

基于逻辑方程求解的网络故障定位规则的验证与实现

刘玉娜, 李海涛[†]

(山东师范大学 数学与统计学院, 山东 济南 250014)

摘要: 随着互联网的普及与快速发展, 网络服务质量成为了最受关注的问题之一. 本文利用矩阵半张量积方法, 研究互联网网络中的故障定位问题. 首先, 利用矩阵半张量积给出网络中路径的代数表示. 其次, 基于该代数表示, 将故障定位问题对应的逻辑方程转化为等价的代数方程, 通过分析代数方程的解, 确定网络中发生故障的链接. 最后, 通过例子说明所得理论结果的有效性.

关键词: 网络路由; 最小一致故障集; 逻辑方程; 矩阵半张量积; 树

引用格式: 刘玉娜, 李海涛. 基于逻辑方程求解的网络故障定位规则的验证与实现. 控制理论与应用, 2020, 37(6): 1335 – 1341

DOI: 10.7641/CTA.2019.90765

Verification and implementation of network fault location rules based on solving logic equations

LIU Yu-na, LI Hai-tao[†]

(School of Mathematics and Statistics, Shandong Normal University, Jinan Shandong 250014, China)

Abstract: With the popularization and development of Internet network, the network service quality becomes one of the most concerned topics. This paper investigates the fault location problem in the Internet network by using the semi-tensor product of matrices. Firstly, the algebraic representation of paths in the Internet network is given via the semi-tensor product of matrices. Secondly, based on the algebraic representation, the logic equations of fault location problem are converted into an equivalent algebraic equation. By solving the algebraic equation, the faulty links of Internet network are determined. Finally, an example is presented to show the effectiveness of the obtained theoretical results.

Key words: network routing; smallest consistent failure set; logic equation; semi-tensor product of matrices; trees

Citation: LIU Yuna, LI Haitao. Verification and implementation of network fault location rules based on solving logic equations. *Control Theory & Applications*, 2020, 37(6): 1335 – 1341

1 引言

互联网网络是经济发展, 社交生活等领域的重要支撑工具, 是信息社会的基础. 随着当今信息技术的快速发展, 人们对网络服务质量的要求越来越高. 由于物理损坏、黑客攻击、带宽限制等因素的影响, 互联网网络路段上经常发生一些故障, 为提高网络服务的质量, 精确定位故障发生的路段十分重要^[1]. 随着一些实时程序的广泛应用以及网络直播的流行, 精确定位故障的发生位置以便网络服务供应商及时采取相应的措施就显得十分必要.

对于故障定位的研究, 很多学者提出了不同的方法. 文献[2]提出了一种通过从多个源到多个目的地测量适当路径上的端到端数据包丢失率定位拥塞段的

实用方法. 基于断层扫描的叠加监测系统, 文献[3]通过监测路径基础集的数据包损失率来推断所有端到端路径的数据包的损失率, 从而根据已有的阈值确定发生故障的路径. 当网络拓扑结构为有向树时, 最小一致故障集原则^[4]将最接近根节点的链接指定为与观察到的坏路径模式一致的链接. 基于聚类技术的网络断层摄影方法, 文献[5]提出了一种通过沿多个路径的周期性端到端分组延迟测量在因特网上定位拥塞段的实用方法, 有效地解决了延迟变化之间的相关性.

近年来, 程代展教授提出了一种新的矩阵乘法, 矩阵半张量积^[6–12]. 它突破了传统矩阵乘法对矩阵维数的限制, 同时保持了普通矩阵乘法的性质. 矩阵半张量积的一个重要应用是它可以将逻辑表达式转化为

收稿日期: 2019–09–10; 录用日期: 2019–12–30.

[†]通信作者. E-mail: haitaoli09@gmail.com; Tel.: +86 15253130216.

本文责任编辑: 陈增强.

国家自然科学基金项目(61873150, 61503225), 山东省自然科学基金项目(JQ201613), 泰山学者青年专家计划项目(tsqn201909076)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (61873150, 61503225), the Natural Science Foundation of Shandong Province (JQ201613) and the Young Experts of Taishan Scholar Project (tsqn201909076).

等价的代数形式,从而方便人们使用矩阵来研究逻辑运算过程. 矩阵半张量积已经被成功地应用到有限自动机^[13-14]、Petri网^[15-16]、布尔网络^[17-22]、博弈论^[23-24]、移位寄存器^[25-26]、模糊控制^[27-28]等领域. 矩阵半张量积也被应用于电路和网络的故障诊断^[6-8]. 文献[6]中研究了布尔导数的计算方法并应用到组合电路的故障检测, 所给出的检测方法可以有效检测两个以上的故障. 文献[7]通过分析布尔控制网络的输入输出轨迹的完备性和 T 完备性给出了检测有意义故障的算法. 文献[8]使用矩阵半张量积工具通过求解逻辑方程确定有可能发生故障的链接.

