E-mail: longwang@pku.edu.cn.

本文责任编辑: 方浩.

国家自然科学基金项目(61751301, 61533001, 61603288)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (61751301, 61533001, 61603288).

优化算法可以被用来执行并行计算, 有助于求解大规模问题. 分布式优化研究具有广泛的工程应用价值, 有助于解决传感网络、通信网络、电力网络和交通网络等大型网络中的诸多问题, 譬如, 无线传感器网络中的定位问题^[28-29]、电力网络中的经济调度问题^[30-32]及基于大数据的机器学习问题^[33]. 随着微电子、通信和传感器等技术的快速发展, 大型网络无处不在, 这极大地拓展了分布式优化算法的应用范围, 促使分布式优化的理论研究不断取得新的成果.

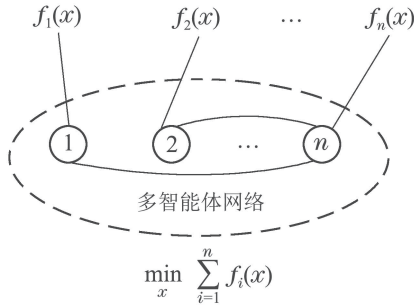


图 1 基于多智能体系统的分布式优化的基本结构图

Fig. 1 The basic structure of distributed optimization via multi-agent systems

近年来, 关于分布式优化的研究发展迅速, 并取得了一些显著成果^[34-89]. 根据分布式优化发生的环境不同, 可以将其分为两类: 离线分布式优化和在线分布式优化. 离线分布式优化是一类发生在静态环境下的分布式优化, 在该问题中, 目标函数往往是静态的, 智能体旨在通过它们之间的合作行为找到全局目标函数的一个全局最优解^[34-69]前时刻的目标函数才能被揭示, 也就是说, 目标函数是不能被预知的^[78-89]. 算法的设计和收敛性分析是分布式优化研究中所涉及到的两大主要内容, 本文力图从这两方面对分布式优化领域的研究成果进行归纳和总结.

本文结构安排如下: 第2章介绍基本的图论知识和凸分析理论; 第3章梳理关于离线分布式优化的最新研究成果; 第4章阐述关于在线分布式优化的研究现状和主要成果; 第5章介绍一类与分布式优化相关的问题: 混合均衡问题的分布式求解; 第6章浅析该领域研究的一些前沿性问题.

符号说明: $\mathbb{R}$ 表示实数集, $\mathbb{N}$ 表示整数集, $\mathbb{N}^+$ 表示正整数集, $\mathbb{R}^m$ 表示 m 维实向量空间, $\mathbb{R}_+^m$ 表示 m 维非负实向量空间. 给定 $a \in \mathbb{R}$, $|a|$ 表示 a 的绝对值, $[a]$ 表示不超过 a 的最大整数. 给定集合 Ω , $|\Omega|$ 表示 Ω 中的元素个数. 给定 $T \in \mathbb{N}^+$, $\{ \rightarrow T \} = \{0, 1, \dots, T\}$. 给定向量 $x, y \in \mathbb{R}^m$, $\langle x, y \rangle$ 表示 x, y 的内积, $\|x\| = \sqrt{x^T x}$. I_n 表示 $n \times n$ 的单位阵, $\mathbf{1}_n$ 表示 n 维全1向量. 对于矩阵 $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 和 $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $[A]_{ij}$ 表示矩阵 A 的第 i 行第 j 列元素. $A \otimes B$ 表示矩阵 A 和 B 的Kronecker积.

2 预备知识

本节将对预备知识进行陈述. 第2.1小节将对基本的图论知识进行简单介绍. 第2.2小节将对凸函数、凸集的基本概念和性质进行介绍.

2.1 图论

本节介绍基本图论知识(详见文献[90]).

定义时变有向图 $\mathcal{G}(t) = (\mathcal{V}, \mathcal{E}(t), A(t))$, 这里 $\mathcal{V} = \{1, \dots, n\}$ 表示顶点集, $\mathcal{E}(t) \subset \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ 表示边集, 非负矩阵 $A(t) = (a_{ij}(t))_{n \times n}$ 为邻接加权阵, $t \in \mathbb{R}_+$ 表示时刻. 如果顶点 i 可以接收到顶点 j 的信息, 则称 j 是 i 的入邻居, i 是 j 的出邻居, 此时 $(j, i) \in \mathcal{E}(t)$ 且 $a_{ij}(t) > 0$ 成立; 否则, $a_{ij}(t) = 0$. 定义 $N_i^{\text{in}}(t) = \{j \in \mathcal{V} | (j, i) \in \mathcal{E}(t)\}$ 为顶点 i 在 t 时刻的所有入邻居的集合. 定义 $N_i^{\text{out}}(t) = \{j \in \mathcal{V} | (i, j) \in \mathcal{E}(t)\}$ 为顶点 i 在 t 时刻的所有出邻居的集合. 通常情况下, 智能体的邻居是指它的入邻居, 定义 $N_i(t) = N_i^{\text{in}}(t)$. 如果对所有的 $i \in \mathcal{V}$, $\sum_{j=1}^n a_{ij}(t) = \sum_{j=1}^n a_{ji}(t)$ 均成立, 则称图 $\mathcal{G}(t)$ 是加权平衡图. 若对于任意的 $i, j \in \mathcal{V}$, 有 $a_{ij}(t) = a_{ji}(t)$, 则 $\mathcal{G}(t)$ 为无向图. 图的Laplacian矩阵定义为

$$L(t) = (l_{ij}(t))_{n \times n}, \quad l_{ii}(t) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t).$$

若 $i \neq j$, 则 $l_{ij}(t) = -a_{ij}(t)$. 若存在有限的顶点序列 $i_1, \dots, i_{r+1}$ 满足 $(i_q, i_{q+1}) \in \mathcal{E}$, $q = 1, \dots, r$, 则称顶点 i_1 到顶点 i_{r+1} 存在一条路径. 若固定有向图 $\mathcal{G}$ 中任意两个顶点 i, j 间都存在一条有向路径, 则称图 $\mathcal{G}$ 是强连通的. 对于无向图 $\mathcal{G}$, 若任意两个顶点 i, j 间都存在一条路径, 则称图 $\mathcal{G}$ 是连通图. 在分布式协调控制中, 图的连通性往往扮演着十分重要的角色^[91-95]. 下面介绍 δ -强连通图和 B -强连通图的定义及性质.

定义 1(δ -强连通) 给定时变有向图 $\mathcal{G}(t)$, 如果存在正实数 T 和 δ , 对于任意 $t \geq 0$, 有 $\int_t^{t+T} a_{ij}(s) ds \geq \delta$, 则称 (j, i) 为一条 δ -边. 如果由边集 $E_{(\delta, T)} = \{(j, i) \in \mathcal{V} \times \mathcal{V} | \int_t^{t+T} a_{ij}(s) ds \geq \delta, \forall t \geq 0\}$ 决定的图 $\mathcal{G}_{(\delta, T)} = (\mathcal{V}, E_{(\delta, T)})$ 满足强连通条件, 则称图 $\mathcal{G}(t)$ 为 δ -强连通图.

考虑如下的一致性模型:

$$\dot{x}(t) = -L(t)x(t), \quad (1)$$

其中: $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $L(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 为通信图的Laplacian矩阵. 对于式(1), 定义如下的状态转移矩阵^[96]:

$$\Phi_1(t, s) = I - \int_s^t L(\tau) d\tau + \int_s^t \int_s^{\tau_1} L(\tau_1) L(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \dots, \quad (2)$$

其中 $t \geq s \geq 0$. 显然, $\Phi_1(t, s)$ 是随机矩阵.

引理 1^[69] 如果通信图 $\mathcal{G}(t)$ 满足平衡和 δ -强连通条件, 则对于任意的 $t \geq s \geq 0$,

$$|[\Phi_1(t, s)]_{ij} - \frac{1}{n}| \leq H_1 \gamma_1^{t-s}, \quad i, j \in \mathcal{V}, \quad (3)$$

其中:

$$H_1 = (1 - \frac{1}{(8n^2)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}})^{-1},$$

$$\gamma_1 = (1 - \frac{1}{(8n^2)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}})^{\frac{1}{(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1) \lfloor \frac{n}{2} \rfloor T}},$$

$\Phi_1(t, s)$ 如式(2)所示.

定义 2(B -强连通) 给定常数 $B, \ell > 0$, 对于时变有向图 $\mathcal{G}(t)$, 当 $(j, i) \in \mathcal{E}(t)$, $a_{ij}(t) > \ell$; 否则, $a_{ij}(t) = 0$. 如果对于任意的 $t \geq 0$, 由边集

$$E_B(t) = \bigcup_{k=tB}^{(t+1)B-1} E(k)$$

决定的图 $\mathcal{G}_{(B)} = (\mathcal{V}, E_B(t))$ 为强连通图, 则称 $\mathcal{G}(t)$ 为 B -强连通(周期组合强连通).

考虑如下的一致性模型:

$$x(t+1) = A(t)x(t), \quad (4)$$

其中: $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 为邻接加权阵, 满足 $A(t)\mathbf{1}_n = \mathbf{1}_n$. 对于式(4), 定义如下的状态转移矩阵:

$$\Phi_2(t, s) = \begin{cases} A(t-1) \cdots A(s+1)A(s), & \text{若 } t > s, \\ I_n, & \text{若 } t = s. \end{cases} \quad (5)$$

引理 2^[38, 56] 如果通信图 $\mathcal{G}(t)$ 满足平衡和 B -强连通条件, 则对于任意的 $t \geq s \geq 0$,

$$|[\Phi_2(t, s)]_{ij} - \frac{1}{n}| \leq H_2 \gamma_2^{t-s}, \quad i, j \in \mathcal{V}, \quad (6)$$

其中:

$$H_2 = \frac{2(1 + \ell^{-(n-1)B})}{(1 + \ell^{(n-1)B})}, \quad \gamma_2 = (1 - \ell^{(n-1)B})^{\frac{1}{(n-1)B}},$$

$\Phi_2(t, s)$ 如式(5)所示.

2.2 凸分析

下面介绍凸函数和凸集的基本概念和性质(详见文献[97-99]).

对于函数 $f(\cdot) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, 若对任意的 $x, y \in \mathbb{R}^m$ 及 $0 < \gamma < 1$, 不等式

$$f(\gamma x + (1 - \gamma)y) \leq \gamma f(x) + (1 - \gamma)f(y)$$

成立, 则称函数 $f(x)$ 是凸函数. 对于凸函数 f , 若不等式

$$\langle \nabla f(x), y - x \rangle \leq f(y) - f(x), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^m$$

成立, 则称 $\nabla f(x)$ 是 f 在点 $x \in \mathbb{R}^m$ 的次梯度. 凸函数一定存在次梯度. 进一步, 如果凸函数可微, 则梯度是该函数唯一的次梯度. 给定凸函数 $f(\cdot) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, 若存在常数 $\mu > 0$ 使得不等式

$$\langle \nabla f(x), y - x \rangle + \mu \|y - x\|^2 \leq f(y) - f(x),$$

$\forall x, y \in \mathbb{R}^m$ 成立, 则称 f 为强凸函数. 特别地, 如果函数 $f(x)$ 是凸函数, 则 $-f(x)$ 被称为凹函数. 如果函数 $f(x)$ 二阶可微, 则记 $\nabla^2 f(x) = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}$ 为其Hessian矩阵.

