

一类受扰旋转单摆系统的建模与跟踪控制设计

李 健[†], 李俊艳, 吴昭景

(烟台大学 数学与信息科学学院, 山东 烟台 264005)

摘要: 本文考虑一类受扰旋转单摆系统的建模与跟踪控制问题. 首先, 利用动静法和相对运动原理建立受扰情形下空间旋转摆系统的动力学模型. 然后, 分别以实际跟踪和渐近跟踪为控制目标, 给出相应的控制设计方法. 具体地, 利用向量式的反推控制设计方法与不确定性动态补偿机制, 给出自适应实际跟踪控制器, 保证闭环系统所有状态都有界且在有限时间内系统输出到达并保持参考信号给定的邻域内. 利用反推设计方法, 并结合扰动的学习、切换补偿机制设计自适应切换渐近跟踪控制器, 通过在线调节控制器参数, 保证闭环系统所有状态都有界且系统输出渐近跟踪到给定的参考信号. 最后, 仿真实验验证所提理论结果的有效性. 值得指出的是, 与相关文献相比, 本文所给出的控制设计方法允许系统同时含有未知参数和扰动, 并且扰动不必有已知上界, 因而具有更强的抑制不确定性的能力.

关键词: 旋转单摆; 跟踪控制; 自适应控制; 切换控制

引用格式: 李健, 李俊艳, 吴昭景. 一类受扰旋转单摆系统的建模与跟踪控制设计. 控制理论与应用, 2020, 37(10): 2209 – 2217

DOI: 10.7641/CTA.2020.90621

Modeling and tracking control design for a class of rotary pendulum systems with disturbance

LI Jian[†], LI Jun-yan, WU Zhao-jing

(School of Mathematics and Information Sciences, Yantai University, Yantai Shandong 264005, China)

Abstract: In this paper, the problem of modeling and tracking control is investigated for a class of disturbed rotary pendulum systems. Firstly, the dynamic model of rotary pendulum system under perturbation is obtained by using dynamic-static method and relative motion principle. Then, procedures of control designing are given for practical tracking and asymptotic tracking, respectively. Specifically, a practical tracking controller is designed by using the backstepping method in the form of vector combining with adaptive dynamic technique, which guarantees that the system output goes and stay at a prior neighborhood of reference signal after some time instant while all the closed-loop system signals are bounded. Moreover, an asymptotic tracking controller is designed by using backstepping method combining with the learning and switching mechanisms, which ensures that the system output asymptotically tracks the given reference signal while all the states of the closed-loop system are bounded. Finally, a simulation example is provided to verify the effectiveness of the proposed theoretical results. It is worthwhile pointing out that, the proposed control scheme allows the presence of both unknown parameters and disturbance, and moreover the disturbance does not necessarily have known bound, and hence possesses stronger ability in overcoming the uncertainties when comparing with those of the related literature.

Key words: rotary pendulum; tracking control; adaptive control; switch control

Citation: LI Jian, LI Junyan, WU Zhaojing. Modeling and tracking control design for a class of rotary pendulum systems with disturbance. *Control Theory & Applications*, 2020, 37(10): 2209 – 2217

1 引言

在实际工程中, 多数机械系统可用欧拉–拉格朗日方程刻画, 例如基准系统^[1]、机械臂^[2]、球梁系统^[3]、独轮车机器人^[4]等. 为了实现不同的生产目标, 改善

系统运行性能, 提高系统的稳定性, 客观上需要对欧拉–拉格朗日方程刻画的受控系统施加控制. 因而, 对于欧拉–拉格朗日系统控制问题的研究具有重要的实际意义. 另一方面, 随着生产过程复杂化, 许多机械系

收稿日期: 2019–07–26; 录用日期: 2020–05–29.

[†]通信作者. E-mail: ytulijian@ytu.edu.cn; Tel.: +86 18853510704.

本文责任编辑: 吴立刚.

国家自然科学基金项目(61773332, 61673332)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (61773332, 61673332).

统呈现出一些复杂的特性,例如存在时滞、状态耦合、参数不确定性、状态不可测和系统受外部扰动影响等.这些特性的存在导致传统的控制设计方法无效,使得许多具有重要科学意义的控制问题尚未得到解决.因此,对欧拉-拉格朗日系统的控制研究具有重要理论意义.

过去30多年间,以机械臂摆动为背景的欧拉-拉格朗日系统控制受到了广泛的关注^[2,5-24].早期的成果主要研究(旋转)倒立摆系统的控制问题.例如,文献[6-8]分别研究了旋转倒立摆和平面倒立摆的镇定控制问题,文献[9]和文献[10-13]分别研究了球面倒立摆和车载倒立摆系统的输出跟踪控制问题,文献[14-15]则分别研究了一类倒立摆系统和钟摆系统的最优控制问题.在此基础上,以机器人为背景的 n 级连杆控制问题得到了研究.文献[16]和文献[17-18]分别研究了确定型(不含有未知参数与扰动)机械臂的镇定和跟踪控制问题;文献[19-20]研究了含有未知参数的 n 级连杆的机器臂自适应跟踪控制问题;文献[2,5]和文献[21-24]分别研究了含有随机扰动与确定型扰动机械臂的跟踪控制问题.注意到已有结果对系统不确定性都有较强的限制,例如系统模型精确已知(既不含有未知参数,也不含有未知扰动)^[16-18],或系统模型仅含有未知参数而不含有未知扰动^[19-20],或虽然考虑了扰动,但是扰动需有已知的上界^[2,5,21-24].当系统不确定性较为严重时,例如同时含有未知参数和扰动,并且扰动没有已知的上界,现有文献中的控制方法无效.为此,需要发展强不确定性的新的补偿方法,并在此基础上形成具有更强不确定性机械臂系统跟踪控制设计与性能分析的新框架.

本文考虑了一类受扰旋转单摆系统的建模与跟踪控制问题.系统由摆杆与摆锤组成,摆杆在两个力矩的驱动下分别绕铅垂轴旋转和摆动.系统在悬挂点处受扰动影响.控制目标是设计反馈控制(力矩)使旋转单摆按照指定规律旋转及摆动.为此,首先利用动静法和相对运动原理给出在扰动影响下旋转单摆系统的动力学模型.然后,根据实际工程需要,分别研究实际跟踪和渐近跟踪两类跟踪控制问题,给出跟踪控制器的设计方案.在实际跟踪控制设计中,通过选择适当的自适应律来克服系统不确定性,利用反推设计方法显式设计自适应实际跟踪控制器,保证闭环系统所有状态都有界且在某个时刻之后系统输出到达并保持在给定的邻域内.在渐近跟踪控制设计中,通过扰动学习机制和切换补偿机制来克服系统不确定性,并利用反推设计方法设计切换控制器,保证闭环系统所有状态都有界且系统输出渐近跟踪到给定的参考信号.值得指出的是,本文所提方法允许系统同时含有未知参数和扰动,并且扰动不必有已知上界,因此极大地放宽了相关文献对系统不确定性的限制.最后仿

真实验验证所设计控制方案的有效性.