本文研究互联网网络中的故障定位问题. 利用矩阵半张量积方法给出网络中路径的代数表示. 基于该代数表示, 将故障定位问题对应的逻辑方程转化为等价的代数方程. 通过分析代数方程的解, 确定网络中发生故障的链接. 使用矩阵半张量积方法与文献[2-5]相较而言可以更大限度地确定发生故障的链接, 只涉及矩阵运算便于使用MATLAB数学软件检验.

下面列出本文中用到的符号: $M_{m \times n}$ 表示 $m \times n$ 维实矩阵所组成的集合; \mathbb{N}^+ 表示正整数集合; $\text{Col}_j(A)$ 表示矩阵 A 的第 j 列; $\delta_n^j = \text{Col}_j(I_n)$, 其中 I_n 是单位矩阵; $\Delta_n = \{\delta_n^1, \delta_n^2, \dots, \delta_n^n\}$. 若矩阵 $M \in M_{m \times n}$ 满足 $\text{Col}(M) \subseteq \Delta_m$, 则称矩阵 M 为逻辑矩阵, 并且 $\mathcal{L}_{m \times n}$ 表示 $m \times n$ 维逻辑矩阵. $\mathbf{1}_k = \underbrace{[1 \ 1 \ \dots \ 1]}_k^T$.

2 预备知识

本文使用的主要工具为矩阵半张量积, 这里只介绍本文将会用到的矩阵半张量积的预备知识, 关于矩阵半张量积的详细知识请参照文献[8].

定义 1 对于给定的两个矩阵 $A \in M_{m \times n}$ 和 $B \in M_{p \times q}$, 矩阵 A, B 的半张量积记为 $A \ltimes B$, 定义为

$$A \ltimes B = (A \otimes I_{\frac{t}{n}})(B \otimes I_{\frac{t}{p}}), \quad (1)$$

其中: $t = \text{lcm}(n, p)$ 表示 n 和 p 的最小公倍数, \otimes 表示矩阵的Kronecker积.

注 1 当 $n = p$ 时矩阵半张量积即为普通矩阵乘法. 本文中, 在不引起混淆的情况下省略符号“ \ltimes ”.

下面给出换位矩阵的定义.

定义 2 换位矩阵 $W_{[m,n]}$ 为 $mn \times mn$ 维矩阵, 表示为

$$W_{[m,n]} = \delta_{mn}[1, m+1, \dots, (n-1)m+1, 2, m+2, \dots, (n-1)m+2, \dots, m, 2m, \dots, nm]. \quad (2)$$

换位矩阵的主要作用是交换两个列向量的位置.

引理 1 设 $X \in \mathbb{R}^m, Y \in \mathbb{R}^n$, 则

$$W_{[m,n]}XY = YX, W_{[n,m]}YX = XY. \quad (3)$$

引理 2 设 $\Phi_k = \text{diag}\{\delta_k^1, \delta_k^2, \dots, \delta_k^k\}$ 为 k 维阶矩阵, 若 $x \in \Delta_k$, 则 $x^2 = \Phi_k x$.

下面给出网络中链接、节点、路径的相关定义.

定义 3 一个网络由节点集 N 和链接集 L 组成, 其中节点集为 $N = \{A, B, C, \dots\}$, 链接集为 $L = \{a, b, c, \dots\}$, 则一个网络可以表示为一个对 (N, L) .

定义 4 在网络中, 路径指从起点到终点的全程路由, 即路径为从起点到终点经过所有链接的组合.

定义 5 没有自相交的路径称为合法路径, 否则称为非合法路径.

注 2 一个路径有两个端点, 如果路径 r 在节点 A 和 B 之间, 记为 $r = r(A, B)$.

注 3 一个链接若可通过则称为“好” ~ 1 , 向量形式为 δ_2^1 ; 若不能通过则称为“坏” ~ 0 , 向量形式为 δ_2^2 .

注 4 在计算路径的逻辑结构矩阵时只计算合法路径.

一个路径由许多链接组成, 下面将链接作为参数给出路径的代数形式.

如图1所示, 链接 a 和 b 并联, 则路径 $r(A, B) = a \vee b$, 它的代数形式为 $r(A, B) = M_{\vee}ab$, 其中 $M_{\vee} = \delta_2[1 \ 1 \ 1 \ 2]$.

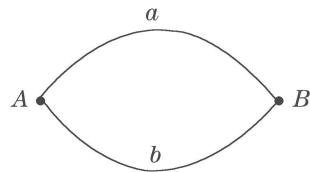


图1 并联结构

Fig. 1 Parallel structure

如图2所示, 链接 a 和 b 串联, 则路径 $r(A, B) = a \wedge b$, 它的代数形式为 $r(A, B) = M_{\wedge}ab$, 其中 $M_{\wedge} = \delta_2[1 \ 2 \ 2 \ 2]$.