给定集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, 若对任意的 $0 < \gamma < 1$ 及 $x, y \in \Omega$, 有 $\gamma x + (1 - \gamma)y \in \Omega$, 则称 Ω 为凸集. 给定一个凸集 Ω , 定义 $\|x\|_{\Omega} \triangleq \inf_{y \in \Omega} \|x - y\|$ 为点 $x \in \mathbb{R}^m$ 到 Ω 的欧氏距离. 对任意一点 $x \in \mathbb{R}^m$ 存在唯一的点 $P_{\Omega}(x) \in \Omega$ 满足 $\|x - P_{\Omega}(x)\| = \|x\|_{\Omega}$, 这里 $P_{\Omega}(\cdot)$ 称为点 x 到集合 Ω 的投影. 关于投影的一些基本性质由如下引理给出.

引理 3^[98] 如果 $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ 是一闭凸集, 则有

1) 非扩展性.

对于任意的 $x, y \in \mathbb{R}^m$, 有

$$\|P_{\Omega}(x) - P_{\Omega}(y)\| \leq \|x - y\|;$$

2) 投影不等式.

对于任意的 $u \in \mathbb{R}^m$, $v \in \Omega$, $(u - P_{\Omega}(u))^T (P_{\Omega}(u) - v) \geq 0$ 成立;

3) 可微性.

$F(x) = \|x - P_{\Omega}(x)\|^2$ 是关于 x 处处连续可微的, 且有 $\nabla F(x) = x - P_{\Omega}(x)$.

进一步, 介绍凸集 $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ 的一些其他几何性质. 定义 Ω 在点 x 的法锥如下:

$$\mathcal{C}_{\Omega}(x) = \{d | \langle d, y - x \rangle \leq 0, \quad \forall y \in \Omega\}.$$

定义 Ω 在点 x 的切锥如下:

$$\mathcal{T}_{\Omega}(x) = \{v | v = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x^k - x}{\tau_k}, \quad \tau_k \rightarrow 0^+, \quad x^k \in \Omega, \quad x^k \rightarrow x\}.$$

如果 Ω 是闭凸集, 那么切锥 $\mathcal{T}_{\Omega}(x)$ 是法锥 $\mathcal{C}_{\Omega}(x)$ 的极锥, 即有 $\mathcal{T}_{\Omega}(x) = \{v | \langle v, d \rangle \leq 0, \quad \forall d \in \mathcal{C}_{\Omega}(x)\}$.

引理 4^[99] 如果 Ω 是闭凸集, 则对于任意一点 $v \in \mathbb{R}^m$, 存在一点 $c_{\Omega}(x) \in \mathcal{C}_{\Omega}(x)$ 满足

$$P_{\mathcal{T}_{\Omega}(x)}(v) = v - c_{\Omega}(x).$$

3 离线分布式优化

本节对离线分布式优化的研究成果进行梳理. 根据是否存在约束的情况, 当前已有的关于离线分布式优化的工作大致可以分为两类: 无约束离线分布式优化和有约束离线分布式优化.

3.1 无约束离线分布式优化

静态环境下的无约束优化是分布式优化研究的起点, 目前大多数分布式优化的结论均是针对无约束情形的. 无约束离线分布式优化问题描述如下:

$$\min_x f(x), f(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x), \quad (7)$$

其中: $f_i(\cdot) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ 表示第 i 个智能体的目标函数. 对于所有的 $i \in \mathcal{V}$, 只有智能体 i 能获得 f_i 的信息. 智能体的目标是通过与邻居的局部信息交互找到全局目标函数 f 的一个全局最优解.

针对问题(7), 文献[34–35]结合一致性算法和梯度下降算法提出了一类分布式优化算法:

$$x_i(t+1) = \sum_{j \in N_i(t)} a_{ij}(t) x_j(t) - \eta(t) \nabla f_i(x_i(t)), \quad (8)$$

其中: $\eta(t) > 0$ 为迭代步长, $\sum_{j=1}^n a_{ij} = 1, i \in \mathcal{V}$. 一方面, 若将 $\eta(t) \nabla f_i(x_i(t))$ 看成扰动, 式(8)即为带有扰动项的一致性模型. 另一方面, 若多智能体系统达到一致时(即 $x_i = x_j$), 式(8)则简化成传统的梯度下降算法. 通过执行算法(8), 各智能体与邻居进行状态交互的同时, 也最小化自身的目标函数 f_i . 若选取固定步长 $\eta(t) = \eta > 0$, 即使在梯度 $\nabla f_i(x_i(t))$ 有界的假设下, 也难以保证扰动项 $\eta \nabla f_i(x_i(t))$ 衰减至零, 多智能体系统往往无法精确地达到一致. 从而, 将间接地影响梯度下降算法的收敛性. 文献[34]先将 $\eta \nabla f_i(x_i(t))$ 视为干扰项, 采用鲁棒分析手段并结合图理论, 分析了一致性误差上界; 再利用凸优化理论, 分析了优化误差 $f(x_i(t)) - f(x^*)$ 的上界. 结论表明, 若通信图满足平衡和 B -强连通条件, 则在算法(8)下, 对于 $i \in \mathcal{V}$, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $f(x_i(t)) - f(x^*)$ 的上界与步长 η 成正比. 由此可知, 若要保证 $x_i(t)$ 精确收敛到目标函数的一个最优解(即当 $t \rightarrow \infty, f(x_i(t)) - f(x^*) \rightarrow 0$), 则需使式(8)中的步长衰减至零, 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} \eta(t) = 0$. 若假设时变步长 $\eta(t)$ 非增, 且满足以下条件:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \eta(t) \rightarrow \infty, \sum_{t=0}^{\infty} \eta^2(t) < \infty, \quad (9)$$

则在算法(8)下, 智能体的状态可精确地收敛到问题(7)的一个最优解. 显然, 由 $\sum_{t=0}^{\infty} \eta^2(t) < \infty$ 可知 $\lim_{t \rightarrow \infty} \eta(t) = 0$. 因此, $\eta(t)$ 是一衰减步长, 该步长在文献[38, 58–59]中被广泛采用.

为避免使用平衡图假设, 文献[38–39]基于 push-sum 算法提出了一类 subgradient-push 算法:

$$\begin{cases} w_i(t+1) = \sum_{j \in N_i(t)} \frac{x_j(t)}{d_j(t)}, \\ y_i(t+1) = \sum_{j \in N_i(t)} \frac{y_j(t)}{d_j(t)}, \\ z_i(t+1) = \frac{w_i(t+1)}{y_i(t+1)}, \\ x_i(t+1) = w_i(t+1) - \eta(t+1) \nabla f_i(z_i(t+1)), \end{cases} \quad (10)$$

其中: $d_i(t) = |N_i^{\text{out}}(t)|, y_i(0) = 1$. 当时变有向图满

足 B -强连通条件且非增迭代步长满足条件(9)时, 文献[38–39]结合凸分析理论和 supermartingale 收敛性理论证明了算法(10)的收敛性. 此外, 文献[40]考虑了算法(10)的异步实现问题. 由文献[38–39]中的结论可知, 当目标函数是凸函数时, 算法(8)和算法(10)的收敛速度为 $\mathcal{O}(\frac{\ln t}{\sqrt{t}})$; 当目标函数满足强凸条件时, 算

法(8)和算法(10)的收敛速度为 $\mathcal{O}(\frac{\ln t}{t})$. 与集中式梯度下降算法相比, 分布式算法(8)和算法(10)的收敛速度更慢[38]. 针对无约束分布式优化, 为提高算法的收敛速度, 研究者们提出了一些改进型的分布式梯度算法. 针对光滑目标函数, 文献[41–43]基于 Nesterov 梯度算法提出了一类分布式梯度算法:

$$\begin{cases} x_i(t+1) = \sum_{j \in N_i} a_{ij} x_j(t) - \frac{\eta}{t+1} \nabla f_i(y_i(t)), \\ y_i(t+1) = (1 + \frac{t}{t+3}) x_i(t) - \frac{t-1}{t+2} x_i(t-1), \end{cases} \quad (11)$$

其中: $\eta > 0, \sum_{j=1}^n a_{ij} = 1, i \in \mathcal{V}$. 当无向通信图连通且目标函数连续可微时, 算法(11)的收敛速度为 $\mathcal{O}(\frac{1}{t^2})$.

另外, 文献[44–46]提出了一类 DIGing 梯度算法:

$$\begin{cases} x_i(t+1) = \sum_{j \in N_i} a_{ij} x_j(t) - \eta s_i(t), \\ s_i(t+1) = \sum_{j \in N_i} a_{ij} s_j(t) + \nabla f_i(x_i(t+1)) - \nabla f_i(x_i(t)), \end{cases} \quad (12)$$

其中: $s_i(0) = \nabla f_i(x_i(0)), \eta > 0$ 为固定迭代步长. 假设无向通信图连通, 文献[44]证明了算法的收敛性. 结论表明, 当目标函数为光滑的凸函数时, 算法(12)的收敛速度为 $\mathcal{O}(\frac{1}{t})$; 进一步, 若目标函数满足强凸条件, 则算法(12)具有线性收敛速度为 $\mathcal{O}(\mu^t)$, 其中 $0 < \mu < 1$. 文献[45–46]将该结论推广到时变有向平衡图的情形. 结合 push-sum 算法和 DIGing 算法, 文献[47]提出了一类加速分布式优化算法:

$$\begin{cases} x_i(t+1) = \sum_{j \in N_i} \frac{x_j(t)}{d_j} - \eta w_i(t), \\ y_i(t+1) = \sum_{j \in N_i} \frac{y_j(t)}{d_j}, \\ z_i(t+1) = \frac{w_i(t+1)}{y_i(t+1)}, \\ w_i(t+1) = \sum_{j \in N_i} \frac{w_j(t)}{d_j} + \nabla f_i(z_i(t+1)) - \nabla f_i(z_i(t)), \end{cases} \quad (13)$$

其中: $d_i(t) = |N_i^{\text{out}}|, y_i(0) = 1, w_i(0) = \nabla f_i(z_i(0))$. 当有向通信图满足强连通条件, 且目标函数满足强凸

条件时,在算法(13)下, $z_i(t)$ 以线性速度收敛到问题(7)的全局最优值. 此外, 类似的加速算法还有分布式extra算法^[48–51]. 文献[41–43]中的Nesterov算法主要是通过加速趋同来达到提高整体算法收敛速度的目的, 而文献[44–47]中的DIGing算法及文献[48–51]中的extra算法则是通过改进梯度项来提高算法收敛速度的.