2 问题描述

2.1 系统动态模型建立

研究图1所示一类旋转单摆系统(摆杆的长度为 ℓ ,摆锤的质量为 m (未知)).摆杆用光滑铰链连结在铅垂轴上,当无外力施加时,摆杆与铅垂轴方向重合,此时系统处于平衡状态.当摆杆在 O 点受力矩 u_1 的作用摆动时,摆角为 φ ,在力矩 u_2 的作用下绕铅垂轴转动时,转角为 ϑ .悬挂点 O 处于震动环境中时,在图1所示3个坐标轴方向上的扰动加速度分别为 ξ_x , ξ_y 和 ξ_z .对上述系统,考虑在受扰环境下,设计反馈控制(即力矩 u_1 , u_2)使系统按照指定的参考轨迹运动.

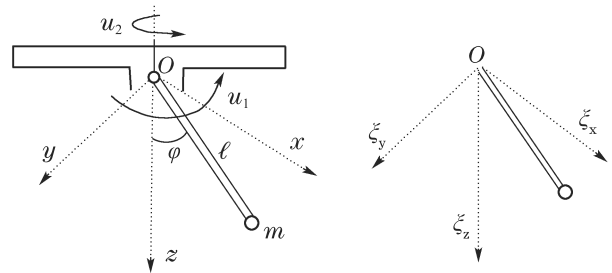


图1 旋转单摆

Fig. 1 Rotary pendulum

如下分两步给出系统动态模型的推导过程.

2.1.1 确定情形下系统建模

确定情形下系统建模(即 $\xi_x \equiv 0$, $\xi_y \equiv 0$ 和 $\xi_z \equiv 0$),选择广义坐标为 $q_1 = \varphi$, $q_2 = \vartheta$,则系统的总动能和总势能为(取 xoy 面为重力势能的零势能面)

$$\begin{cases} E = \frac{1}{2}m(\ell^2\dot{q}_1^2 + \ell^2\dot{q}_2^2 \sin^2 q_1), \\ V = -mgl \cos q_1. \end{cases}$$

由此,可构造拉格朗日函数为

$$L = E - V = \frac{1}{2}m(\ell^2\dot{q}_1^2 + \ell^2\dot{q}_2^2 \sin^2 q_1) + mgl \cos q_1. \quad (1)$$

利用文献[25]的定理3.5.1,上述旋转单摆系统可用如下拉格朗日方程来描述:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_1}\right) = \tau_1, \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_2}\right) = \tau_2. \end{cases} \quad (2)$$

注意到当质点转动时,系统的虚功为 $\delta W = u_1 \delta q_1 + u_2 \delta q_2$ (这意味着 $\tau_1 = u_1$, $\tau_2 = u_2$),将式(1)代入上述方程可得图1所示的旋转单摆系统的动力学方程,即

$$\begin{cases} m\ell^2\ddot{q}_1 - m\ell^2\dot{q}_2^2 \sin q_1 \cos q_1 + mgl \sin q_1 = u_1, \\ m\ell^2\ddot{q}_2 \sin^2 q_1 + 2m\ell^2\dot{q}_1\dot{q}_2 \sin q_1 \cos q_1 = u_2. \end{cases} \quad (3)$$

2.1.2 受扰情形下系统建模

受扰情形下系统建模(即 $\xi_x \neq 0, \xi_y \neq 0$ 和 $\xi_z \neq 0$), 根据动静法和相对运动原理^[1], 环境中的震动对系统的影响可看作是对控制力(力矩)的干扰. 如下给出具体的扰动分解过程, 当把悬挂点 O 视为静止时, 将在平行于摆杆方向传递加速度, 在垂直于摆杆方向产生相对加速度, 相当于摆锤受到一定的惯性力(即对控制力或力矩的干扰). 当摆杆摆动和转动时, 在垂直于摆杆的方向上, 相对加速度分别为

$$\begin{cases} a_{o_1} = \xi_x \cos q_2 \cos q_1 + \xi_y \sin q_2 \cos q_1 + \xi_z \sin q_1, \\ a_{o_2} = \xi_x \sin q_2 + \xi_y \cos q_2, \end{cases}$$

进而得到惯性力分别为

$$\begin{cases} F_1 = -ma_{o_1} = \\ \quad -m\xi_x \cos q_2 \cos q_1 - \\ \quad m\xi_y \sin q_2 \cos q_1 - m\xi_z \sin q_1, \\ F_2 = -ma_{o_2} = -m\xi_x \sin q_2 - m\xi_y \cos q_2. \end{cases}$$

因此, 可得受扰情形下旋转单摆系统的动力学方程

$$\begin{cases} m\ell^2 \ddot{q}_1 - m\ell^2 \dot{q}_2^2 \sin q_1 \cos q_1 + mg\ell \sin q_1 = \\ u_1 - m\xi_x \cos q_1 \cos q_2 - m\xi_y \cos q_1 \sin q_2 - \\ m\xi_z \sin q_1, \\ m\ell^2 \ddot{q}_2 \sin^2 q_1 + 2m\ell^2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \sin q_1 \cos q_1 = \\ u_2 - m\xi_x \sin q_2 - m\xi_y \cos q_2. \end{cases} \quad (4)$$

为了便于控制设计, 如下通过定义新的变量将系统(4)转化为准下三角系统. 定义

$$q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix}.$$

将上式代入式(4), 得

$$\begin{cases} \dot{q} = v, \\ M(q)\dot{v} + C(q, v)v + \sigma(q) = u + \Lambda(q)\xi, \end{cases} \quad (5)$$

其中:

$$M(q) = \begin{pmatrix} m\ell^2 & 0 \\ 0 & m\ell^2 \sin^2 q_1 \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix},$$

$$\sigma(q) = \begin{pmatrix} mg\ell \sin q_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi = \begin{pmatrix} \xi_x \\ \xi_y \\ \xi_z \end{pmatrix},$$

$$\Lambda(q) = \begin{pmatrix} -m\cos q_2 \cos q_1 & -m\sin q_2 \cos q_1 & -m\sin q_1 \\ -m\sin q_2 & -m\cos q_2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C(q, v) = \begin{pmatrix} 0 & -m\ell^2 \dot{q}_2 \sin q_1 \cos q_1 \\ m\ell^2 \dot{q}_2 \sin q_1 \cos q_1 & m\ell^2 \dot{q}_1 \sin q_1 \cos q_1 \end{pmatrix}.$$

注 1 本节给出了空间中 3 个方向同时存在扰动时系统的建模方法. 实际工程中可能有仅在某个或某两个方向上

存在扰动而其他方向不存在扰动这种情况(例如 $\xi_x = 0, \xi_y \neq 0, \xi_z \neq 0$). 此时, 上述建模方法仍然适用, 将得到比系统(4)更简单的一类系统.

如下给出欧拉-拉格朗日系统通常满足的两条重要性质^[5,26], 它们可由系统(5)的矩阵 $M(q), C(q, v)$ 的具体形式得以验证.