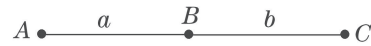


图2 串联结构

Fig. 2 Serial structure

如图3所示, 链接 a 和 b 先并联再和 c 串联, 则路径 $r(A, C) = (a \vee b) \wedge c$, 它的代数形式为 $r(A, C) = M_{\wedge}M_{\vee}abc = \delta_2[1 \ 2 \ 1 \ 2 \ 1 \ 2 \ 2 \ 2]abc$.

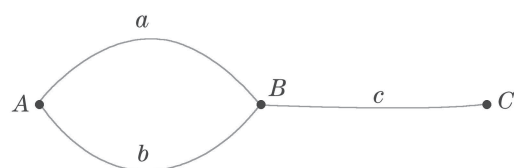


图3 串并联结构

Fig. 3 Serial-parallel structure

如图4所示, 链接 a, b, c, d, e 的并联和串联结构复杂, 容易看出从 A 到 D 有 4 条路径, 分别为: $a-d, b-e, a-c-e, b-c-d$, 则路径 $r(A, D) = (a \wedge d) \vee (b \wedge e) \vee (a \wedge c \wedge e) \vee (b \wedge c \wedge d)$, 它的代数形式为 $r(A, D) = M_{\vee}^3(M_{\wedge} ad)(M_{\wedge} be)(M_{\wedge}^2 ace)(M_{\wedge}^2 bcd) = M_4 abcde$,

其中

$$\begin{aligned} M_4 &= M_{\vee}^3 M_{\wedge} (I_4 \otimes M_{\wedge}) (I_{16} \otimes M_{\wedge}^2) (I_{128} \otimes M_{\wedge}^2) \\ & (I_2 \otimes W_{[2,8]}) \Phi_2 (I_2 \otimes W_{[64,2]}) (I_{128} \otimes \Phi_2) \\ & (I_4 \otimes W_{[2,2]}) (I_8 \otimes \Phi_2) (I_8 \otimes W_{[8,2]}) \\ & (I_4 \otimes W_{[2,2]}) (I_2 \otimes \Phi_2) (I_4 \otimes \Phi_2) = \\ & \delta_2 [1 \ 1 \ 1 \ 2 \ 1 \ 1 \ 1 \ 2 \ 1 \ 1 \ 1 \ 2 \ 1 \ 1 \ 2 \ 2 \\ & \quad 1 \ 1 \ 1 \ 2 \ 1 \ 2 \ 1 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2]. \end{aligned}$$

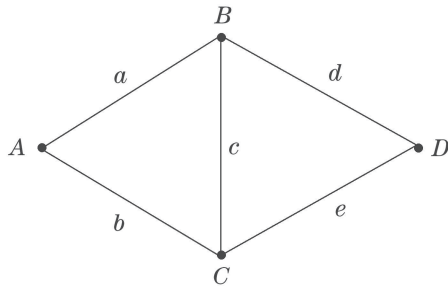


图 4 复合结构
Fig. 4 Composite structure

3 主要结果

3.1 一般树形网络

关于在矩阵半张量积框架下将逻辑方程转化为等价的代数方程, 通过分析代数方程的解来定位网络中故障链接的详细内容请参照文献 [8]. 本节主要讨论树形网络中故障链接的定位. 为了更精确地确定发生故障的链接位置, 沿用以下假设: 很多场合下, 故障并不是经常发生, 故障发生的概率很低, 即假设 1 [8].

假设 1 最有可能发生故障的情况为具有最少数量“坏”的链接的路径.

对于一般情况的树形网络, 即从单个源点到多个目的地的树状拓扑, 本文讨论最小一致故障集原则 [4].

下面给出树形网络及子节点和父节点的定义.

定义 6 树形网络 $T = (V, L)$ 中, V 为节点集, L 为链接集. 对 T 中的链接, 通常将在节点 k 处终止的链接称为链接 k . 根节点为 $\{0\}$, 记 $V \setminus \{0\} = U$.

定义 7 对于树形网络中的节点 i, k , 若 $k = f(i)$, 则 k 为 i 的父节点. 若 i 是 k 的一个后代, 则 $k = f^m(i)$ ($m \in \mathbb{N}^+$).

注 5 与 f 类似, 若 $k = \varphi(i)$, 称 k 为 i 的子节点.

定义 8 若某个节点 i 的测试结果为“好”, 则从根节点到节点 i 的路径完全由“好”的链接组成.

定义 9 若某个节点 i 的测试结果为“坏”, 但其父节点 $f(i)$ 为“好”, 称以 i 为根的子树为最大坏子树.

一般的树形网络中, 定位故障链接主要基于最小一致故障集原则 [4]: 若某个节点 i 的测试结果为“坏”, 当它没有子链接且父节点属性“好”时, 故障链接为链接 i ; 当它有子链接或者父节点为“坏”时, 故障链接为该节点的最大坏子树的根链接.