在无约束优化问题(7)中, 所有局部目标函数经公共变量 x 耦合在一起. 实际上, 通过引入方程约束 $x_1 = \cdots = x_n$ 可以将目标函数进行解耦, 其中 $x_i \in \mathbb{R}^m$. 若假设通信图为无向连通图, 约束 $x_1 = \cdots = x_n$ 可以等价地表示为 $(L \otimes I_m)x = 0$. 相应地, 问题(7)可以等价地表示为

$$\begin{cases} \min f(x), f(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x_i), \\ \text{s.t. } (L \otimes I_m)x = 0, \end{cases} \quad (14)$$

其中 $x = [x_1^T \cdots x_n^T]^T$. 对于式(14), 定义增广Lagrange函数:

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) + \lambda^T (L \otimes I_m)x + \frac{1}{2} x^T (L \otimes I_m)x,$$

其中 $\lambda = [\lambda_1^T \cdots \lambda_n^T]^T$. 基于原始-对偶算法(primal dual algorithm):

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\nabla_x \mathcal{L}(x, \lambda), \\ \dot{\lambda}(t) = \nabla_\lambda \mathcal{L}(x, \lambda). \end{cases}$$

文献[52]提出了一类连续时间的分布式算法:

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = \sum_{j \in N_i} (x_j(t) - x_i(t)) + \sum_{j \in N_i} (\lambda_j(t) - \lambda_i(t)) - \nabla f_i(x_i(t)), \\ \dot{\lambda}_i(t) = \sum_{j \in N_i} (x_i(t) - x_j(t)). \end{cases} \quad (15)$$

假设通信图为固定无向图, 文献[52]结合原始-对偶原理、Karush-Kuhn-Tucker(KKT)条件和Lyapunov稳定性理论分析了算法(15)的收敛性. 在通信图为有向平衡图的假设下, 文献[53]提出了一类改进型的原始-对偶算法:

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = \beta \sum_{j \in N_i} a_{ij} (x_j(t) - x_i(t)) - v_i(t) - \alpha \nabla f_i(x_i(t)), \\ \dot{v}_i(t) = \alpha \beta \sum_{j \in N_i} a_{ij} (x_i(t) - x_j(t)). \end{cases} \quad (16)$$

当通信图满足平衡和强连通条件时, 文献[53]给出了参数 α, β 的取值范围以保证算法(16)指数收敛, 并在周期通信和事件驱动通信下分析了算法(16)的收敛性. 此外, 针对强凸目标函数, 文献[54–55]提出了一类零梯度和算法(zero-gradient-sum algorithm):

$$\dot{x}_i(t) = \gamma (\nabla^2 f_i(x_i(t)))^{-1} \sum_{j \in N_i} a_{ij} (x_j(t) - x_i(t)), \quad (17)$$

其中 $\gamma > 0$. 为保证算法收敛, 智能体的初始状态 $x_i(0)$ 需满足 $\nabla f_i(x_i(0)) = 0$, 即 $x_i(0)$ 是局部目标函数 f_i 的最小值点. 借助强凸函数的定义, 文献[54–55]设计了一类广义距离函数形式的Lyapunov函数以分析算法的收敛性. 研究表明, 当通信图满足平衡和强连通条件时, 算法(17)具有指数收敛性.

3.2 有约束离线分布式优化

实际上, 在多智能体系统完成优化任务的过程中, 往往需要满足一些特定的约束条件. 譬如, 在分布式电力网络的经济调度问题中^[30–32], 智能体在最小化所有电站成本函数之和时, 需要满足电力平衡条件的约束, 即输出功率的总和需等于总的输入功率; 在非合作博弈问题中^[100–102], 个体在最小化自身成本函数时, 往往需要将行为限定在指定的行为集中. 为拓展分布式优化的应用范围, 基于多智能体系统研究有约束分布式优化问题显得十分重要. 有约束离线分布式优化问题描述如下:

$$\begin{cases} \min f(x), f(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x), \\ \text{s.t. } x \in X : \triangleq \bigcap_{i=1}^n X_i, \end{cases} \quad (18)$$

其中: $f_i(\cdot) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ 表示第 i 个智能体的目标函数, f 表示全局目标函数; 可行集 X 为这些集合的交集; 只有第 i 个智能体能感知 f_i 和 X_i 的信息. 若对于所有的 $i = 1, \dots, n$, f_i 均为凸函数, 且 X_i 为凸集, 则式(18)为凸优化问题; 否则, 式(18)为非凸优化问题. 现有的绝大多数结论都是讨论凸优化情形的^[56–61]. 特别地, 若 $X_i = \{x \in \mathbb{R}^m | g_i(x) \leq 0, A_i x - b = 0\}$, 则问题(18)为有不等式组和线性方程约束的分布式优化.

针对问题(18), 文献[56]结合投影梯度算法和一致性算法提出了一类分布式算法:

$$\begin{cases} v_i(t) = \sum_{j \in N_i(t)} a_{ij}(t) x_j(t), \\ x_i(t+1) = P_{X_i}(v_i(t) - \eta(t) \nabla f_i(x_i(t))), \end{cases} \quad (19)$$

其中: $\eta(t) > 0$ 是满足条件(9)的衰减步长, $\sum_{j=1}^n a_{ij} = 1$, $i \in \mathcal{V}$. 假设约束为统一集合时, 即 $X_i = X, i, j \in \mathcal{V}$, 且通信图满足平衡和 B -强连通条件, 文献[56]分析了算法(19)的收敛性. 当约束为非统一集合时, 即存在 $i, j \in \mathcal{V}, X_i \neq X_j$, 文献[56]在全连通图下分析了算法(19)的收敛性. 当约束为非统一集合时, 文献[57]将结论推广到了有向图满足平衡和强连通条件的情形, 同时还研究了通信时延对算法(19)收敛性的影响. 考虑统一集合约束 $X_i = X, i, j \in \mathcal{V}$, 为避免使用平衡图假设, 文献[58]提出了一类改进型的分布式投影梯度算法:

$$\begin{cases} v_i(t) = \sum_{j \in N_i(t)} a_{ij}(t)x_j(t), \\ x_i(t+1) = P_X(v_i(t) - \eta(t) \frac{\nabla f_i(v_i(t))}{z_{ii}(t)}), \\ z_i(t+1) = \sum_{j \in N_i(t)} a_{ij}(t)z_j(t), \end{cases} \quad (20)$$

其中: $z_i(t) = [z_{i1}(t) \cdots z_{in}(t)]^T$, $z_{ii} = 1$; $z_{ij} = 0$, $i \neq j$, $\sum_{j=1}^n a_{ij} = 1$, $i \in \mathcal{V}$. 算法(20)中, 基于一致性算法更新的向量 $z_i(t)$ 可以看作是加权阵的 1 特征值对应的左特征向量的估计量, 该估计量用于抵消左特征向量对梯度项的影响, 从而达到避免使用平衡图条件的目的. 进一步, 文献[59–60]给出了算法(19)的一种连续时间形式

$$\begin{cases} \dot{v}_i(t) = \sum_{j \in N_i(t)} a_{ij}(t)(x_j(t) - x_i(t)), \\ \dot{x}_i(t) = v_i(t) - \eta(t) \nabla f_i(x_i(t)) - \\ (x_i(t) - P_{X_i}(x_i(t))), \end{cases} \quad (21)$$

其中 $\eta(t) \geq 0$ 满足

$$\int_0^\infty \eta(t) dt \rightarrow \infty, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \eta(t) = 0.$$

值得注意的是, 在运行算法(19)–(20)时, 每一步迭代均需要处理投影算子, 因而, 文献[56–58]中的结论只适用于具有规则几何形状的简单凸集约束. 当可行集约束中具有方程组或不等式组时, 可行集的几何形状会变得复杂且无规则, 此时, 计算可行集外一点到集合内的投影点需要进行复杂的运算, 这将大大地影响算法的有效性和收敛性. 考虑具有线性方程组约束的情形:

$$\min f(x), \quad f(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x), \quad (22)$$

$$\text{s.t. } X_i = \{x \in \Omega_i \mid B_i x - b_i = 0\}, \quad i \in \mathcal{V},$$

其中: $B_i \in \mathbb{R}^{m \times p_i}$, $b_i \in \mathbb{R}^{p_i}$, $\Omega_i \subseteq \mathbb{R}^m$. 针对问题(22), 文献[61]先借用式(14)中的约束 $(L \otimes I_m)x = 0$ 对目标函数进行解耦, 然后基于传统的原始-对偶算法给出了相应的分布式优化算法:

$$\begin{cases} \dot{v}_i(t) = \sum_{j \in N_i} a_{ij}(x_i(t) - x_j(t)), \\ \dot{x}_i(t+1) = P_{\Omega_i}(x_i(t) - \eta(\nabla f_i(x_i(t)) + B_i^T(y_i(t) + \\ B_i x_i(t) - b_i) + w_i(t) + v_i(t))), \\ \dot{y}_i(t+1) = y_i(t) + B_i y_i(t+1) - b_i, \\ \dot{w}_i(t+1) = w_i(t) + v_i(t+1)), \end{cases} \quad (23)$$

其中 $\eta > 0$. 文献[61]假设局部目标函数二阶连续可微且 Hessian 矩阵有界, 给出了增益参数 η 的一个上界以保证算法(23)的渐近收敛性. 针对不同的约束形式, 文献[62–64]基于传统的原始-对偶算法提出了多种类似于算法(21)的分布式算法. 引入方程约束 $(L \otimes I_m)x$

$= 0$ 后, 只有当 Laplacian 矩阵 L 满足对称条件 $L^T = L$ 时, 才能利用传统的原始-对偶算法得出形如(23)的分布式算法. 因此, 文献[61–64]的收敛性结论均是在通信图为无向连通图的条件得出的, 且不能推广到通信图为有向图的情形.

不等式组约束经常出现在模式识别^[65]、信号处理^[66]和图像恢复^[67–68]等诸多工程领域中. 一般而言, 线性方程组 $B_i x - b_i = 0$ 可以等价地写成不等式组

$$\begin{cases} B_i x - b_i \leq 0, \\ -(B_i x - b_i) \leq 0. \end{cases}$$

因此, 与有方程组约束的分布式优化相比, 有不等式组约束的情况更具一般性. 文献[69]将通信图建模为时变有向图, 研究了一类具有凸不等式组约束的分布式优化问题:

$$\min f(x), \quad f(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x), \quad (24)$$

$$\text{s.t. } X_i = \{x \in \mathbb{R}^m \mid g_i(x) \leq 0\}, \quad i \in \mathcal{V},$$

其中: $f_i(\cdot)$, $g_i(\cdot) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ 均为凸函数; 智能体 i 只能感知 f_i 和 g_i 的信息. 定义 $X = \bigcap_{i=1}^n X_i$, 并作出如下假设.

假设 1^[69] 集合 X 非空.

假设 2^[69] 存在常数 $K_1, K_2 > 0$ 使得 $\|\nabla f_i(x)\| \leq K_1$ 和 $\|\nabla g_i(x)\| \leq K_2$ 成立, 其中 $i \in \mathcal{V}$.

