

基于受控拉格朗日函数的永磁同步电动机控制器设计

李茂青[†], 刘建强, 高锋阳, 张廷荣

(兰州交通大学 自动化与电气工程学院, 甘肃 兰州 730070)

摘要: 本文将基于受控拉格朗日函数(CL)的控制器设计方法应用到高阶、强耦合、非线性的永磁同步电动机(PMSM)的控制问题中. 利用期望的受控能量来构造受控拉格朗日函数, 并在广义力中引入速度一次项的保守力, 得到原始方程与受控方程相匹配的条件. 通过求解匹配条件中的偏微分方程, 得到的非线性光滑反馈控制律可同时实现位置与速度的全局渐近镇定. 最后, 利用LaSalle不变定理对其进行证明. 仿真结果表明了控制律的有效性.

关键词: 永磁同步电动机; 受控拉格朗日函数法; 欠驱动力学系统; 位置与速度镇定

引用格式: 李茂青, 刘建强, 高锋阳, 等. 基于受控拉格朗日函数的永磁同步电动机控制器设计. 控制理论与应用, 2020, 37(6): 1406 – 1412

DOI: 10.7641/CTA.2020.90786

Stabilization controller design of permanent magnet synchronous motor based on controlled Lagrangians

LI Mao-qing[†], LIU Jian-qiang, GAO Feng-yang, ZHANG Ting-rong

(Department of Automation and Electrical Engineering, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou Gansu 730070, China)

Abstract: In this paper, the controller design method based on the controlled Lagrangians (CL) is applied to control a high-order, strong coupled, nonlinear permanent magnet synchronous motor (PMSM). The CL is constructed by using the desired controlled energy, and the conservative force of the velocity term is introduced into the generalized force to obtain the matching condition of the original equations and the controlled equations. By solving the partial differential equations in the matching condition, we develop a nonlinear smooth feedback control law which ensures the global asymptotic stability of position and velocity simultaneously. Finally, the LaSalle invariance theorem is used to prove the stability. The simulation results show the effectiveness of the control law.

Key words: permanent magnet synchronous motor; controlled Lagrangians; underactuated mechanical systems; position and velocity stabilization

Citation: LI Maoqing, LIU Jianqiang, GAO Fengyang, et al. Stabilization controller design of permanent magnet synchronous motor based on controlled Lagrangians. *Control Theory & Applications*, 2020, 37(6): 1406 – 1412

1 引言

永磁同步电动机(permanent magnet synchronous motor, PMSM)具有结构简单、高效率、高气隙磁通密度和高功率因数等优点而被广泛地应用在国防、工业以及社会生活的各个领域, 如航空装备、火炮、数控机床以及医疗等^[1]. 因此, 研究与改善交流PMSM伺服系统的控制策略具有重要的理论意义和实用价值.

PMSM为高阶、强耦合及非线性系统, 传统的线性控制策略无法解决输入与输出的耦合以及输出的独立性控制等问题, 无法满足高性能调速系统的控制要

求. 因此, 国内外学者对非线性控制理论进行了广泛深入的研究, 取得了一定的成果. 应用到PMSM系统中的非线性控制理论主要有: 滑模变结构控制^[2-3]、反馈线性化^[4]、反步法^[5]、自抗扰技术^[6]、及无源控制理论^[7-8]等, 这些非线性理论的应用极大的改进了系统的动静态性能. 文献[3]提出了一种实时改进的滑模控制器, 可实现整个伺服系统的稳态控制, 但滑模控制多次的开关切换可能激活系统未建模的高频成分, 从而导致系统失稳^[9]. 文献[4]利用反馈线性化理论对PMSM进行全局线性化与解耦, 并将线性化与解耦的

收稿日期: 2019-09-19; 录用日期: 2020-01-18.

[†]通信作者. E-mail: limq@mail.lzjtu.cn; Tel.: +86 13669306532.

本文责任编辑: 武玉强.

国家重点研发计划项目(2018YFB1201602-06), 国家自然科学基金地区项目(61164010)资助.