如图 5 所示为一个树形网络. 已知节点 a 处为“坏”, 由定义 9 知, 最大坏子树为 L_9 和 L_{10} , 由最小一致故障集原则得 L_6 发生故障. 下面使用矩阵半张量积方法说明最小一致故障集原则的有效性, 路径的逻辑形式为

$$\begin{aligned} r_a &= L_1 \wedge L_2 \wedge L_6 = \\ & M_{\wedge}^2 (I_8 \otimes \mathbf{1}_4^T) L_1 L_2 L_6 L_9 L_{10}, \end{aligned}$$

等价的代数方程为 $r_a = M_1 L$, 其中:

$$M_1 = \delta_2 [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ \underbrace{2 \ \dots \ 2}_{28}], \quad L = L_1 L_2 L_6 L_9 L_{10}.$$

由 $r_a = \delta_2^2$, 易知代数方程的解为 $\delta_{32}^5, \delta_{32}^6, \dots, \delta_{32}^{31}, \delta_{32}^{32}$, 对应的布尔表示分别为

$$\begin{aligned} & [1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1], [1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0], \dots, \\ & [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1], [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]. \end{aligned}$$

由于假设 1, 故障发生对应的解为 $[1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1]$, 即 L_6 发生故障, 结果与最小一致故障集原则相同.

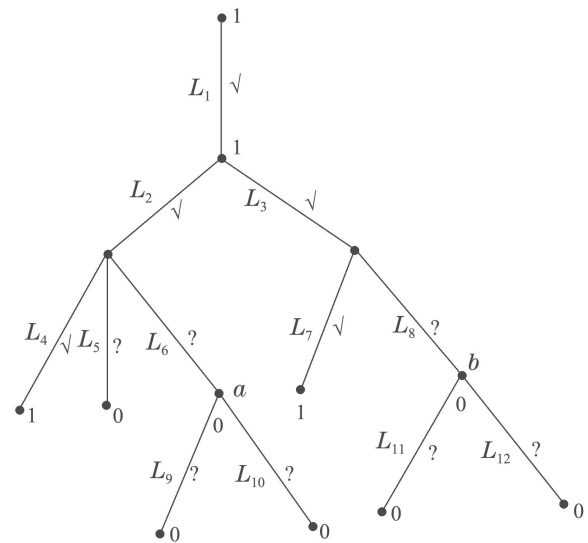


图 5 树形网络图
Fig. 5 Tree network

同样地, 对于节点 b 为“坏”的情形, 计算可得 L_8 为故障链接, 结果如图 6 所示.

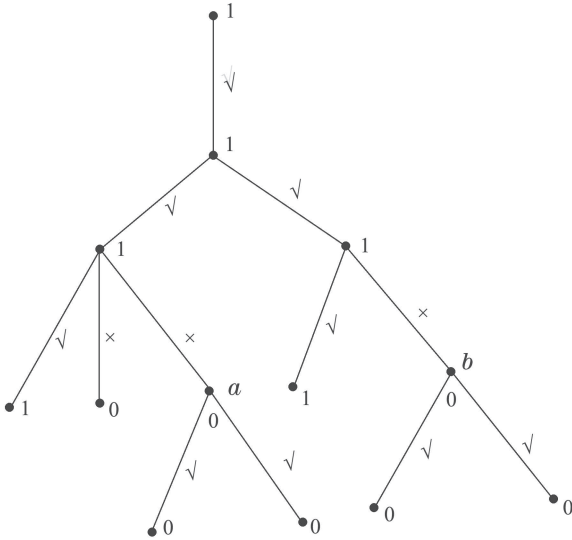


图6 图5中故障链接已确定的树形网络图

Fig. 6 Tree network with the fault link identified in Fig. 5

下面讨论任意层树形网络情况下的最小一致故障集原则。

首先对该网络中的所有链接进行编号, 以便于计算. 设树形网络有 n 层, 第 k ($k \leq n$)层从左至右共有 n_k 个节点, 相应的每层共有 n_k 个链接, 将每一层的节点从左至右编号为 k_1, k_2, \dots, k_{n_k} , 则它们分别对应的父节点为 $f(k_1), f(k_2), \dots, f(k_{n_k})$.

对于树形网络第 k 层第 m 个节点即第 k_m 个节点, 对应的父节点为 $f(k_m)$, 依次类推, 可得到节点 k_m 所有的父节点: $f(k_m), f^2(k_m), \dots, f^{k-1}(k_m)$. 不失一般性, 假设节点 k_m 对应的当前路径中参与到的所有子链接数量为 $n-k$, 分别记为 $L_{\varphi(k+1)}, L_{\varphi(k+2)}, \dots, L_{\varphi(n)}$. 经计算, 对应的代数方程为 $r = ML$, 其中:

$$M = \delta_2 \left[\underbrace{1 \ 1 \ \dots \ 1}_{2^{n-k}} \ \underbrace{2 \ 2 \ \dots \ 2}_{2^{n-k} \cdot (2k-1)} \right],$$

$$L = L_{f^{k-1}(k_m)} \dots L_{f(k_m)} L_{k_m} L_{\varphi(k+1)} \dots L_{\varphi(n)}.$$

链接 k_m 为“坏”, 故 $r = \delta_2^n$, 代数方程 $r = ML$ 的解为 $\delta_{2^{n-k+1}}^1, \delta_{2^{n-k+2}}^2, \dots, \delta_{2^n}^{2^n}$, 对应的布尔表示分别为 $[1 \ 1 \ \dots \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ \dots \ 1], [1 \ 1 \ \dots \ 1 \ 0 \ 1 \ \dots \ 1 \ 0], \dots, [0 \ 0 \ \dots \ 0]$. 由于假设1, 可以确定故障发生所对应的布尔表示为 $[1 \ 1 \ \dots \ 1 \ 0 \ 1 \ \dots \ 1]$, 即链接 k_m 为故障链接.