在假设 1 下, 优化问题(24)的最优解存在^[70]. 针对式(24), 构造如下的 Lagrange 函数:

$$\begin{cases} \mathcal{L}(x, z) = \sum_{i=1}^n \mathcal{L}_i(x, z_i), \\ \mathcal{L}_i(x, z_i) = f_i(x) + z_i g_i(x), \end{cases} \quad (25)$$

其中: $z = [z_1 \cdots z_n]^T \geq 0$ 为 Lagrange 乘子, $z_i \in \Omega_i$, $\Omega_i = \{z \in \mathbb{R} \mid 0 \leq z \leq \bar{z}_i\}$. 显然, 对于 $i = 1, \dots, n$, $\mathcal{L}_i(x, z_i)$ 是关于 x 的凸函数, 是关于 z_i 的线性函数. 因此, $\mathcal{L}(x, z)$ 是关于 x, z 的凸-凹函数. 定义 $X^* \times Z^* \subseteq \mathbb{R}^m \times \Omega$ 为函数 $\mathcal{L}(x, z)$ 的鞍点集, 其中 $\Omega = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n$, 即对于任意的 $x^* \in X^*$, $z^* \in Z^*$, $x \in \mathbb{R}^m$ 和 $z \in \mathbb{R}^n$ 有 $\mathcal{L}(x^*, z) \leq \mathcal{L}(x^*, z^*) \leq \mathcal{L}(x, z^*)$. 根据鞍点定理^[69]可知, x^* 是问题(24)的一个最优点当且仅当存在 z^* 使得 (x^*, z^*) 是函数 $F(x, z)$ 的鞍点. 因此, X^* 即为式(24)的最优解集, Z^* 为对应 Lagrange 乘子的最优解集. 文献[69]基于一致性算法和鞍点策略提出了一类连续时间的分布式优化算法

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = \sum_{j \in N_i(t)} a_{ij}(t)(x_j(t) - x_i(t)) - \\ \eta(t)(\nabla f_i(x_i(t)) + z_i(t) \nabla g_i(x_i(t))), \\ \dot{z}_i(t) = P_{\Omega_i(z_i(t))}[\eta(t) g_i(x_i(t))], \end{cases} \quad (26)$$

其中: $x_i(t) \in \mathbb{R}^m$ 为智能体 i 的状态, $\eta(t) \geq 0$ 为非增步长, 且满足

$$\int_0^\infty \eta(t) dt \rightarrow \infty, \int_0^\infty \eta^2(t) dt < \infty,$$

$z_i(0) = z_{i0} \in \Omega_i$, $P_{\mathcal{T}_{\Omega_i}(z_i(t))}[b(t)g_i(x_i(t))] = 0$ 若 $z_i(t) = 0$, $b(t)g_i(x_i(t)) < 0$, 或 $z_i(t) = \bar{z}_i$, $b(t)g_i(x_i(t)) > 0$; 否则, $P_{\mathcal{T}_{\Omega_i}(z_i(t))}[b(t)g_i(x_i(t))] = b(t)g_i(x_i(t))$. 定义 $z(t) = [z_1(t) \cdots z_n(t)]^T$, 显然, $\mathcal{T}_\Omega(z(t))$ 是 Ω 在点 $z(t)$ 的切锥, $\mathcal{T}_{\Omega_i}(z_i(t))$ 为该切锥的第 i 个分量. 假设通信图 $\mathcal{G}(t)$ 满足 δ -强连通条件, 文献[69]分析了算法的

收敛性.

定理 1^[69] 如果假设 1-2 得以满足, 且 $\mathcal{G}(t)$ 满足平衡和 δ -强连通条件, 则在算法(26)下, 所有智能体的状态渐近地收敛到式(24)的一个最优解, 即存在 $x^* \in X^*$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - x^*\| = 0, i \in \mathcal{V}$.

定理 1 的证明请参阅文献[68]中定理 2 的证明, 这里不再赘述.

基于本节关于离线分布式优化的论述, 给出关于各类离线算法收敛速度, 如表 1 所示.

表 1 离线分布式优化算法的收敛速度

Table 1 Convergence rates of offline distributed optimization algorithms

算法	收敛速度		文献
	凸目标函数	强凸目标函数	
分布式(投影)次梯度算法	$\mathcal{O}(\frac{\ln(t)}{\sqrt{t}})$		[34-35, 56-58]
subgradient-push算法	$\mathcal{O}(\frac{\ln(t)}{\sqrt{t}})$	$\mathcal{O}(\frac{\ln(t)}{t})$	[38-40]
Nesterov梯度算法	$\mathcal{O}(\frac{1}{t^2})$		[41-43]
DIGing梯度算法	$\mathcal{O}(\frac{1}{t})$	$\mathcal{O}(\mu^t)$	[44-47]
分布式extra算法	$\mathcal{O}(\frac{1}{t})$	$\mathcal{O}(\mu^t)$	[48-51]
分布式primal-dual算法	渐进收敛		[52, 61-64]
改进型分布式 primal-dual算法		指数收敛	[53]
zero-gradient-sum算法		指数收敛	[54-55]

4 在线分布式优化

在实际应用中, 分布式优化发生的场景往往是动态的. 譬如, 在动态目标跟踪问题中^[85], 由目标位置、速度以及加速度等信息决定的目标函数往往随着时间的推移而改变, 并且这些改变是无法预知的. 因此, 在线分布式优化具有广泛的工程实用价值. 本节将对在线分布式优化的研究现状和主要成果进行梳理. 在线分布式优化问题描述如下.

考虑一个由 n 个智能体构成的多智能体系统, 记为集合 $\mathcal{V} = \{1, \dots, n\}$. 对于任意智能体 $i \in \mathcal{V}$, 给定局部目标函数序列 $\{f_i^1, \dots, f_i^T\}$, 其中 $f_i^t: X \rightarrow \mathbb{R}, t \in \{1 \rightarrow T\}, T \in \mathbb{N}^+, X \subset \mathbb{R}^m$ 为一闭集. 在任一时刻 $t \in \{1 \rightarrow T\}$, 智能体 i 根据历史时刻的局部目标函数信息做出决策, 在定义域 X 内选取一状态 $x_i(t)$. 该状态被选定后, 当前时刻的目标函数信息被揭示. 换言之, 目标函数 f_i^t 的信息不能被预知, 只有当选定 $x_i(t)$ 后, 智能体 i 才能到 f_i^t 的信息. 在每一时刻 $t \in \{1 \rightarrow T\}$, 智能体旨在利用它们之间的合作行

为解决如下优化问题:

$$\begin{aligned} \min_x f^t(x), f^t(x) &= \sum_{i=1}^n f_i^t(x), \\ \text{s.t. } x &\in X. \end{aligned} \quad (27)$$

为了对在线优化算法的性能进行分析, 需要选取特定的离线优化问题作为参考标准. 运行在线算法产生的函数值与该离线优化问题的最优目标函数值之间的差被称为 **regret**^[71]. 在线优化算法的性能通常可以用 **regret** 来衡量. 根据不同的参考标准, **regret** 通常可以分为动态 **regret** 和静态 **regret**. 如果离线优化问题是最小化所有时刻全局目标函数的和 $\sum_{t=0}^T f^t(x)$, 则对应的 **regret** 被称为静态 **regret**^[78, 82], 具体定义如下:

$$\mathcal{R}_i^s(T) = \sum_{t=0}^T f^t(x_i(t)) - \sum_{t=0}^T f^t(x^*), i \in \mathcal{V}, \quad (28)$$

其中 $x^* = \arg \min_{x \in X} \sum_{t=0}^T f^t(x)$. 如果某一在线算法能

保证 $\text{regret}(28)$ 呈次线性增长, 即有 $\lim_{T \rightarrow \infty} \sup \frac{\mathcal{R}_i^s(T)}{T} = 0, \forall i \in \mathcal{V}$, 则该在线算法有效. 如果离线优化问题是最小化每一个时刻的全局目标函数 $f^t(x)$, 则对应的 regret 被称为动态 $\text{regret}^{[85, 89]}$, 具体定义如下:

$$\mathcal{R}_i^d(T) = \sum_{t=0}^T f^t(x_i(t)) - \sum_{t=0}^T f^t(x^*(t)), i \in \mathcal{V}, (29)$$

其中 $x^*(t) = \arg \min_{x \in X} f^t(x), t \in \{\rightarrow T\}$.

注 1 在线优化具有较强的实用性, 它最初主要被应用于机器学习领域中^[72-76]. 与动态优化相比, 在线优化更具一般性. 在动态优化中, 决策者需要提前获知目标函数的变化规律, 为了跟踪到目标函数的最优值, 需要目标函数的梯度连续变化, 甚至关于时间连续可微^[77]. 在线优化中的目标函数可以无规律地变化, 而且决策者不能预知当前和未来时刻的目标函数信息. 文献[72-76]中所涉及的在线算法均是集中式的. 与离线分布式优化相比, 在线分布式优化的研究起步相对较晚, 其成果还不够丰富. 因而, 本节不再对在线分布式优化的研究成果进行分类.

针对问题(27), 假设有向通信图满足平衡和强连通条件, 文献[78]提出了一类在线分布式投影梯度算法:

$$\begin{cases} v_i(t) = \sum_{j \in N_i(t)} a_{ij}(t)x_j(t), \\ x_i(t+1) = P_X(v_i(t) - \eta(t)\nabla f_i^t(x_i(t))), \end{cases} (30)$$

其中: $\eta(t)$ 为学习速率, $\sum_{j=1}^n a_{ij} = 1, i \in \mathcal{V}$. 此外, 基于离散时间的原始-对偶算法, 文献[79]提出了一类在线算法:

$$\begin{cases} x_i(t+1) = x_i(t) + \sigma \left(\alpha \sum_{j \in N_i} (x_j(t) - x_i(t)) + \sum_{j \in N_i} a_{ij}(\lambda_j(t) - \lambda_i(t)) - \eta(t)\nabla f_i^t(x_i(t)) \right), \\ \lambda_i(t+1) = \lambda_i(t) + \sum_{j \in N_i} (x_i(t) - x_j(t)). \end{cases} (31)$$

假设时变有向通信图满足平衡和 B -强连通条件, 基于对偶平均算法 (dual averaging algorithm), 文献[80-82]提出了一类在线分布式对偶平均算法:

$$\begin{cases} y_i(t+1) = \sum_{j \in N_i(t)} a_{ij}(t)y_j(t) + \nabla f_i^t(x_i(t)), \\ x_i(t+1) = \arg \min_{x \in X} \{ \langle y_i(t), x \rangle + \frac{\psi(x)}{\eta(t)} \}, \end{cases} (32)$$

其中: $\psi(\cdot) : X \rightarrow \mathbb{R}$ 为一满足 $\psi(0) = 0$ 条件的强凸函数, $\sum_{j=1}^n a_{ij} = 1, i \in \mathcal{V}$. 文献[78-82]利用静态 regret

(28)对算法(30)-(32)的性能进行衡量. 结论表明, 当 f_i^t 为凸函数时, 在算法(30)-(32)下, 静态 $\text{regret}(28)$ 拥有次线性界 $\mathcal{O}(\sqrt{T})$. 特别地, 当 f_i^t 满足强凸条件时, 文献[78]得到了次线性界 $\mathcal{O}(\ln T)$. 为避免使用平衡图假设, 文献[83]用 ∇f_i^t 代替subgradient-push算法(10)中的 ∇f_i , 且令 $X = \mathbb{R}^m$, 提出了一类在线subgradient-push算法:

$$\begin{cases} w_i(t+1) = \sum_{j \in N_i(t)} \frac{x_j(t)}{d_j(t)}, \\ y_i(t+1) = \sum_{j \in N_i(t)} \frac{y_j(t)}{d_j(t)}, \\ z_i(t+1) = \frac{w_i(t+1)}{y_i(t+1)}, \\ x_i(t+1) = w_i(t+1) - \eta(t+1)\nabla f_i^t(z_i(t+1)). \end{cases} (33)$$

当目标函数满足强凸条件时, 在算法(33)下, 静态 $\text{regret}(28)$ 的上界为 $\mathcal{O}((\ln T)^2)$.