性质 1 存在常数 $\bar{d} > \underline{d} > 0$, 使得

$$\underline{d}I \leq M(q) \leq \bar{d}I, \forall q \in \mathbb{R}^n.$$

性质 2 对于任意的 $q, v \in \mathbb{R}^n, \dot{M}(q) - 2C(q, v)$ 是斜对称矩阵, 即

$$z^T (\dot{M}(q) - 2C(q, v))z = 0, \forall z \in \mathbb{R}^n.$$

2.2 控制目标刻画

本文的控制目标是对系统(5)设计自适应状态反馈控制器 u , 保证系统所有状态都有界, 同时系统的输出信号 $q = (q_1, q_2)^T$ 跟踪到给定的参考信号 y_r . 根据实际工业生产过程中对跟踪性能的不同要求, 分别研究实际跟踪和渐近跟踪两类控制问题.

1) 实际跟踪.

控制目标是设计自适应状态反馈控制器保证闭环系统所有状态都是有界的, 且对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在有限的时间 $\eta > 0$, 有 $\|q - y_r\| \leq \varepsilon, \forall t > \eta$, 其中 $\|\cdot\|$ 表示列向量的欧几里得范数及矩阵的诱导范数.

2) 渐近跟踪.

控制目标是设计自适应状态反馈控制器保证闭环系统所有状态都有界并且

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|q - y_r\| = 0.$$

3 实际跟踪控制

3.1 实际跟踪控制设计

考虑有如下假设1和假设2给定的扰动和被跟踪信号下的实际跟踪控制设计问题:

假设 1 存在未知常数 $d_1 > 0$, 使 $\|\xi\| < d_1$.

假设 2 对于给定的光滑被跟踪信号 y_r , 存在未知的常数 $d_2 > 0$, 使得 $\|y_r\| \leq d_2, \|\dot{y}_r\| \leq d_2$.

首先引入状态变换

$$\begin{cases} z_1 = q - y_r, \\ z_2 = v - x_2^*, \end{cases} \quad (6)$$

其中 x_2^* 是待选择的虚拟控制. 利用式(5)对式(6)求导可得如下误差系统:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = \dot{q} - \dot{y}_r = v - \dot{y}_r = z_2 + x_2^* - \dot{y}_r, \\ \dot{z}_2 = \dot{v} - \dot{x}_2^*. \end{cases} \quad (7)$$

然后, 采用向量式的反推跟踪控制策略, 通过选取合适的 Lyapunov 函数推导出跟踪控制器.

第 1 步 定义准 Lyapunov 函数

$$V_1 = \frac{1}{2} z_1^T z_1.$$

沿着式(7)的解对 V_1 求导有

$$\dot{V}_1 = z_1^T \dot{z}_1 = z_1^T z_2 + z_1^T x_2^* - z_1^T \dot{y}_r.$$

利用Young不等式有

$$-z_1^T \dot{y}_r \leq \|z_1\| d_2 \leq \frac{d_2^2}{K(t)} + \frac{K(t) z_1^T z_1}{4},$$

其中 $K(t)$ 为相应的自适应律,

$$\dot{K}(t) = \begin{cases} \|z_1\| - \frac{\varepsilon}{2}, & \|z_1\| \geq \frac{\varepsilon}{2}, \\ 0, & \|z_1\| < \frac{\varepsilon}{2}, \end{cases} \quad (8)$$

其初始值 $K(0) \geq 1$, 于是有

$$\dot{V}_1 \leq z_1^T z_2 + z_1^T (x_2^* + \frac{K(t) z_1}{4}) + \frac{d_2^2}{K(t)}.$$

通过选择

$$x_2^* = -a_1 z_1 - \frac{K(t) z_1}{4}, \quad (9)$$

其中 $a_1 > 0$ 为任意常数, \dot{V}_1 可化简为

$$\dot{V}_1 \leq -a_1 z_1^T z_1 + z_1^T z_2 + \frac{d_2^2}{K(t)}. \quad (10)$$

第2步 定义准Lyapunov函数

$$V_2 = V_1 + \frac{1}{2} z_2^T M(q) z_2.$$

利用性质2对等式 V_2 求导有

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= \dot{V}_1 + \frac{1}{2} z_2^T \dot{M}(q) z_2 + z_2^T M(q) \dot{z}_2 \leq \\ &\dot{V}_1 + z_2^T (u + \Lambda(q, v) \xi - \sigma(q) - C(q, v) z_2 - \\ &C(q, v) x_2^*) + \frac{1}{2} z_2^T \dot{M}(q) z_2 - z_2^T M(q) \dot{x}_2^* \leq \\ &-a_1 z_1^T z_1 + \frac{d_2^2}{K(t)} + z_2^T (u + \Lambda(q, v) \xi - \\ &\sigma(q) - C(q, v) x_2^* + z_1 - M(q) \dot{x}_2^*). \end{aligned} \quad (11)$$

用Young不等式及假设1对上式最后一项进行放大有

$$\left\{ \begin{aligned} z_2^T \Lambda(q, v) \xi &\leq \frac{\|\Lambda(q, v) \xi\|^2}{K(t)} + \frac{K(t) z_2^T z_2}{4} \leq \\ &\frac{5m^2 d_1^2}{K(t)} + \frac{K(t) z_2^T z_2}{4}, \\ -z_2^T \sigma(q) &\leq m |z_2^T z_3| \leq \frac{m^2}{K(t)} + \frac{K(t) |z_2^T z_3|^2}{4}, \\ -z_2^T C(q, v) x_2^* &\leq m |z_2^T z_4 x_2^*| \leq \\ &\frac{m^2}{K(t)} + \frac{K(t) |z_2^T z_4 x_2^*|^2}{4}, \\ -z_2^T M(q) \dot{x}_2^* &\leq m |z_2^T z_5 \dot{x}_2^*| \leq \\ &\frac{m^2}{K(t)} + \frac{K(t) |z_2^T z_5 \dot{x}_2^*|^2}{4}, \end{aligned} \right. \quad (12)$$

其中: $|\cdot|$ 表示求绝对值,

$$\begin{cases} z_3 = \begin{pmatrix} g \ell \sin q_1 \\ 0 \end{pmatrix}, z_5 = \begin{pmatrix} \ell^2 & 0 \\ 0 & \ell^2 \sin^2 q_1 \end{pmatrix}, \\ z_4 = \begin{pmatrix} 0 & \ell^2 \dot{q}_2 \sin q_1 \cos q_1 \\ \ell^2 \dot{q}_2 \sin q_1 \cos q_1 & \ell^2 \dot{q}_1 \sin q_1 \cos q_1 \end{pmatrix}. \end{cases} \quad (13)$$

将式(12)代入式(11)并整理, 得

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &\leq -a_1 z_1^T z_1 + \frac{H}{K(t)} + z_2^T (u + z_1 + \frac{K(t) z_2}{4} + \\ &\frac{K(t) z_3 z_2^T z_3}{4} + \frac{K(t) z_4 x_2^* z_2^T z_4 x_2^*}{4} + \\ &\frac{K(t) z_5 \dot{x}_2^* z_2^T z_5 \dot{x}_2^*}{4}), \end{aligned} \quad (14)$$

其中 $H = d_2^2 + 3m^2 + 5m^2 d_1^2$.