由此得到以下结论:

定理1 在任意层树形网络中, 定位故障链接的最小一致故障集原则是有效的.

注6 从以上的推导过程可以看出, 在任意层的树形网络中, 将路径的逻辑形式转化为代数方程, 通过求解代数方程并分析代数方程的解来确定故障链接是有效的.

3.2 汇集树网络

本部分把一般树形网络扩展到汇集树(sink tree)和汇集树组合的网络中, 即从多个源点到多个目的地的树状拓扑网络. 对于文献[2]中提出的通过从多个源到多个目的地测量适当路径上的端到端数据包丢失率定位拥塞段方法, 同样地用矩阵半张量积进行说明.

如图7所示, 链接 L_1, L_2, L_3 , 两个路径 P_1, P_2 分别从 o_1 至 d_3, o_2 至 d_3 , 故障发生时判断故障链接基于以下两个规则:

规则1 若路径 P_i 为“好”的同时 P_j ($i, j = 1, 2, i \neq j$)为“坏”, 则当链接 L_i 和 L_3 为“好”时, L_j 为“坏” ($i, j = 1, 2, i \neq j$);

规则2 若路径 P_1, P_2 同时为“坏”, 则链接 L_3 比 L_1, L_2 更容易“坏”.

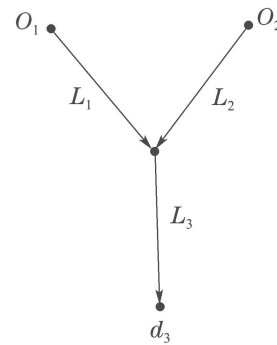


图7 一个简单的路径拓扑

Fig. 7 A simple path topology

逻辑方程为 $r = P_1 \vee P_2$, 其中 $P_1 = L_1 \wedge L_3, P_2 = L_2 \wedge L_3$, 则

$$\begin{aligned} r &= M_{\vee} (M_{\wedge} L_1 L_3) (M_{\wedge} L_2 L_3) = \\ &M_{\vee} M_{\wedge} (I_4 \otimes M_{\wedge}) (I_2 \otimes W_{[2,2]}) \cdot \\ &(I_4 \otimes \Phi_2) L_1 L_2 L_3, \end{aligned}$$

对应的代数方程为 $r = ML = \delta_2 [1 \ 2 \ 1 \ 2 \ 1 \ 2 \ 2 \ 2] \cdot L_1 L_2 L_3$.

规则1中, P_i 为“好”但同时 P_j ($i, j = 1, 2, i \neq j$)为“坏”, 则 r 为“好”, 即 $r = \delta_2^1$, 所以代数方程 $r = ML$ 的解为 $\delta_8^1, \delta_8^3, \delta_8^5$, 对应的布尔表示分别为 $[1 \ 1 \ 1], [1 \ 0 \ 1], [0 \ 1 \ 1]$. 由于假设1, 可以确定故障发生对应的布尔表示为 $[1 \ 0 \ 1], [0 \ 1 \ 1]$, 即当 L_i 和 L_3 为“好”时, L_j 为坏 ($i, j = 1, 2, i \neq j$), 说明规则1的正确性.

规则2中, 若 P_1, P_2 同时为“坏”, 则 r 为“坏”, 即 $r = \delta_2^2$, 所以代数方程 $r = ML$ 的解为 $\delta_8^2, \delta_8^4, \delta_8^6, \delta_8^7, \delta_8^8$, 对应的布尔表示分别为 $[1 \ 1 \ 0], [1 \ 0 \ 0], [0 \ 1 \ 0], [0 \ 0 \ 1], [0 \ 0 \ 0]$. 由于假设1, 可以确定故障发生对应的布尔表示为 $[1 \ 1 \ 0]$, 即 L_3 为故障链接, 说明规则2的正确性.

注 7 以上两个规则适用于具有任意层的汇集树网络.

定理 2 在汇集树网络中, 定位故障链接的两个规则是有效的.

下面通过例 1 说明矩阵半张量积方法相较于文献 [2] 的优越性.

例 1 如图 8 所示的网络图, L_1, L_2, L_3 为链接, P_1, P_2, P_3 表示 3 条路径.