一般情况下, 目标函数和的最优值与各个时刻目标函数的最优值具有很大的差异. 静态 regret 的标准是优化所有时刻目标函数和, 这与(27)中描述的问题截然不同. 与静态 $\text{regret}(28)$ 的标准相比, 显然动态 $\text{regret}(29)$ 的标准更为严格. 文献[84-85]假设(29)中离线问题的最优值序列 $\{x^*(t)\}$ 满足如下动态方程:

$$x^*(t+1) = Wx^*(t) + v_t, t \in \{\rightarrow T\}, (34)$$

其中: 状态矩阵 $W \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 满足 $\|W\| \leq 1, v_t \in \mathbb{R}^m$ 为噪声. 针对问题(27), 文献[84-85]基于镜像下降算法(mirror descent algorithm)和一致性算法提出了一类在线分布式算法:

$$\begin{cases} \hat{x}_i(t+1) = \arg \min_{x \in X} \{ \eta \langle x, \nabla f_i^t(x_i(t)) \rangle + D_R(x, y_i(t)) \}, \\ x_i(t+1) = A\hat{x}_i(t+1), \\ y_i(t) = \sum_{j \in N_i(t)} a_{ij}x_j(t), \end{cases} (35)$$

其中:

$$\eta = \sqrt{\frac{(1 - \sigma_2(A))(C_T + 2R^2)}{T}},$$

$\sigma_2(A)$ 为加权阵 A 的第二大奇异值, $C_T = \sum_{t=0}^T v_t$, $D_R(\cdot, \cdot)$ 为Bregman函数,

$$R = \sqrt{\sup_{x, y \in X} D_L(x, y_i(t))}, \sum_{j=1}^n a_{ij} = 1, i \in \mathcal{V}.$$

文献[84-85]利用动态 $\text{regret}(29)$ 对算法(35)的性能进行了分析. 结论表明, 若噪声累计量 C_T 关于学习

时间 T 呈次线性增长,即 C_T 满足 $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{C_T}{T} = 0$,则在算法(35)下,动态regret(29)具有次线性界.值得一提的是,运行算法(35)时,智能体必须已知状态矩阵 A 的信息.这意味着,智能体需要预知全局目标函数和最优值序列的变化情况,这在大规模的网络系统中往往难以实现.

以上关于在线分布式优化的文献[78–85]均是假设每一时刻的目标函数为凸函数.作为凸优化的推广,伪凸优化常常出现在分式规划、计算机视觉及无摩擦接触分析等领域^[86–88].假设目标函数的和满足强伪凸条件,文献[89]研究了一类在线分布式强伪凸优化.关于(强)伪凸函数的定义如下:

定义 3^[89] 给定连续可微函数 $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ 以及凸集 $\Omega \subset \mathbb{R}^m$,如果满足不等式 $\langle \nabla f(x), y - x \rangle \geq 0$ 的 $x, y \in \Omega$ 都能使 $f(y) - f(x) \geq 0$ 成立,则称 f 是 Ω 上的伪凸函数;给定大于0的常数 β ,如果满足不等式 $\langle \nabla f(x), y - x \rangle \geq 0$ 的 $x, y \in \Omega$ 都能使

$$f(y) - f(x) \geq \frac{\beta}{2} \|y - x\|^2$$

成立,则称 f 是 Ω 上的 β -强伪凸函数.

根据定义3可知,伪凸函数可能是非凸函数.譬如,考虑函数 $f(x) = x^3 + x$, $-1 \leq x \leq 1$,显然 f 在定义域 $-1 \leq x \leq 1$ 内是非凸函数.计算可得 $\nabla f(x) = 3x^2 + 1$,如果 $\langle \nabla f(x), y - x \rangle \geq 0$,必有 $y \geq x$, $f(y) - f(x) = y^3 - x^3 + y - x \geq 0$,因此 f 是伪凸函数.进一步,令 $1 \geq y \geq x \geq -1$,可得 $f(y) - f(x) \geq \frac{1}{2} |y - x|^2$.从而, f 满足伪强凸条件.

假设 3^[89] X 为非空紧凸集.

假设 4^[89] 对于任意 $t \in \{\rightarrow T\}$, f^t 是 X 上二阶可微的 μ -强伪凸函数.

使用动态regret(29)衡量在线算法的性能时,当最优值的波动幅度较大时,维持动态regret的次线性界往往会非常困难.受集中式在线优化^[103–105]的启发,这种困难度往往可以用最优值序列 $\{x^*(t)\}$ 的累计偏差来刻画:

$$\Theta_T = \sum_{t=0}^T \|x^*(t+1) - x^*(t)\|. \quad (36)$$

针对在线分布式伪强凸优化问题,文献[89]提出了一类在线分布式辅助优化策略:

$$x_i(t+1) = \arg \min_{x \in X} \{x^T P x + \langle \eta(t) \nabla f_i^t(x_i(t)), 2P y_i(t), x \rangle\}, \quad (37a)$$

$$y_i(t) = \sum_{j \in N_i(t)} a_{ij}(t) x_j(t), \quad (37b)$$

其中: $x_i(t) \in \mathbb{R}^m$ 是智能体 i 在 t 时刻的状态, $x_i(0) =$

$x_{i0} \in X$, $\sum_{j=1}^n a_{ij} = 1, i \in \mathcal{V}$.将通信图建模为时变有向图 $\mathcal{G}(t)$,文献[89]分析了动态regret(29)的上界.

定理 2^[89] 给定常数 $\alpha > 0$,如果假设3–4得以满足, $\mathcal{G}(t)$ 满足平衡和 B -强连通条件,且

$$\eta(t) = \frac{\alpha}{\sqrt{t+1}},$$

则在算法(37)下,对于任意的 $i \in \mathcal{V}$ 和 $T \in \mathbb{N}^+$,

$$\mathcal{R}_i^d(T) \leq n\delta \sqrt{Q + \frac{16hL\Theta_T}{\alpha\mu \ln 2} (T+1)^{\frac{3}{4}} \sqrt{\ln(T+1)}}, \quad (38)$$

其中:

$$Q = \frac{(\frac{4\rho_1}{\alpha\mu} + 2\mathcal{K}_1) + 3\alpha^2(\frac{4\rho_2}{\alpha\mu} + 2\mathcal{K}_2)}{\lambda(1-\lambda)\ln 2} + \frac{6\alpha n\delta^2}{\mu\theta} + \frac{4d}{\alpha\mu \ln 2},$$

$$\mathcal{K}_1 = \mathcal{C}^2 + \frac{\mathcal{C}\delta H n \sqrt{m}\eta_0}{\theta(1-\lambda)}, \mathcal{K}_2 = \frac{m(n\delta H)^2}{4\theta^2(1-\lambda)},$$

$$\mathcal{C} = H\sqrt{m} \sum_{i=1}^n \|x_i(0)\|_1, \rho_1 = n(5L\mathcal{K}_1 + (\kappa\sigma + \delta)\alpha\mathcal{C}),$$

$$\rho_2 = \frac{n(5L\theta\mathcal{K}_2 + \delta H n \sqrt{m}(\kappa\sigma + \delta))}{\theta}, d = nL\kappa^2,$$

$$h = \sup_{x \in X} \|x\|, \delta = \sup_{t \in \{\rightarrow T\}, i \in \mathcal{V}, x \in X} \|\nabla f_i^t(x)\|,$$

$$\kappa = \sup_{x, y \in X} \|x - y\|, \sigma = \sup_{t \in \{\rightarrow T\}, i \in \mathcal{V}, x \in X} \|\nabla^2 f_i^t(x)\|,$$

$$L = \lambda_{\max}(P), \theta = \lambda_{\min}(P), H = H_2, \lambda = \lambda_2,$$

H_2 和 λ_2 的定义如式(7)所示, Θ_T 的定义如式(36)所示.

由式(38)可知, Θ_T 是影响动态regret界的重要因素.

如果 Θ_T 关于 $\frac{\sqrt{T+1}}{\ln(T+1)}$ 呈次线性增长,即

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\Theta_T \ln(T+1)}{\sqrt{T+1}} = 0,$$

则有 $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\Theta_T(T+1)^{\frac{3}{4}} \sqrt{\ln(T+1)}}}{T} = 0$.因此,在该情况下,动态regret具有次线性界,平均动态regret值 $\frac{\mathcal{R}_i^d(T)}{T}$ 渐近收敛到零,在线算法(37)有效.若最

优值序列 $\{x^*(t)\}$ 波动幅度较大, Θ_T 与 $\frac{\sqrt{T+1}}{\ln(T+1)}$ 呈线性关系,则无法保证式(38)的右端呈次线性增长,从而导致在线算法(37)失效.定理2的证明详见文献[89]中定理1的证明.

基于本节关于在线分布式优化的论述,给出各类在线算法下regret界,如表2所示.

表 2 在线分布式优化算法下的regret界

Table 2 Regret bounds for online distributed optimization algorithms

算法	regret界			文献
	凸目标函数	强凸目标函数	伪强凸目标函数	
在线分布式投影次梯度算法	$\mathcal{O}(\sqrt{T})$	$\mathcal{O}(\ln(T))$		[78]
在线分布式原始-对偶算法	$\mathcal{O}(\sqrt{T})$			[79]
在线分布式对偶平均算法	$\mathcal{O}(\sqrt{T})$			[80–82]
在线subgradient-push算法		$\mathcal{O}((\ln(T))^2)$		[83]
在线分布式镜像下降算法	$\mathcal{O}(\sqrt{TC_T})$			[84–85]
在线分布式辅助优化算法			$\mathcal{O}(T^{\frac{3}{4}} \ln(T) \sqrt{\Theta_T})$	[89]

5 一类混合均衡问题的分布式求解

本节介绍与分布式优化相关的研究内容: 混合均衡问题的分布式求解. 与分布式优化相比, 混合均衡问题更具一般性, 其定义如下:

定义 4^[106–107] 给定集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ 及二元函数 $g(\cdot, \cdot) : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, 均衡问题是指寻找一点 $x^* \in \Omega$ 使得 $g(x^*, y) \geq 0, \forall y \in \Omega$. 如果 $g(\cdot, \cdot)$ 由多个二元函数的和构成, 即 $g = \sum_{i=1}^n g_i$, 则对应的均衡问题通常被称为混合均衡问题.