选取控制

$$\begin{aligned} u &= -a_2 z_2 - z_1 - \frac{K(t) z_2}{4} - \frac{K(t) z_3 z_3^T z_2}{4} - \\ &\frac{K(t) z_4 x_2^* x_2^{*T} z_4^T z_2}{4} - \frac{K(t) z_5 \dot{x}_2^* \dot{x}_2^{*T} z_5^T z_2}{4}, \end{aligned} \quad (15)$$

其中 $a_2 > 0$ 为任意常数. 将所取控制(15)代入式(14)可得

$$\dot{V}_2 \leq -a_1 z_1^T z_1 - a_2 z_2^T z_2 + \frac{H}{K(t)} \leq -cV_2 + \frac{H}{K(t)}, \quad (16)$$

其中 $c = \min\{2a_1, \frac{2a_2}{d}\}$.

3.2 稳定性分析

引理 1 控制器(15)保证方程(8)定义的 $K(t)$ 对任意初值 $K(0) \geq 1$ 在 $[0, +\infty)$ 上是有界的.

证 利用反证法证明此命题. 假设 $K(t)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上是无界的, 则存在时刻 $t_1 > 0$, 使得 $K(t) \geq \frac{16H}{\varepsilon^2 c}, t > t_1$. 从而, 式(16)给出

$$\dot{V}_2 \leq -cV_2 + \frac{H}{K(t)} \leq -cV_2 + \frac{\varepsilon^2 c}{16}.$$

对上式两边在 $[0, t]$ 积分可得

$$V_2 \leq V_2(0) e^{-ct} + \frac{\varepsilon^2}{16} (1 - e^{-ct}).$$

注意到 $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-ct} = 0$, 故存在时刻 $t_2 > 0$. 当 $t > t_2$ 时, 有 $e^{-ct} V_2(0) \leq \frac{\varepsilon^2}{16}$. 令 $\eta = \max\{t_1, t_2\}$, 则当 $t > \eta > 0$ 时,

有 $V_2 \leq \frac{\varepsilon^2}{8}$. 又因为 $V_2 \geq \frac{1}{2} z_1^T z_1$, 可得 $\|z_1\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. 因此, 由式(8)可得 $\dot{K}(t) = 0, t > \eta$. 这表明当 $t > \eta$ 时, $K(t)$ 是常数. 与假设矛盾. 因此, $K(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 上有界.

证毕.

定理 1 考虑满足假设1的欧拉-拉格朗日系统(5). 对假设2给定的参考信号 y_r , 所设计的自适应状态

反馈控制器(8)(15)保证闭环系统所有状态都有界且系统输出 q 实际跟踪到给定参考信号 y_r , 即对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在某时刻 $\eta > 0$, 有 $\|q - y_r\| \leq \varepsilon, \forall t > \eta$.

证 i) 自适应律(8)表明 $\dot{K}(t) \geq 0$, 因而 $K(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 是递增的. 注意到 $K(0) \geq 1$, 于是有 $K(t) \geq 1, t \in [0, +\infty)$, 进而由方程(16)得

$$\dot{V}_2 \leq -cV_2 + \frac{H}{K(t)} \leq -cV_2 + H.$$

对上式两边在 $[0, t]$ 积分可得

$$V_2 \leq V_2(0)e^{-ct} + \frac{H}{c}(1 - e^{-ct}) \leq V_2(0) + \frac{H}{c}.$$

上式表明 V_2 是有界的, 从而 z_1, z_2 有界. 又因为 y_r 是有界的(见假设2), 所以由式(6)(9)可以得出 q, v 有界. 因此, 闭环系统所有状态都有界.

ii) 引理1显示 $K(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 上有界, 故由式(9)可知 x_2^* 有界, 从而 z_1 有界(见式(7)). 这说明了 z_1 从而 $\|z_1\|$ 在 $[0, +\infty)$ 是一致连续的. 因此, 由式(8)可得 $\dot{K}(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 是一致连续的. 注意到 $K(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 上有界并且

$$\int_0^{+\infty} \dot{K}(t)dt = K(\infty) - K(0) < +\infty,$$

故由Barbalat's引理得 $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{K}(t) = 0$, 即对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在某个时刻 $\eta > 0$, 当 $\forall t > \eta$ 时, 有 $|\dot{K}(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. 根据式(8)得 $\|z_1\| - \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2}$, 进而有 $\|q - y_r\| \leq \varepsilon$. 证毕.

4 渐近跟踪控制

4.1 基于切换的控制设计

给定二阶连续可导的参考信号 y_r , 考虑受如下假设描述的扰动下系统(5)的渐近跟踪控制设计问题:

假设 3 存在未知常数 μ^* 与未知正整数 L 使得 $\|\xi\| \leq \mu^*$, 扰动 ξ 的周期(最小) T^* 可以被写成 $T^* = L\tau$, 其中 τ 为已知常数.

为方便控制设计, 将原系统(5)变为

$$\begin{cases} \dot{q} = v, \\ M(q)\dot{v} + C(q, v)v + \sigma(q) = u + \bar{A}(q)\xi^*, \end{cases} \quad (17)$$

其中:

$$\bar{A}(q) = \begin{pmatrix} -\cos q_2 \cos q_1 & -\sin q_2 \cos q_1 & -\sin q_1 \\ -\sin q_2 & -\cos q_2 & 0 \end{pmatrix},$$

$\xi^* = m\xi$. 显然, ξ^* 仍然以 T^* 为周期且有未知上界(即 $m\mu^*$), 如下将通过引入基于学习机制的切换补偿方法克服其未知性.

引入状态变换

$$z_1 = q - y_r, \quad z_2 = v - \dot{y}_r - \alpha,$$

其中 α 是待选择的虚拟控制. 利用式(17)对上式求导

可得如下误差系统:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = \dot{q} - \dot{y}_r = v - \dot{y}_r = z_2 + \alpha, \\ M(q)\dot{z}_2 = u + \bar{A}(q)\xi^* - C(q, v)v - \sigma(q) - M(q)(\dot{y}_r + \dot{\alpha}). \end{cases} \quad (18)$$

如下利用反推控制设计方法给出控制设计过程.