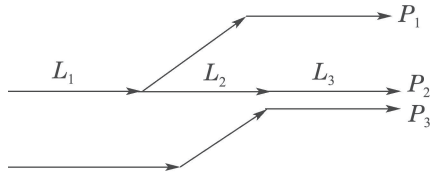


图 8 例 1 中的网络
Fig. 8 Network in Example 1

首先给出该网络的代数形式:

$$\begin{aligned} r_1 &= L_1 = (I_2 \otimes \mathbf{1}_4^T) L_1 L_2 L_3, \\ r_2 &= L_1 \wedge L_2 \wedge L_3 = M_{\wedge}^2 L_1 L_2 L_3, \\ r_3 &= L_3 = (\mathbf{1}_4^T \otimes I_2) L_1 L_2 L_3, \\ M_1 &= I_2 \otimes \mathbf{1}_4^T = \delta_2 [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2], \\ M_2 &= M_{\wedge}^2 = \delta_2 [1 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2], \\ M_3 &= \mathbf{1}_4^T \otimes I_2 = \delta_2 [1 \ 2 \ 1 \ 2 \ 1 \ 2 \ 1 \ 2]. \end{aligned}$$

故该网络的代数方程为 $r = ML$, 其中 $M = \delta_8 [1 \ 4 \ 3 \ 4 \ 7 \ 8 \ 7 \ 8]$, $L = L_1 L_2 L_3$.

i) 当 P_1 “好”, P_2 “坏”, P_3 “好” 时, $r = \delta_2^1 \delta_2^2 \delta_2^1 = \delta_8^3$, 代数方程 $r = ML$ 的解为 $L = \delta_8^3$, 对应的布尔表示为 $[1 \ 0 \ 1]$, 则故障链接为 L_2 .

ii) 当 P_1 “好”, P_2 “坏”, P_3 “坏” 时, $r = \delta_2^1 \delta_2^2 \delta_2^2 = \delta_8^4$, 代数方程 $r = ML$ 的解为 $L = \delta_8^2, \delta_8^4$, 对应的布尔表示分别为 $[1 \ 1 \ 0]$ 和 $[1 \ 0 \ 0]$. 由于假设 1, 可以确定故障发生对应的布尔表示为 $[1 \ 1 \ 0]$, 则 L_3 为故障链接.

iii) 当 P_1 “坏”, P_2 “坏”, P_3 “好” 时, $r = \delta_2^2 \delta_2^2 \delta_2^1 = \delta_8^7$, 代数方程 $r = ML$ 的解为 $L = \delta_8^5, \delta_8^7$, 对应的布尔表示分别为 $[0 \ 1 \ 1]$ 和 $[0 \ 0 \ 1]$. 由于假设 1, 可以确定故障发生对应的布尔表示为 $[0 \ 1 \ 1]$, 则故障链接为 L_1 .

iv) 当 P_1 “坏”, P_2 “坏”, P_3 “坏” 时, $r = \delta_2^2 \delta_2^2 \delta_2^2 = \delta_8^8$, 代数方程 $r = ML$ 的解为 $L = \delta_8^6, \delta_8^8$, 对应的布尔表示分别为 $[0 \ 1 \ 0]$ 和 $[0 \ 0 \ 0]$. 由于假设 1, 可以确定故障发生对应的布尔表示为 $[0 \ 1 \ 0]$, 则故障链接为 L_1, L_3 .

下面给出使用前文规则 1 与规则 2 和使用矩阵半张量积方法的比较, 如表 1 和表 2 所示, 其中: “√” 表示 “好”, “×” 表示 “坏”, “?” 表示无法确定该链接

是否发生故障. 通过表 1 与表 2 的比较, 可以清晰地看出, 由于故障并不是经常发生, 使用矩阵半张量积方法可以最大限度精确地确定发生故障的链接.

表 1 使用规则 1 和规则 2 判断故障链接^[2]

Table 1 Use rule 1 and rule 2 to determine faulty links^[2]

情况	P_1	P_2	P_3	L_1	L_2	L_3
1	√	×	√	√	×	√
2	√	×	×	√	?	×
3	×	×	√	×	?	√
4	×	×	×	?	√	?

表 2 使用矩阵半张量积方法判断故障链接

Table 2 Use semi-tensor product of matrices method to determine faulty links

情况	P_1	P_2	P_3	L_1	L_2	L_3
1	√	×	√	√	×	√
2	√	×	×	√	√	×
3	×	×	√	×	√	√
4	×	×	×	×	√	×

注 8 最小一致故障集原则和规则 1 与规则 2 的分析推导过程中, 通过将逻辑方程转化为对应的代数方程并分析代数方程的解, 可以确定一般的树形网络和汇集树网络中发生故障的链接, 所使用的矩阵半张量积方法不仅便于计算, 而且确定发生故障的链接更精确.

3.3 一般网络

使用矩阵半张量积方法可以定位一般网络中的故障链接. 下面用一个例子来进行说明.

如图 9 所示为一个局域网, $A - G$ 表示路由器接口, $a - h$ 表示路径, 根据数据包丢失率检测并与阈值比较知, E, F, G 的状态分别为 “好”、“坏”、“坏”, 下面用矩阵半张量积方法确定发生故障的位置.