均衡问题在电子网络、市场与经济领域被广泛地应用^[106–111]. 譬如, 在分析由电感器、电容器和二极管等电气元件形成的电子线路的伏安特性时, 基于Kirchhoff定律可知, 为计算回路中的电流, 须寻找一点 $x \in \Omega$ 使得对于任意的 $y \in \Omega$, 如下不等式均成立(详见文献[108–109]):

$$\langle Px + U, y - x \rangle + \Phi(y) - \Phi(x) \geq 0, \quad (39)$$

其中: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$, $\Phi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ 是由二极管两端的电势决定, Φ 通常为一非线性函数, $P \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 和 $U \in \mathbb{R}^m$ 分别是由回路中的阻抗和电压源决定的参数. 文献[108–109]将不等式(39)称为“第二类变分不等式”, 求解式(39)是一类典型的均衡问题. 与优化问题相比, 均衡问题更具一般性, 它还覆盖了变分不等式问题^[106]. 注意到不等式(39)是由优化和变分不等式组合而成. 更确切地说, 如果 $\Phi(x)$ 是关于 x 的线性函数, 式(39)则为变分不等式. 如果 $P = 0$, 式(39)则为优化问题. 若 $\Phi(x)$ 为关于 x 的非线性函数且 $P \neq 0$, 式(39)既不是变分不等式问题, 也不是优化问题. 在大规模电子网络中^[112], 电势、阻抗及电源电压等参数往往由众多电子元件共同决定. 在该场景中, 全局二元函数往往由多个二元函数的和构成. 相应地该类均衡问题就成了混合均衡问题^[107, 111].

文献[107, 111]利用集中式的方法研究了由两个二元函数的和构成的混合均衡问题. 然而, 在大型电子网络和传感器网络中^[112–113], 决策者往往不能获取到完全信息.

文献[114]考虑了一类由任意有限个二元函数的和构成的混合均衡问题:

$$\begin{cases} \text{Find } x^* \in \Omega, \\ \text{s.t. } g(x^*, y) \geq 0, \forall y \in \Omega, \end{cases} \quad (40)$$

其中: $g(x, y) = \sum_{i=1}^n g_i(x, y)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ 为一闭凸集, 二元函数 $g_i(\cdot, \cdot) : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ 是关于第2个变量的凸函数, 且 g_i 的信息只能被智能体 i 所感知. 由 g_i 的凸性质可知, 在任意点 $x, y \in \Omega$, $g_i(x, y)$ 关于第2变量的次梯度存在, 记为 $\nabla_2 g_i(x, y)$.

注 2 令 $g_i(x, y) = f_i(y) - f_i(x), \forall i \in \mathcal{V}$, 其中 $f_i : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$. 显然, 寻找一点 $x^* \in \Omega$ 满足 $\sum_{i=1}^n (f_i(y) - f_i(x^*)) \geq 0$,

$\forall y \in \Omega$ 等价于优化问题 $\min_{x \in \Omega} \sum_{i=1}^n f_i(x)$. 相应地, 混合均衡问题(40)就成了分布式优化问题^[56, 58]. 进一步, 考虑一类非合作博弈 $\Gamma(\mathcal{V}, \Omega, J)$, 这里 $\mathcal{V}, \Omega, J$ 分别代表博弈中的个体集、个体行为集、成本函数集. 在该博弈中, 每个个体旨在最小化其自身的成本函数: $\min_{x_i} J_i(x_i, x_{-i})$, s.t. $x_i \in \Omega_i$, 其中: $\Omega_i \subset \mathbb{R}^r$, $\Omega = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n$. 假设对于所有的 $i \in \mathcal{V}$, Ω_i 为闭凸集, $J_i(x_i, x_{-i})$ 是关于 x_i 连续可微的凸函数. 令 $x = (x_i, x_{-i})$, 定义 $F_i(x) = (0 \cdots 0 (\nabla_{x_i} J_i(x))^T 0 \cdots 0)^T$, 这里: $\nabla_{x_i} J_i(x)$ 表示 J_i 关于 x_i 的梯度. 利用博弈理论和变分不等式可知, 求解博弈 $\Gamma(\mathcal{V}, \chi, J)$ 的 Nash 均衡点等价于求解 $x^* = (x_i^*, x_{-i}^*) \in \Omega$ 使得如下变分不等式成立^[100, 102]:

$$\sum_{i=1}^n \langle F_i(x^*), y - x^* \rangle \geq 0, \forall y \in \Omega. \quad (41)$$

显然, 式(41)是式(40)的一种特殊形式. 综上所述, 与分布式优化、Nash 均衡点问题及变分不等式相比, 混合均衡问题更具一般性. 因此, 研究混合均衡问题的分布式求解有益于为该3类问题建立一个统一的分布式求解框架.

定义混合均衡问题(40)的解为 X^* , 并且作出如下假设:

假设 5^[114] X^* 非空.

假设 6^[114] 对于 $i \in \mathcal{V}$, g_i 满足以下条件:

- 1) 存在常数 $K_1, K_2 > 0$, 有 $\|\nabla_1 g_i(x, y)\| \leq K_1$, $\|\nabla_2 g_i(x, y)\| \leq K_2, \forall x, y \in \Omega$;
- 2) 存在 $c_1 > 0$ 和 $c_2 > 0$, 有 $g_i(x, y) + g_i(y, z) \geq g_i(x, z) - c_1\|x - y\|^2 - c_2\|y - z\|^2, \forall x, y, z \in \Omega$.

若 Ω 是紧集, 则假设6中的条件1一定成立. 令

$$g_i(x, y) = \langle \phi_i(x), y - x \rangle,$$

若 $\phi_i(\cdot)$ 在 Ω 上满足Lipschitz条件, 不难验证, 假设6中的条件2成立. 因此, 假设6中的条件2可以看作是Lipschitz条件的推广形式.

假设 7^[114] 全局二元函数 g 满足如下条件:

- 1) 对于任意的 $x, y \in \Omega$, $g(x, y) + g(y, x) \leq 0$;
- 2) 若 $x, y \in \Omega$ 满足 $g(x, y) = g(y, x) = 0$, 则对于任意的 $z \in \Omega$, 均有 $g(x, z) = g(y, z)$.

令 $g(x, y) = \langle \phi(x), y - x \rangle$, 若 $\phi(\cdot)$ 在 Ω 上是单调映射, 即 $\langle \phi_i(x) - \phi_i(y), y - x \rangle \leq 0, \forall x, y \in \Omega$, 不难验证, 假设7中的条件1成立. 因此, 假设7中的条件2可以看作是单调性条件的推广形式. 令 $x = y = z$, 根据假设6中的条件2和假设7中的条件1可知, $g(x, x) = 0, \forall x \in \Omega$. 对于二元函数而言, 假设7中的条件2往往容易验证. 例如, 考虑集合 $\Omega = \{x | -1 \leq x \leq 1\}$ 和二元函数 $g(x, y) = (2|x| + |y| - 1)(|y| - |x|)$, 经计算可得, 对应均衡问题的解集为 $X^* = \{-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\}$. 显然, 由 $g(x, y) = g(y, x) = 0$ 可得 $x = \pm y, \forall y \in \Omega$. 因而, $g(x, z) = g(y, z), \forall -1 \leq z \leq 1$.

针对混合均衡问题(40), 文献[114]提出了一类分布式外梯度算法(distributed extragradient algorithm):

$$x_i(t+1) = \arg \min_{u \in \Omega} \{ \eta(t) g_i(y_i(t), u) + D_R(u, z_i(t)) \}, \quad (42a)$$

$$y_i(t) = \arg \min_{y \in \Omega} \{ \eta(t) g_i(z_i(t), y) + D_R(y, z_i(t)) \}, \quad (42b)$$

$$z_i(t) = \sum_{j \in N_i(t)} a_{ij}(t) x_j(t), \quad (42c)$$

其中: $\eta(t) \geq 0$ 为非增且满足式(9)中条件的衰减步长, $D_R(\cdot, \cdot)$ 为Bregman函数, $\sum_{j=1}^n a_{ij} = 1, i \in \mathcal{V}$.

定理 3^[114] 给定常数 $\alpha > 0$, 如果假设5-7得以满足, $\mathcal{G}(t)$ 满足了平衡和B-强连通条件, 则在算法

(42)下, 所有智能体的状态渐近地收敛到式(40)的一个可行解, 即存在 $x^* \in X^*$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - x^*\| = 0, i \in \mathcal{V}$.

定理3的证明详见文献[114]中定理1的证明, 这里不再赘述.

6 总结与展望

近年来, 随着通信、计算机、微电子技术的不断发展, 分布式优化作为多智能体系统协调控制领域中一个崭新的研究课题得到国内外诸多专家学者的广泛关注. 经过近几年的发展, 分布式优化的研究已经取得了丰硕的成果. 本文对近期分布式优化研究的相关工作进行了介绍、梳理. 目前分布式优化的研究仍处于发展阶段, 尚有许多问题有待深入研究.

1) 目前关于分布式优化的研究成果绝大多数是假设目标函数和约束集均是凸的. 然而在实际应用中, 许多问题建模后的目标函数或约束集是非凸的. 比如, 在人脸识别、图像分类和生物信息学中的基因检测等领域中, 当处理高维度的数据和模型时, 往往需要施加一些非凸的结构化约束以防止优化问题变得病态. 非凸优化问题往往存在局部最优解, 这个特性使非凸优化问题比凸优化问题更难解决. 针对凸优化的算法和结论不能直接用于非凸优化问题. 因此, 亟待发展新的理论和工具来研究分布式非凸优化问题.

2) 与分布式优化相比, 混合均衡问题更具一般性. 研究混合均衡问题的分布式求解有益于为最优化问题、Nash均衡点问题及变分不等式问题建立统一的分布式求解框架. 关于混合均衡问题的研究才刚刚起步, 现有关于混合均衡问题的分布式算法仅仅在通信图满足平衡条件的情形下实现了渐近收敛. 然而, 在全局信息未知的情况下, 通常难以保证有向图的加权矩阵是列随机矩阵, 这极大地限制了算法的应用范围. 此外, 为了增强算法的鲁棒性和抗干扰能力, 往往需要算法具有较快的收敛速度. 因此, 如何提高算法的收敛速度, 特别是如何获得指数收敛性或实现有限时间内收敛, 以及如何避免使用平衡图条件是值得继续深入探讨的方向.

3) 目前基于多智能体系统的分布式优化的研究结果主要侧重于理论分析. 分布式优化在诸如微电网中的经济调度、无线传感器的定位、物理-信息系统的优化控制以及分布式机器学习等领域中还有广阔的应用前景. 如何将分布式优化的理论研究与工程应用紧密结合是一个值得继续深入研究和探索的方向.