第1步 定义准Lyapunov函数

$$V_1 = \frac{1}{2}z_1^T z_1.$$

沿着式(18)的解对 V_1 求导得

$$\dot{V}_1 = z_1^T(z_2 + \alpha).$$

选取虚拟控制 $\alpha = -\frac{1}{2}z_1$, 从而有

$$\dot{V}_1 \leq -\frac{1}{2}z_1^T z_1 + z_1^T z_2. \quad (19)$$

第2步 定义准Lyapunov函数

$$\begin{aligned} V_2 = V_1 + \frac{1}{2}z_2^T M(q)z_2 + \frac{1}{2}\tilde{m}^2 + \\ \frac{1}{2} \int_{t-\hat{T}}^t (\text{sat}_\mu(\xi^*(s)) - \text{sat}_\mu(\hat{\xi}^*(s)))^T \times \\ (\text{sat}_\mu(\xi^*(s)) - \text{sat}_\mu(\hat{\xi}^*(s))) ds, \end{aligned} \quad (20)$$

其中: $\tilde{m} = m - \hat{m}$; $\hat{m}, \hat{\xi}^*$ 分别是对未知质量 m 、扰动 ξ^* 的估计; $\text{sat}_\mu(\cdot)$ 是界为 μ 的饱和函数, 即 $\forall \xi_i \in \mathbb{R}^1, i = 1, 2, 3, \dots, m$,

$$\text{sat}_\mu(\xi_i) = \begin{cases} \xi_i, & |\xi_i| \leq \mu, \\ \mu \text{sgn } \xi_i, & |\xi_i| > \mu. \end{cases}$$

对 V_2 求导:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 = \dot{V}_1 + \frac{1}{2}z_2^T \dot{M}(q)z_2 + z_2^T M(q)\dot{z}_2 - \dot{\hat{m}}\tilde{m} + \\ \frac{1}{2}(\text{sat}_\mu(\xi^*(t)) - \text{sat}_\mu(\hat{\xi}^*(t)))^T \times \\ (\text{sat}_\mu(\xi^*(t)) - \text{sat}_\mu(\hat{\xi}^*(t))) - \\ \frac{1}{2}(\text{sat}_\mu(\xi^*(t - \hat{T})) - \text{sat}_\mu(\hat{\xi}^*(t - \hat{T})))^T \times \\ (\text{sat}_\mu(\xi^*(t - \hat{T})) - \text{sat}_\mu(\hat{\xi}^*(t - \hat{T}))). \end{aligned} \quad (21)$$

注意到扰动 ξ^* 是周期的, 故有

$$\text{sat}_\mu(\xi^*(t - \hat{T})) = \text{sat}_\mu(\xi^*(t)) = \xi^*(t).$$

选择学习律为

$$\dot{\hat{\xi}}^*(t) = \text{sat}_\mu(\hat{\xi}^*(t - \hat{T})) + z_2^T \bar{A}(q). \quad (22)$$

将上述两式代入式(21)的最后一项得

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 = \dot{V}_1 + \frac{1}{2}z_2^T \dot{M}(q)z_2 + z_2^T M(q)\dot{z}_2 - \dot{\hat{m}}\tilde{m} + \\ \frac{1}{2}(\text{sat}_\mu(\xi^*(t)) - \text{sat}_\mu(\hat{\xi}^*(t)))^T \times \\ (\text{sat}_\mu(\xi^*(t)) - \text{sat}_\mu(\hat{\xi}^*(t))) - \\ \frac{1}{2}(\tilde{\xi}^* + z_2^T \bar{A}(q))^T (\tilde{\xi}^* + z_2^T \bar{A}(q)), \end{aligned} \quad (23)$$

其中 $\tilde{\xi}^* = \xi^* - \hat{\xi}^*$.

利用饱和函数的重要性质(见文献[27]式(14)), 即

$$\begin{aligned} (\xi_1 - \xi_2)^2 &\geq (\text{sat}_\mu(\xi_1) - \text{sat}_\mu(\xi_2))^2, \\ \forall |\xi_1| \leq \mu, \xi_2 \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

可得

$$\begin{aligned} &(\text{sat}_\mu(\xi^*(t)) - \text{sat}_\mu(\hat{\xi}^*(t)))^T \times \\ &(\text{sat}_\mu(\xi^*(t)) - \text{sat}_\mu(\hat{\xi}^*(t))) \leq \\ &(\xi^*(t) - \hat{\xi}^*(t))^T (\xi^*(t) - \hat{\xi}^*(t)) = \\ &\tilde{\xi}^*(t)^T \tilde{\xi}^*(t). \end{aligned}$$

把上式以及式(18)的第2式和式(19)代入式(23)得

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 \leq &-\frac{1}{2}z_1^T z_1 + z_1^T z_2 + \frac{1}{2}z_2^T (\dot{M}(q) - \\ &2C(q, v))z_2 + z_2^T (u + \bar{\Lambda}(q)\xi^* - \sigma(q) - \\ &C(q, v)(\dot{y}_r + \alpha) - M(q)(\dot{y}_r + \dot{\alpha})) - \dot{m}\tilde{m} - \\ &\frac{1}{2}z_2^T \bar{\Lambda}(q)\bar{\Lambda}(q)^T z_2 - \tilde{\xi}^* z_2^T \bar{\Lambda}(q). \end{aligned}$$

从 $C(q, v)$, $M(q)$ 以及 $\sigma(q)$ 的定义可得

$$C(q, v)(\dot{y}_r + \alpha) + M(q)(\dot{y}_r + \dot{\alpha}) + \sigma(q) = Y(q, v)m,$$

其中:

$$Y(q, v) = z_4(\dot{y}_r + \alpha) + z_5(\ddot{y}_r + \ddot{\alpha}) + z_3,$$

(z_3, z_4, z_5 如式(13)所示). 利用上式以及性质2可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 \leq &-\frac{1}{2}z_1^T z_1 + z_2^T (z_1 + u - Y(q, v)m + \bar{\Lambda}(q)\xi^*) - \\ &\dot{m}\tilde{m} - \frac{1}{2}z_2^T \bar{\Lambda}(q)\bar{\Lambda}(q)^T z_2 - \tilde{\xi}^* z_2^T \bar{\Lambda}(q). \end{aligned} \quad (24)$$

选取控制器

$$u = -c_0 z_2 - z_1 + Y(q, v)\hat{m} - \bar{\Lambda}(q)\hat{\xi}^*, \quad (25)$$

其中 $c_0 > 0$ 为任意常数, 自适应律

$$\dot{\hat{m}} = -z_2^T Y(q, v). \quad (26)$$

式(24)转化为

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 \leq &-\frac{1}{2}z_1^T z_1 - c_0 z_2^T z_2 - \frac{1}{2}z_2^T \bar{\Lambda}(q)\bar{\Lambda}(q)^T z_2 \leq \\ &-\frac{1}{2}z_1^T z_1 - c_0 z_2^T z_2. \end{aligned} \quad (27)$$

需指出的是, 由于扰动 ξ^* 的周期与上界是未知的, 学习律(22)中的参数 μ 和 \hat{T} 无法确定, 自适应学习控制器(22)(25)–(26)无法实施. 为此, 如下将设计切换机制对控制器参数 μ 和 \hat{T} 在线进行调节, 保证闭环系统期望的稳定性.