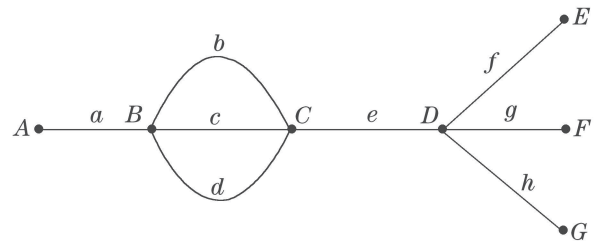


图 9 一个简单的局域网
Fig. 9 A simple local network

首先给出该局域网的代数形式:

$$\begin{aligned} r_1 &= a \wedge (b \vee c \vee d) \wedge e \wedge f = \\ &M_{\wedge}^3 (I_2 \otimes M_{\vee}^2) (I_{2^6} \otimes \mathbf{1}_4^T) abcdefgh, \end{aligned}$$

$$r_2 = a \wedge (b \vee c \vee d) \wedge e \wedge g =$$

$$M_{\wedge}^3(I_2 \otimes M_{\vee}^2)[I_{2^5} \otimes (\mathbf{1}_2^T \otimes I_2 \otimes \mathbf{1}_2^T)]abcdefgh,$$

$$r_3 = a \wedge (b \vee c \vee d) \wedge e \wedge h =$$

$$M_{\wedge}^3(I_2 \otimes M_{\vee}^2)(I_{2^5} \otimes \mathbf{1}_4^T \otimes I_2)abcdefgh.$$

所以该网络的代数形式为 $r = ML$, 其中: $M = \delta_8 \left[\underbrace{p \cdots p}_7 \quad \underbrace{8 \cdots 8}_{144} \right]$, p 表示长度为16的一组数, $p = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8\}$, $L = abcdefgh$.

根据测试结果得 $r = \delta_8^4$, 所以代数方程 $r = ML$ 的解为 $\delta_{28}^4, \delta_{28}^{20}, \delta_{28}^{36}, \delta_{28}^{52}, \delta_{28}^{68}, \delta_{28}^{84}, \delta_{28}^{100}$, 对应的布尔表示分别为

$$\begin{aligned} & [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0], [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0], \\ & [1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0], [1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0], \\ & [1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0], [1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0], \\ & [1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0]. \end{aligned}$$

由假设1, 故障发生对应的解为 $[1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0]$, 即链接 g 和 h 发生故障。

因此, 矩阵半张量积方法不仅可以在一般的树形网络和汇集树网络中定位故障链接, 在一般的网络中也同样适用。

4 结论

本文研究了互联网网络中故障位置定位问题. 基于矩阵的半张量积理论, 给出了网络中路径的代数表示. 基于该代数表示, 通过将故障定位问题对应的逻辑方程转化为等价的代数方程, 通过分析代数方程的解, 给出了一般树形网络和汇集树网络拓扑结构中确定发生故障的链接. 通过数值算例比较发现, 本文所提出的矩阵半张量积方法比原有方法更精确. 此外, 本文还将所得的理论结果在一般网络中进行说明, 充分展示了利用矩阵半张量积求解逻辑方程定位故障位置的有效性. 未来的工作将考虑如何使用矩阵半张量积方法研究随机因素影响下网络故障定位问题, 给出更易检验的方法.

参考文献:

- [1] TANG Y, ALSHAER E, BOUTABA R. Efficient fault diagnosis using incremental alarm correlation and active investigation for internet and overlay networks. *IEEE Transactions on Network and Service Management*, 2008, 5(1): 36 – 49.
- [2] TACHIBANA A, ANO A, HASEGAWA T, et al. Empirical study on locating congested segments over the Internet based on multiple end-to-end path measurements. *Proceedings of the 2005 Symposium on Applications and the Internet*. Trento, Italy: IEEE, 2005, DOI: 10.1109/SAINT.2005.26.
- [3] CHEN Y, BINDEL D, SONG H, et al. Algebra-based scalable overlay network monitoring: algorithms, evaluation, and applications.

IEEE/ACM Transactions on Networking, 2007, 15(5): 1084 – 1097.