参考文献:

- [1] OLFATI-SABER R, MURRAY R. Consensus problems in the networks of agents with switching topology and time delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(9): 1520 – 1533.
- [2] REN W, BEARD R. Consensus seeking in multi-agent systems under dynamically changing interaction topologies. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, 50(3): 655 – 661.
- [3] WANG L, SHI H, CHU T, et al. Aggregation of foraging swarms. *Australasian Joint Conference on Artificial Intelligence*. Heidelberg: Springer, 2004: 766 – 777.
- [4] DOMINGUEZ G A D, HADJICOSTIS C N. Distributed matrix scaling and application to average consensus in directed graphs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, 58(3): 667 – 681.
- [5] WANG L, XIAO F. Finite-time consensus problems for networks of dynamic agents. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, 55(4): 950 – 955.
- [6] XIAO F, WANG L. Asynchronous consensus in continuous-time multi-agent systems with switching topology and time-varying delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2008, 53(8): 1804 – 1816.
- [7] WANG Long, TIAN Ye, DU Jinming. Opinion dynamics in social network. *Science China Information Sciences*, 2018, 50(1): 3209 – 3215. (王龙, 田野, 杜金铭. 社会网络上的观念动力学. *中国科学: 信息科学*, 2018, 50(1): 3209 – 3215.)
- [8] JING G, ZHANG G, LEE J, et al. Weak rigidity theory and its application to formation stabilizations. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2018, 56(3): 2248 – 2273.
- [9] JING G, ZHANG G, LEE J, et al. Angle-based shape determination theory of planar graphs with application to formation stabilization. *Automatica*, 2019, 105: 117 – 129.
- [10] WANG Long, CONG Rui, LI Kun. Feedback mechanism in cooperation evolving. *Science China Information Sciences*, 2014, 44(12): 1495 – 1514. (王龙, 丛睿, 李昆. 合作演化中的反馈机制. *中国科学: 信息科学*, 2014, 44(12): 1495 – 1514.)
- [11] WANG Long, WU Te, ZHANG Yanling. Feedback mechanism in co-evolutionary games. *Control Theory & Applications*, 2014, 31(7): 823 – 836. (王龙, 吴特, 张艳玲. 共演化博弈中的反馈机制. *控制理论与应用*, 2014, 31(7): 823 – 836.)
- [12] XIAO F, CHEN T. Adaptive consensus in leader-following networks of heterogeneous linear systems. *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, 2018, 5(3): 1169 – 1176.
- [13] ZHENG Y, ZHAO Q, MA J, et al. Second-order consensus of hybrid multi-agent systems. *Systems & Control Letters*, 2019, 125: 51 – 58.
- [14] YANG J, XIAO F, MA J. Model-based edge-event-triggered containment control under directed topologies. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2018, DOI: 10.1109/TCYB.2018.2828645.
- [15] GUAN Y, JI Z, ZHANG L, et al. Decentralized stabilizability of multi-agent systems under fixed and switching topologies. *Systems & Control Letters*, 2013, 62(5): 438 – 446.
- [16] MA J, ZHENG Y, WU B, et al. Equilibrium topology of multi-agent systems with two leaders: A zero-sum game perspective. *Automatica*, 2016, 73: 200 – 206.
- [17] XIAO F, SHI Y, REN W. Robustness analysis of asynchronous sampled-data multi-agent networks with time-varying delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2018, 63(7): 2145 – 2152.
- [18] WANG Long, FU Feng, CHEN Xiaojie, et al. Evolutionary games on complex networks. *CAAI Transactions on Intelligence Systems*, 2007, 2(2): 1 – 10. (王龙, 伏锋, 陈小杰, 等. 复杂网络上的演化博弈. *智能系统学报*, 2007, 2(2): 1 – 10.)
- [19] WANG Long, DU Jinming. Evolutionary game theoretic coordinated control of multi-agent systems. *Journal of Systems Science and Mathematical Sciences*, 2016, 36(3): 302 – 318. (王龙, 杜金铭. 多智能体协调控制的演化博弈方法. *系统科学与数学*, 2016, 36(3): 302 – 318.)
- [20] GUAN Y, WANG L. Controllability of multi-agent systems with directed and weighted signed networks. *Systems & Control Letters*, 2018, 116(6): 47 – 55.
- [21] GUAN Y, WANG L. Target controllability of multiagent systems under fixed and switching topologies. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2019, 29(9): 2725 – 2741.
- [22] WANG Long, WANG Jing, WU Bin. Quantum games: New methodologies and strategies. *CAAI Transactions on Intelligent Systems*, 2008, 3(4): 294 – 304. (王龙, 王靖, 武斌. 量子博弈: 新方法与新策略. *智能系统学报*, 2008, 3(4): 294 – 304.)
- [23] TOMLIN C, PAPPAS G J, SASTRY S. Conflict resolution for air traffic management: A study in multiagent hybrid systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1998, 43(4): 509 – 521.
- [24] GUAN Yonqiang, JI Zhijian, ZHANG Lin, et al. Recent developments on controllability of multi-agent systems. *Control Theory & Applications*, 2015, 32(4): 421 – 431. (关永强, 纪志坚, 张霖, 等. 多智能体系统能控性研究进展. *控制理论与应用*, 2015, 32(4): 421 – 431.)
- [25] YI Peng, HONG Yiguang. Distributed cooperative optimization and its applications. *Science China Mathematica*, 2016, 46(10): 1547 – 1564. (衣鹏, 洪奕光. 分布式合作优化及其应用. *中国科学: 数学*, 2016, 46(10): 1547 – 1564.)
- [26] TAO Y, YI X, WU J, et al. A survey of distributed optimization. *Annual Reviews in Control*, 2019, DOI: 10.1016/j.arcontrol.2019.05.006.
- [27] HONG Yiguang, ZHANG Yanqiong. Distributed optimization: Algorithm design and convergence analysis. *Control Theory & Applications*, 2014, 31(7): 850 – 857. (洪奕光, 张艳琼. 分布式优化: 算法设计和收敛性分析. *控制理论与应用*, 2014, 31(7): 850 – 857.)
- [28] ZHANG Y, LOU Y, HONG Y, et al. Distributed projection-based algorithms for source localization in wireless sensor networks. *IEEE Transactions on Wireless Communication*, 2015, 14(6): 3131 – 3142.
- [29] DURHAM J W, FRANCHI A, BULLO F. Distributed pursuit-evasion without global localization via local frontiers. *Autonomous Robots*, 2012, 32(1): 81 – 95.
- [30] GUO F, WEN C, MAO J, et al. Distributed economic dispatch for smart grids with random wind power. *IEEE Transactions on Smart Grid*, 2016, 7(3): 1572 – 1583.
- [31] CAI D, MALLADA E, WIERMAN A. Distributed optimization decomposition for joint economic dispatch and frequency regulation. *IEEE Transactions on Power Systems*, 2017, 32(6): 4370 – 4385.
- [32] YI P, HONG Y, LIU F. Initialization-free distributed algorithms for optimal resource allocation with feasibility constraints and application to economic dispatch of power systems. *Automatica*, 2016, 74: 259 – 269.
- [33] LEE S, KIM J K, ZHENG X, et al. On model parallelization and scheduling strategies for distributed machine learning. *Advances in Neural Information Processing Systems*. Montreal: Massachusetts Institute of Technology Press, 2014: 2834 – 2842.
- [34] NEDIĆ A, OZDAGLAR A. Distributed subgradient methods for multi-agent optimization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, 54(1): 48 – 61.
- [35] LOBEL I, OZDAGLAR A. Distributed subgradient methods for convex optimization over random networks. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2011, 56(6): 1291 – 1306.