4.2 切换机制

初始化: 预先选择3个正数 c_1, c_2, c_3 . 令 $t_s = 0, i = 1, \mu = c_1 i, \hat{T} = i\tau$, 并且 $\hat{m}(t_s) = 0$.

切换逻辑: 对于 $\forall t > t_s$, 如果有

$$\int_{t_s}^t z_1^T(s) z_1(s) ds > M_1 \quad (28)$$

或者

$$z_1^T(t) z_1(t) + z_2^T(t) z_2(t) > M_2, \quad (29)$$

其中:

$$\begin{aligned} M_1 &= z_1^T(t_s) z_1(t_s) + c_2 i z_2^T(t_s) z_2(t_s) + \\ &c_3 i + 4c_1^2 \tau i^3 + 1, \\ M_2 &= i M_1, \end{aligned}$$

则从 i 切换到 $i + 1$, 因此 μ 从 $c_1 i$ 切换到 $c_1(i + 1)$, \hat{T} 从 $i\tau$ 切换到 $(i + 1)\tau$, 并重置 $t_s = t, \hat{m}(t_s^+) = 0$. 然后重复这个过程.

4.3 稳定性分析

定理 2 考虑满足假设3的系统(17), 自适应学习控制器(22)(25)–(26)在第4.2节给出的切换机制下保证闭环系统所有状态都有界并且系统输出 q 渐近跟踪到给定参考信号 y_r , 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|q - y_r\| = 0$.

证 首先证明切换仅发生有限次, 然后证明如果只发生有限次切换, 闭环系统所有状态都有界, 并且系统输出 q 渐近跟踪到给定参考信号 y_r .

① 切换仅发生有限次.

利用反证法. 假设第4.2节给定的切换过程发生无限次, 则必存在整数 i^* 使得

$$\begin{cases} i^* + 1 \geq \max\left\{\frac{m\mu^*}{c_1}, \frac{\bar{d}}{c_2}, \frac{m^2}{c_3}, \frac{1}{\underline{d}}\right\}, \\ \text{mod}(i^* + 1, L) = 0. \end{cases} \quad (30)$$

由第2个等式可得, 存在正整数 k , 使得 $(i^* + 1) = kL$.

令 t_{i^*} 是第 i^* 次切换发生的时刻, t_{i^*+1} 是下一次切换发生的时刻. 一方面, 由切换逻辑可知

$$\int_{t_{i^*}}^{t_{i^*+1}} z_1^T(s) z_1(s) ds > M_1 \quad (31)$$

或者

$$z_1^T(t_{i^*+1}) z_1(t_{i^*+1}) + z_2^T(t_{i^*+1}) z_2(t_{i^*+1}) > M_2, \quad (32)$$

其中:

$$\begin{aligned} M_1 &= z_1^T(t_{i^*}) z_1(t_{i^*}) + c_2(i^* + 1) z_2^T(t_{i^*}) z_2(t_{i^*}) + \\ &c_3(i^* + 1) + 4c_1^2 \tau (i^* + 1)^3 + 1, \\ M_2 &= (i^* + 1) M_1. \end{aligned}$$

另一方面, 在区间 $[t_{i^*}, t_{i^*+1}]$ 上, 控制器参数

$$\hat{T} = (i^* + 1)\tau = kL\tau, \mu = (i^* + 1)c_1 > m\mu^*.$$

因此, \hat{T} 是扰动 ξ^* 的周期, μ 是扰动 ξ^* 的上界. 从而, 不等式(27)在区间 $[t_{i^*}, t_{i^*+1}]$ 上成立. 对式(27)左右两边在区间 $[t_{i^*}, t_{i^*+1}]$ 积分可得

$$V_2(t_{i^*+1}) \leq V_2(t_{i^*}), \quad (33)$$

$$\int_{t_{i^*}}^{t_{i^*+1}} z_1^T(s) z_1(s) ds \leq 2V_2(t_{i^*}). \quad (34)$$

注意到在区间 $[t_{i^*}, t_{i^*+1}]$ 上, $\hat{T} = (i^* + 1)\tau, \mu =$

$(i^* + 1)c_1$, 利用性质1以及式(30)对 $V_2(t_{i^*})$ 进行估计,

$$\begin{aligned}
 V_2(t_{i^*}) &= \frac{1}{2}z_1^T(t_{i^*})z_1(t_{i^*}) + \\
 &\quad \frac{1}{2}z_2^T(t_{i^*})M(q)z_2(t_{i^*}) + \\
 &\quad \frac{1}{2}(m - \hat{m})^T(m - \hat{m}) + \\
 &\quad \frac{1}{2}\int_{t_{i^*}-\bar{T}}^{t_{i^*}}(\text{sat}_\mu(\xi^*(s)) - \text{sat}_\mu(\hat{\xi}^*(s)))^T \times \\
 &\quad (\text{sat}_\mu(\xi^*(s)) - \text{sat}_\mu(\hat{\xi}^*(s)))ds \leq \\
 &\quad \frac{1}{2}z_1^T(t_{i^*})z_1(t_{i^*}) + \frac{\bar{d}}{2}z_2^T(t_{i^*})z_2(t_{i^*}) + \\
 &\quad \frac{1}{2}m^2 + 2\mu^2\bar{T} \leq \\
 &\quad \frac{1}{2}z_1^T(t_{i^*})z_1(t_{i^*}) + \frac{c_2(i^* + 1)}{2}z_2^T(t_{i^*}) \times \\
 &\quad z_2(t_{i^*}) + \frac{1}{2}c_3(i^* + 1) + 2c_1^2\tau(i^* + 1)^3 \leq \\
 &\quad \frac{1}{2}M_1.
 \end{aligned}$$

由上式及式(33)–(34)可得

$$\begin{aligned}
 \int_{t_{i^*}}^{t_{i^*+1}} z_1^T(s)z_1(s)ds &\leq 2V_2(t_{i^*}) \leq M_1, \\
 z_1^T(t_{i^*+1})z_1(t_{i^*+1}) + z_2^T(t_{i^*+1})z_2(t_{i^*+1}) &\leq \\
 \max\{2, \frac{2}{\underline{d}}\}V_2(t_{i^*+1}) &\leq \max\{2, \frac{2}{\underline{d}}\}V_2(t_{i^*}) \leq \\
 \max\{1, \frac{1}{\underline{d}}\}M_1 &\leq (i^* + 1)M_1 = \\
 M_2.
 \end{aligned}$$

以上两式显然与式(31)–(32)矛盾. 因此, 假设不成立, 则切换仅发生有限次.

② 闭环系统性能.