- [4] DUFFIEL N. Simple network performance tomography. *Proceedings of the 3rd ACM SIGCOMM Conference on Internet Measurement*. New York, USA: ACM, 2003: 210 – 215.
- [5] TACHIBANA A, ANO S, HASEGAWA T, et al. Locating congested segments on the Internet by clustering the delay performance of multiple paths. *The 2007 IEEE International Conference on Communications*. Glasgow, UK: IEEE, 2007, DOI: 10.1109/ICC.2007.56.
- [6] LI H, WANG Y. Boolean derivative calculation with application to fault detection of combinational circuits via the semi-tensor product method. *Automatica*, 2012, 48(4): 688 – 693.
- [7] FORNASINI E, VALCHER M E. Fault detection analysis of Boolean control networks. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2015, 60(10): 2734 – 2739.
- [8] CHENG D, QI H, LI Z. *Analysis and Control of Boolean Networks: A Semi-tensor Product Approach*. London: Springer, 2011.
- [9] LU J, LI H, LIU Y, et al. Survey on semi-tensor product method with its applications in logical networks and other finite-valued systems. *IET Control Theory & Applications*, 2017, 11(13): 2040 – 2047.
- [10] CHENG D, QI H. State-space analysis of Boolean networks. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2010, 21(4): 584 – 594.
- [11] CHENG Daizhan, QI Hongsheng. Algebraic state space approach to logical dynamic systems and its applications. *Control Theory & Applications*, 2014, 31(12): 1632 – 1639. (程代展, 齐洪胜. 逻辑系统的代数状态空间方法的基础、现状及其应用. *控制理论与应用*, 2014, 31(12): 1632 – 1639.)
- [12] LI H, ZHAO G, MENG M, et al. A survey on applications of semi-tensor product method in engineering. *Science China Information Sciences*, 2018, 61(1): 010202.
- [13] XU X, HONG Y. Matrix expression and reachability analysis of finite automata. *Journal of Control Theory and Applications*, 2012, 10(2): 210 – 215.
- [14] YAN Y, CHEN Z, LIU Z. Semi-tensor product approach to controllability and stabilizability of finite automata. *Journal of Systems Engineering and Electronics*, 2015, 26(1): 134 – 141.
- [15] HAN Xiaoguang, CHEN Zengqiang, LIU Zhongxin, et al. Calculation of siphons and traps in Petri nets using semi-tensor product of matrices. *Control Theory & Applications*, 2016, 33(7): 849 – 855. (韩晓光, 陈增强, 刘忠信, 等. Petri网信标和陷阱计算的矩阵半张量积方法. *控制理论与应用*, 2016, 33(7): 849 – 855.)
- [16] HAN X, CHEN Z, LIU Z, et al. Calculation of siphons and minimal siphons in petri nets based on semi-tensor product of matrices. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2017, 47(3): 531 – 536.
- [17] FU S, ZHAO J, WANG J. Input-output decoupling control design for switched Boolean control networks. *Automatica*, 2018, 355(17): 8576 – 8596.
- [18] SONG Pingping, LI Haitao, YANG Qiqi, et al. Pinning output tracking control of multi-valued logical networks. *Control Theory & Applications*, 2016, 33(9): 1200 – 1206. (宋平平, 李海涛, 杨琪琪, 等. 多值逻辑网络的输出跟踪牵制控制. *控制理论与应用*, 2016, 33(9): 1200 – 1206.)
- [19] HAN Ji, ZHANG Huaguang, TIAN Hui. Complete synchronization of the periodically time-variant Boolean networks. *Control Theory & Applications*, 2016, 33(7): 863 – 869. (韩吉, 张化光, 田辉. 周期时变布尔网络的完全同步化. *控制理论与应用*, 2016, 33(7): 863 – 869.)
- [20] FORNASINI E, VALCHER M E. Observability, reconstructibility and state observers of Boolean control networks. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, 58(6): 1390 – 1401.
- [21] LI F, TANG Y. Set stabilization for switched Boolean control networks. *Automatica*, 2017, 78: 223 – 230.

- [22] ZHONG J, LU J, HUANG T, et al. Controllability and synchronization analysis of identical-hierarchy mixed-valued logical control networks. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2017, 47(11): 3482 – 3493.
- [23] CHENG Daizhan, FU Shihua. A survey on game theoretical control. *Control Theory & Applications*, 2018, 35(5): 588 – 592.
(程代展, 付世华. 博弈控制论简述. 控制理论与应用, 2018, 35(5): 588 – 592.)
- [24] WU Y, TOYODA M, SHEN T. Linear dynamic games with polytope strategy sets. *IET Control Theory & Applications*, 2017, 11(13): 2146 – 2151.
- [25] LU J, LI M, LIU Y, et al. Nonsingularity of grain-like cascade FSRs via semi-tensor product. *Science China Information Sciences*, 2018, 61(1): 010204.
- [26] ZHONG J, LIN D. Decomposition of nonlinear feedback shift registers based on Boolean networks. *Science China Information Sciences*, 2019, 62(3): 039110.
- [27] FENG J, LV H, CHENG D. Multiple fuzzy relation and its application to coupled fuzzy control. *Asian Journal of Control*, 2013, 15(5): 1313 – 1324.
- [28] YAN Y, CHEN Z, LIU Z. Solving type-2 fuzzy relation equations via semi-tensor product of matrices. *Control Theory and Technology*, 2014, 12(2): 173 – 186.

作者简介:

刘玉娜 硕士研究生, 目前研究方向为逻辑动态系统, E-mail: yunaliu47@163.com;

李海涛 教授, 博士生导师, 目前研究方向为有限值动态系统, E-mail: haitaoli09@gmail.com.