- [36] WAN P, LEMMON M. Event-triggered distributed optimization in sensor networks. *Proceedings of the 2009 International Conference on Information Processing in Sensor Networks*. San Francisco: IEEE, 2009: 49 – 60.
- [37] JOHANSSON B, RABI M, JOHANSSON M. A randomized incremental subgradient method for distributed optimization in networked systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2009, 20(3): 1157 – 1170.
- [38] NEDIĆ A, OLSHEVSKY A. Distributed optimization over time-varying directed graphs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2015, 60(3): 601 – 615.
- [39] NEDIĆ A, OLSHEVSKY A. Stochastic gradient-push for strongly convex functions on time-varying directed graphs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2016, 61(12): 3936 – 3947.
- [40] ASSRAN M, RABBAT M. Asynchronous subgradient-push. arXiv preprint arXiv: 1803.08950, 2018.
- [41] QU G, LI N. Accelerated distributed Nesterov gradient descent for smooth and strongly convex functions. *The 54th Annual Allerton Conference on Communication, Control, and Computing*. Monticello: IEEE, 2016: 209 – 216.
- [42] JAKOVETIĆ D, XAVIER F, MOURA F. Fast distributed gradient methods. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2014, 59(5): 1131 – 1146.
- [43] JAKOVETIĆ D, XAVIER F, MOURA F. Convergence rates of distributed Nesterov-like gradient methods on random networks. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2013, 62(4): 868 – 882.
- [44] QU G, LI N. Harnessing smoothness to accelerate distributed optimization. *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, 2017, 5(3): 1245 – 1260.
- [45] NEDIĆ A, OLSHEVSKY A, SHI W. Achieving geometric convergence for distributed optimization over time-varying graphs. *SIAM Journal on Optimization*, 2017, 27(4): 2597 – 2633.
- [46] NEDIĆ A, OLSHEVSKY A, SHI W. A geometrically convergent method for distributed optimization over time-varying graphs. *The 55th Conference on Decision and Control (CDC)*. Las Vegas: IEEE, 2016: 1023 – 1029.
- [47] XI C, XIN R, KHAN U A. ADD-OPT: Accelerated distributed directed optimization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, 63(5): 1329 – 1339.
- [48] MOKHTARI A, RIBEIRO A. DSA: Decentralized double stochastic averaging gradient algorithm. *Journal of Machine Learning Research*, 2016, 17(1): 1 – 35.
- [49] MOKHTARI A, SHI W, LING Q, et al. DQM: Decentralized quadratically approximated alternating direction method of multipliers. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2016, 64(19): 5158 – 5173.
- [50] SHI W, LING Q, WU G, et al. EXTRA: An exact first-order algorithm for decentralized consensus optimization. *SIAM Journal on Optimization*, 2015, 25(2): 944 – 966.
- [51] SHI W, LING Q, WU G, et al. A proximal gradient algorithm for decentralized composite optimization. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2015, 63(22): 6013 – 6023.
- [52] WANG J, ELIA N. Control approach to distributed optimization. *The 48th Annual Allerton Conference on Communication*. Allerton: IEEE, 2010: 557 – 561.
- [53] KIA S, CORTÉS J, MARTÍNEZ S. Distributed convex optimization via continuous-time coordination algorithms with discrete-time communication. *Automatica*, 2015, 55: 254 – 264.
- [54] LU J, TANG C Y. Zero-gradient-sum algorithms for distributed convex optimization: The continuous-time case. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, 57(9): 2348 – 2354.
- [55] CHEN W, REN W. Event-triggered zero-gradient-sum distributed consensus optimization over directed networks. *Automatica*, 2016, 65: 90 – 97.
- [56] NEDIĆ A, OZDAGLAR A, PARRILO P. Constrained consensus and optimization in multi-agent networks. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, 55(4): 922 – 938.
- [57] LIN P, REN W, SONG Y. Distributed multi-agent optimization subject to nonidentical constraints and communication delays. *Automatica*, 2016, 65: 120 – 131.
- [58] LI H, LÜ Q, HUANG T. Distributed projection subgradient algorithm over time-varying general unbalanced directed graphs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2019, 64(3): 1309 – 1316.
- [59] LIU S, QIU Z, XIE L. Continuous-time distributed convex optimization with set constraints. *IFAC Proceedings Volumes*, 2014, 47(3): 9762 – 9767.
- [60] QIU Z, LIU S, XIE L. Distributed constrained optimal consensus of multi-agent systems. *Automatica*, 2016, 68: 209 – 215.
- [61] LIU Q, YANG S, HONG Y. Constrained consensus algorithms with fixed step size for distributed convex optimization over multiagent networks. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, 62(8): 4259 – 4265.
- [62] NEOCARA I, NEDELCO V. On linear convergence of a distributed dual gradient algorithm for linearly constrained separable convex problems. *Automatica*, 2015, 55: 209 – 216.
- [63] YI P, HONG Y, LIU F. Distributed gradient algorithm for constrained optimization with application to load sharing in power systems. *Systems & Control Letters*, 2015, 83: 45 – 52.
- [64] YANG S, LIU Q, WANG J. A multi-agent system with a proportional-integral protocol for distributed constrained optimization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2016, 62(7): 3461 – 3467.
- [65] COVER T. Geometrical and statistical properties of systems of linear inequalities with applications in pattern recognition. *IEEE Transactions on Electronic Computers*, 1965, 14(3): 326 – 334.
- [66] YAMADA I, SLAVAKIS K, YAMADA K. An efficient robust adaptive filtering algorithm based on parallel subgradient projection techniques. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2002, 50(5): 1091 – 1101.
- [67] SENSOR Y, ALTSCHULER D, POWLIS D. On the use of Cimmino's simultaneous projections method for computing a solution of the inverse problem in radiation therapy treatment planning. *Inverse Problems*, 1998, 4(3): 607 – 623.
- [68] HERMAN G. *Image Reconstruction from Projections*. New York: Academic Press, 1980.
- [69] LU K, JING G, WANG L. Distributed algorithm for solving convex inequalities. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, 63(8): 2670 – 2677.
- [70] BAZARAA M S, SHERALI H D, SHETTY C M. *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms*. New York: Wiley-Interscience, 1993.
- [71] ZINKEVICH M. Online convex programming and generalized infinitesimal gradient ascent. *Proceedings of the 20th International Conference on Machine Learning (ICML-03)*. Washington DC, USA: AAAI Press, 2003: 928 – 936.
- [72] CESA-BIANCHI N, LUGOSI G. *Prediction, Learning, and Games*. Cambridge, England: Cambridge University Press, 2006.
- [73] BOSMAN P A N. Learning, anticipation and time-deception in evolutionary online dynamic optimization. *Proceedings of the 7th Annual Workshop on Genetic and Evolutionary Computation*. New York: ACM, 2005: 39 – 47.
- [74] XIAO L. Dual averaging methods for regularized stochastic learning and online optimization. *Journal of Machine Learning Research*, 2010, 11: 2543 – 2596.
- [75] SHALEV-SHWARTZ S. Online learning and online convex optimization. *Foundations and Trends in Machine Learning*, 2011, 4(2): 107 – 194.
- [76] WIGLEY P B, EVERITT P J, HENGEL A, et al. Fast machine-learning online optimization of ultra-cold-atom experiments. *Scientific Reports*, 2016, 6: 25890.

- [77] SU W. *Traffic Engineering and Time-Varying Convex Optimization*. Pennsylvania: The Pennsylvania State University, 2009.
- [78] YAN F, SUNDARAM S, VISHWANATHAN S, et al. Distributed autonomous online learning: Regrets and intrinsic privacy-preserving properties. *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*, 2013, 25(11): 2483 – 2493.
- [79] MATEOS-NÚÑEZ D, CORTÉS J. Distributed online convex optimization over jointly connected digraphs. *IEEE Transactions on Network Science and Engineering*, 2014, 1: 23 – 37.
- [80] HOSSEINI S, CHAPMAN A, MESBAHI M. Online distributed optimization via dual averaging. *The 52nd IEEE Conference on Decision and Control*. Florence: IEEE, 2013: 1484 – 1489.
- [81] HOSSEINI S, CHAPMAN A, MESBAHI M. Online distributed convex optimization on dynamic networks. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2016, 61(11): 3545 – 3550.
- [82] SOOMIN L, NEDIĆ, RAGINSKY M. Stochastic dual averaging for decentralized online optimization on time-varying communication graphs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, 62(12): 6407 – 6414.
- [83] AKBARI M, GHARESIFARD B, LINDER P. Distributed online convex optimization on time-varying directed graphs. *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, 2017, 4(3): 417 – 428.
- [84] SHAHARAMPOUR S, JADBABAIE A. Distributed online optimization in dynamic environments using mirror descent. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2018, 63(3): 714 – 725.
- [85] SHAHARAMPOUR S, JADBABAIE A. An online optimization approach for multi-agent tracking of dynamic parameters in the presence of adversarial noise. *American Control Conference (ACC)*. Seattle: IEEE, 2017: 3306 – 3311.
- [86] CAROSI L, MARTEIN L. Some classes of pseudoconvex fractional functions via the Charnes-Cooper transformation. *Generalized Convexity and Related Topics*. Heidelberg: Springer, 2006: 177 – 188.
- [87] FORGO F, JOÓ I. Fixed point and equilibrium theorems in pseudoconvex and related spaces. *Journal of Global Optimization*, 1999, 14(1): 27 – 54.
- [88] BARBER J. *Solid Mechanics and Its Applications*. New York: Springer, 2004.
- [89] LU K, JING G, WANG L. Online distributed optimization with strongly pseudoconvex-sum cost functions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2019, DOI: 10.1109/TAC.2019.2915745.
- [90] GODSIL C, ROYLE G. *Algebraic Graph Theory*. New York: Springer, 2001.
- [91] JING G, ZHENG Y, WANG L. Consensus of multiagent systems with distance-dependent communication networks. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2017, 28(11): 2712 – 2726.
- [92] LIN X, ZHENG Y, WANG L. Consensus of switched multi-agent systems with random networks. *International Journal of Control*, 2017, 90(5): 1113 – 1122.
- [93] ZHENG Y, MA J, WANG L. Consensus of hybrid multi-agent systems. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2018, 29(4): 1359 – 1365.
- [94] LU K, JING G, WANG L. Distributed algorithms for solving the convex feasibility problems. *Science China Information Sciences*, 2018, DOI: 10.1007/s11432-018-9682-4.
- [95] GUAN Y, JI Z, ZHANG L, et al. Controllability of multi-agent systems under directed topology. *International Journal of Robust nonlinear Control*, 2017, 27(18): 4333 – 4347.
- [96] ZHENG Dazhong. *Linear System Theory*. Beijing: Tsinghua University Press, 2002.
(郑大钟. 线性系统理论. 北京: 清华大学出版社, 2002.)
- [97] BORWEIN J, LEWIS S. *Convex Analysis and Nonlinear Optimization: Theory and Examples*. New York: Springer, 2010.
- [98] AUBIN J, CELLINA A. *Differential Inclusions*. Berlin, Germany: Springer-Verlag, 1984.
- [99] BROGLIATO B, DANILIDIS A, LEMARCHAL C. On the equivalence between complementarity systems, projected systems and differential inclusions. *Systems & Control Letters*, 2012, 55(1): 45 – 51.
- [100] SALEHISADAGHIANI F, PAVE L. Distributed Nash equilibrium seeking: A gossip-based algorithm. *Automatica*, 2016, 72: 209 – 216.
- [101] LU K, JING G, WANG L. Distributed algorithms for searching generalized Nash equilibrium of non-cooperative games. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2019, 49(6): 2362 – 2371.
- [102] FACCHINEI F, KANZOW C. Generalized Nash equilibrium problems. *Annals of Operations Research*, 2010, 175(1): 177 – 211.
- [103] HALL E, WILLETT R. Online convex optimization in dynamic environments. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 2015, 9(4): 647 – 662.
- [104] BESBES O, GUR Y, ZEEVI A. Non-stationary stochastic optimization. *Operations Research*, 2015, 63(5): 1227 – 1244.
- [105] JADBABAIE A, RAKHLIN A, SHAHRAMPOUR S, et al. Online optimization: Competing with dynamic comparators. *Proceedings of the Eighteenth International Conference on Artificial Intelligence and Statistics*. San Diego, CA, 2015: 398 – 406.
- [106] SU C L. *Equilibrium problems with equilibrium constraints: Stationarities, algorithms, and applications*. Stanford: Stanford University, 2005.
- [107] KUMAM W, JAIBOON C, KUMAM P, et al. A shrinking projection method for generalized mixed equilibrium problems, variational inclusion problems and a finite family of quasicontractive mappings. *Journal of Inequalities and Applications*, 2010, 1: 1 – 25.
- [108] ADDI K, BROGLIATO B, GOELEN D. A qualitative mathematical analysis of a class of linear variational inequalities via semi-complementarity problems: applications in electronics. *Mathematical Programming*, 2011, 126(1): 31 – 67.
- [109] GOELEN D. Existence and uniqueness for a linear mixed variational inequality arising in electrical circuits with transistors. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2008, 138(3): 397 – 406.
- [110] SANTOS P, SCHEIMBERG S. An inexact subgradient algorithm for equilibrium problems. *Computational and Applied Mathematics*, 2011, 30(1): 91 – 107.
- [111] KUMAM P, JAIBOON C. A new hybrid iterative method for mixed equilibrium problems and variational inequality problem for relaxed cocoercive mappings with application to optimization problems. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 2009, 3(4): 510 – 530.
- [112] PAATERO J V, LUND P D. Effects of large-scale photovoltaic power integration on electricity distribution networks. *Renewable Energy*, 2007, 32(2): 216 – 234.
- [113] OLFATI-SABER R, SHAMMA J. Consensus filters for sensor networks and distributed sensor fusion. *The 44th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*. Seville: IEEE, 2015: 6698 – 6703.
- [114] LU K, JING G, WANG L. A distributed algorithm for solving mixed equilibrium problems. *Automatica*, 2019, 105: 246 – 253.

作者简介:

王 龙 博士, 教授, 第1届“关肇直奖”(1994年)获奖论文作者, 研究方向为复杂系统智能控制、多机器人系统的协调与控制、演化博弈与群体决策、分布式优化等, E-mail: longwang@pku.edu.cn;

卢开红 博士, 研究方向为分布式优化、多智能体系统的协调与控制, E-mail: khong_lu@163.com;

关永强 博士, 研究方向为多智能体系统协调控制, E-mail: guanjq@163.com.