假设在时刻 t_{i_f} 处发生最后一次切换, 则根据切换逻辑, 对 $\forall t > t_{i_f}$, 都有

$$\begin{cases} \int_{t_{i_f}}^t z_1^T(s)z_1(s)ds \leq M_1, \\ z_1^T(t)z_1(t) + z_2^T(t)z_2(t) \leq M_2, \end{cases} \quad (35)$$

其中:

$$\begin{aligned}
 M_1 &= z_1^T(t_{i_f})z_1(t_{i_f}) + c_2(i^* + 1)z_2^T(t_{i_f})z_2(t_{i_f}) + \\
 &\quad c_3(i^* + 1) + 4c_1^2\tau(i^* + 1)^3 + 1, \\
 M_2 &= (i^* + 1)M_1.
 \end{aligned}$$

由式(35)的第2个不等式可知 $z_1(t)$, $z_2(t)$ 在区间 $[t_{i_f}, +\infty)$ 有界. 由于 $z_1(t)$, $z_2(t)$ 在 $[0, t_{i_f}]$ 内连续, 因此, $z_1(t)$, $z_2(t)$ 在 $[0, t_{i_f}]$ 有界, 故 $z_1(t)$, $z_2(t)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 有界, 从而 α , q , v 在 $[0, +\infty)$ 有界. 又因为 $\dot{z}_1 = z_2 + \alpha$, 故 \dot{z}_1 在 $[0, +\infty)$ 有界. 式(35)的第1个不等式显示 $z_1(t)$ 在 $[t, +\infty)$ 是平方可积. 注意到, $z_1(t)$ 是连续的, 故 $z_1(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 有界并且平方可积. 因此, 根

据Barbalat's引理知 $z_1(t) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$ (即 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|q - y_r\| = 0$). 证毕.

5 仿真算例

本节以摆锤质量为0.3 kg, 摆杆长度为0.2 m的旋转单摆系统为例给出仿真实验验证所设计控制器的有效性. 选择初始状态 $q(0) = (q_1 \ q_2)^T = (0.7 \ 0.5)^T$, $v(0) = (v_1 \ v_2)^T = (0.6 \ 0.8)^T$. 给定参考信号为 $y_r = (y_{r1} \ y_{r2})^T = (2 \sin t \ \cos t)^T$. 如下分别给出实际跟踪和渐近跟踪两种控制算法的仿真实验过程.

① 实际跟踪仿真.

假设扰动为 $\xi = (\sin t \ \sin(2t) \ \cos t)^T$. 给定实际跟踪精度参数 $\varepsilon = 0.06$. 选择设计参数 $a_1 = 39, a_2 = 20$, 自适应律初始值 $K(0) = 1$. 采用控制器(8)(15), 通过仿真实验可以得到仿真图2–3. 图2显示在0.08 s后跟踪误差收敛到给定的范围内, 图3显示了动态调节参数 K 是有界的并且最终收敛到某一常值.

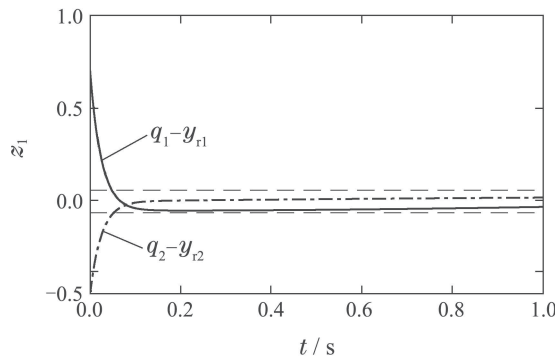


图 2 实际跟踪误差曲线

Fig. 2 Trajectory of practical tracking error

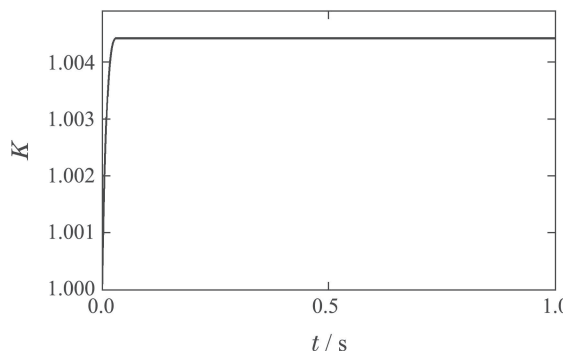


图 3 实际跟踪自适应调节参数

Fig. 3 Trajectory of practical tracking adaptive adjustment parameters

② 渐近跟踪仿真.

假设扰动为

$$\xi = \left(\frac{9}{5} \sin \frac{20\pi}{93}t \ \frac{6}{5} \cos \frac{20\pi}{93}t \ \frac{4}{5} \sin \frac{20\pi}{93}t \right)^T.$$

因此, 扰动上界 $\mu^* = 1.8$, 周期为 $T^* = 9.3$. 假设 $L = 31$, 则按照假设3有 $\tau = 0.3$. 选择控制器参数 $c_0 = 15$, 切换逻辑中的参数 $c_1 = 10, c_2 = 29, c_3 = 19.87$. 采

用控制器(22)(25)–(26), 其中切换参数按照第4.2节给定的切换机制调节, 得到仿真图4–6. 图4–6显示了闭环系统的动态行为. 图4表明跟踪误差渐近收敛到零, 图5–6表明切换参数 \hat{T} 和 μ 在有限次切换之后保持在不同的常值.

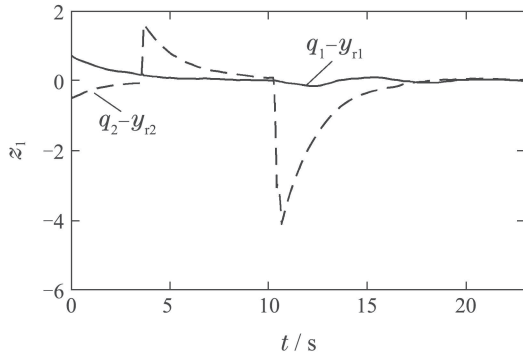


图4 渐近跟踪误差曲线

Fig. 4 Trajectory of asymptotic tracking error

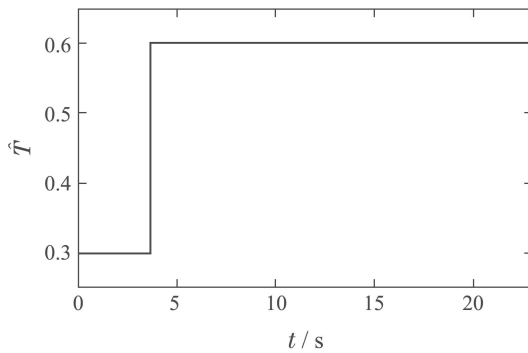


图5 切换调节参数 \hat{T}

Fig. 5 Trajectory of switching adjustment parameters \hat{T}

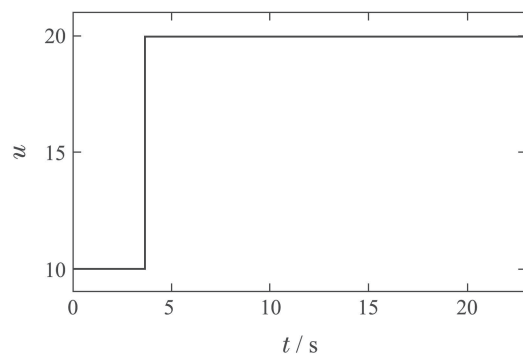


图6 切换调节参数 μ

Fig. 6 Trajectory of switching adjustment parameters μ

6 结论

本论文研究了一类受扰情形下旋转单摆的建模与跟踪控制问题. 首先利用动静法和相对运动原理建立了旋转单摆系统的动力学模型. 然后将反推设计方法分别与自适应动态补偿技术和扰动学习、切换补偿机制结合, 分别给出了实际跟踪与渐近跟踪两类控制问题的解决方案, 显式设计了实际跟踪与渐近跟踪器,

保证了期望的跟踪性能. 需指出的是, 本文所给出的控制设计方法要求系统全部状态可量测. 然而在实际工程中, 受制于测量(传感)设备的精度等局限性, 系统状态有时无法全部可量测, 导致系统存在状态未知性. 因此, 未来值得研究的一个比较有意义的问题是利用较少的测量信息实现系统的跟踪等控制目标. 为此, 需要构建状态观测器重构系统不可测状态, 这将使得相应的控制问题更具有挑战性.

参考文献:

- [1] WU Z J, WANG S T, CUI M Y. Tracking controller design for random nonlinear benchmark system. *Journal of the Franklin Institute*, 2017, 354(1): 360 – 371.
- [2] CUI M Y, XIE X J, WU Z J. Dynamics modeling and tracking control of robot manipulators in random vibration environment. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, 58(6): 1540 – 1545.
- [3] VINCENTY C G B, BÁEZ G B. Modelling the ball-and-beam system from newtonian mechanics and from lagrange methods. *Latin American and Caribbean Conference for Engineering and Technology*. Guayaquil, Ecuador: LACCEI, 2014: 22 – 24.
- [4] GUO Lei, LIAO Qizheng, WEI Shimin. Dynamic modeling and nonlinear control of unicycle robot. *Journal of System Simulation*, 2009, 21(9): 2730 – 2734.
(郭磊, 廖启征, 魏世民. 独轮车机器人的动力学建模与非线性控制系统仿真学报, 2009, 21(9): 2730 – 2734.)
- [5] CUI M Y, WU Z J. Trajectory tracking of flexible joint manipulators actuated by DC-motors under random disturbances. *Journal of the Franklin Institute*, 2019, 356(16): 9330 – 9343.
- [6] OLFATI SABER R. Fixed point controllers and stabilization of the cart-pole system and the rotating pendulum. *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control*. Phoenix, USA: IEEE, 1999: 1174 – 1181.
- [7] DWIVEDI P, PANDEY S, JUNGHARE A S. Stabilization of unstable equilibrium point of rotary inverted pendulum using fractional controller. *Journal of the Franklin Institute*, 2017, 354(17): 7732 – 7766.
- [8] ANGELI D. Almost global stabilization of the inverted pendulum via continuous state feedback. *Automatica*, 2001, 37(7): 1103 – 1108.
- [9] LIU G Y, DRAGAN N, IVEN M. Nonlinear stable inversion-based output tracking control for a spherical inverted pendulum. *International Journal of Control*, 2008, 81(1): 116 – 133.
- [10] YUE M, WANG S, SUN J Z. Simultaneous balancing and trajectory tracking control for two-wheeled inverted pendulum vehicles: A composite control approach. *Neurocomputing*, 2016, 191(26): 44 – 54.
- [11] MAZENC F D R, BOWONG S. Tracking trajectories of the cart-pendulum system. *Automatica*, 2003, 39(4): 677 – 684.
- [12] YUE M, AN C, SUN J Z. An efficient model predictive control for trajectory tracking of wheeled inverted pendulum vehicles with various physical constraints. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 2018, 16(1): 265 – 274.
- [13] GRITLI H, KHRAIEF N, CHEMORI A. Self-generated limit cycle tracking of the underactuated inertia wheel inverted pendulum under IDA-PBC. *Nonlinear Dynamics*, 2017, 89(3): 2195 – 2226.
- [14] ANDERSON M J, GRANTHAM W J. Lyapunov optimal feedback control of a nonlinear inverted pendulum. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 1989, 111(4): 554 – 558.
- [15] XU Y, IWASE M, FURUTA K. Time optimal swing-up control of single pendulum. *Journal of Dynamic Systems Measurement and Control*, 2001, 123(3): 518 – 527.

- [16] NICOSIA S, TOMEI P. Robot control by using only joint position measurements. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1990, 35(9): 1058 – 1061.
- [17] ANDREEV A S, PEREGUDOVA O A, SOBOLEV A A. On global trajectory tracking control of robot manipulators with flexible joints. *IFAC-PapersOnLine*, 2018, 51(32): 28 – 33.
- [18] BERGHUIS H, NIJMEIJER H, LHNBERG P. Observer design in the tracking control problem of robots. *IFAC Proceedings Volumes*, 1992, 25(13): 197 – 202.
- [19] CHEAH C C, HIRANO M, KAWAMURA S, et al. Approximate Jacobian control with task-space damping for robot manipulators. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(5): 752 – 757.
- [20] VILLANI L, DEWIT C C, BROGLIATO B. An exponentially stable adaptive control for force and position tracking of robot manipulators. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1999, 44(4): 798 – 802.
- [21] HE W, CHEN Y H, YIN Z. Adaptive neural network control of an uncertain robot with full-state constraints. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2015, 46(3): 620 – 629.
- [22] LI Z J, YANG Y P, LI J X. Adaptive motion/force control of mobile under-actuated manipulators with dynamics uncertainties by dynamic coupling and output feedback. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2010, 18(5): 1068 – 1079.
- [23] LI Z J, LI J X, KANG Y. Adaptive robust coordinated control of multiple mobile manipulators interacting with rigid environments. *Automatica*, 2010, 46(12): 2028 – 2034.
- [24] LI Z, GE S S, ADAMS M, et al. Robust adaptive control of uncertain force/motion constrained nonholonomic mobile manipulators. *Automatica*, 2008, 44(3): 776 – 784.
- [25] JOHNS O D. *Analytical Mechanics for Relativity and Quantum Mechanics*. New York: Oxford University Press, 2005.
- [26] ORTEGA R, PEREZ J A L, NICKLASSON P J. *Passivity-based Control of Euler-Lagrange Systems: Mechanical, Electrical and Electromechanical Applications*. New York: Springer Science Business Media, 2013.
- [27] DIXON W E, ZERGEROGLU E, DAWSON D M, et al. Repetitive learning control: A Lyapunov-based approach. *IEEE Transactions on Systems*, 2002, 32(4): 538 – 545.

作者简介:

李健 博士, 副教授, 目前研究方向为分布参数系统控制、机械系统控制, E-mail: ytulijian@ytu.edu.cn;

李俊艳 硕士研究生, 目前研究方向为机械系统控制, E-mail: ytu lijunyan@126.com;

吴昭景 博士, 教授, 目前研究方向为随机控制、非线性控制、机器人控制, E-mail: Wuzhaojing00@188.com.