Supported by the National Key Research and Development Program of China (2018YFB1201602-06) and the National Natural Science Foundation Regional Project of China (61164010).

电机模型写成可观测的Brunovski标准形,从而可有效地确定出系统的控制结构;缺点是所有的状态变量都必须精确测量,才可抵消非线性因素^[10].文献[5]提出了一种改进的反步控制器,该控制器可提高速度的动态响应,实现良好的速度跟踪;缺点是无法对转子磁链进行有效的位置跟踪^[10].文献[6]针对PMSM系统内部参数摄动和外界干扰的问题,运用自抗扰控制来对参数摄动和外界干扰进行观测和前馈补偿,实现了系统的线性化,提高了系统的抗干扰能力;缺点是参数的选取较多,与之对应的取值会影响系统控制性能^[9].文献[7-8]将端口受控的哈密顿理论应用到PMSM系统中,利用互联和阻尼分配无源控制方法来设计系统控制器,提高了系统的动态响应,实现了全局的稳定;不足之处是没有实现位置控制.文献[11-12]通过在受控哈密顿系统中引入积分作用的动力学反馈、陀螺力和阻尼力,实现了一般哈密顿系统的鲁棒控制.若选择合适的陀螺力和阻尼力注入,则系统的动静态性能将会进一步提高.文献[13]将互联和阻尼配置的无源控制(interconnection and damping assignment-passivity based control, IDA-PBC)以最优控制的观点来研究如何调整IDA-PBC的参数,使其控制性能达到最佳.

本文将利用基于系统的电磁能和机械能来构造控制器设计技术—受控拉格朗日函数(controlled Lagrangians, CL)法^[14].该方法已发展为与端口受控的耗散哈密顿系统数学上等价的方法^[15],两者相比,CL法的数学形式更简单、物理意义更明确、易理解.CL法从欠驱动力学系统角度来分析PMSM系统,使受控系统从形式上保持拉格朗日力学结构,得到光滑非线性反馈控制律,具有较大收敛范围,并且有助于实现CL法鲁棒控制和最优控制.与文献[8]相比,本文得到的光滑非线性反馈控制律可同时实现位置与速度的全局渐近镇定,而文献[8]却没有实现.

2 符号介绍

本文为书写方便,将首次出现的函数和矩阵注明自变量,下文再出现时将省略. \mathbb{N}_n 表示前 n 个自然数;对于 $i \in \mathbb{N}_n$,定义集合 $\mathbb{N}_i = \{1, \dots, i\}$;用 $x(q)$ 表示向量 $q = [q_1 \ q_2 \ q_3]^T$ 的函数, y_i 表示函数向量 $Y(q): \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 的第 i 个分量,其中: $i \in \mathbb{N}_3$; Z_{jk} 表示函数矩阵 $Z(q)$ 的第 j 行第 k 列的元素, Z_{j0} 和 Z_{0k} 表示其第 j 个行向量和第 k 个列向量; I 表示三阶单位矩阵,并定义如下符号:

$$x_{,i} = \frac{\partial x(q)}{\partial q_i}, \quad Z_{,i} = \begin{bmatrix} Z_{11,i} & Z_{12,i} & Z_{13,i} \\ Z_{21,i} & Z_{22,i} & Z_{23,i} \\ Z_{31,i} & Z_{32,i} & Z_{33,i} \end{bmatrix},$$

$$\partial_q x = \begin{bmatrix} x_{,1} \\ x_{,2} \\ x_{,3} \end{bmatrix}, \quad \partial_{q^T} Y = \begin{bmatrix} y_{1,1} & y_{1,2} & y_{1,3} \\ y_{2,1} & y_{2,2} & y_{2,3} \\ y_{3,1} & y_{3,2} & y_{3,3} \end{bmatrix}.$$

对于同时具有上下标的符号,实行上标优先原则.

3 PMSM数学模型

设PMSM系统的广义坐标为 $q = [q_1 \ q_2 \ q_3]^T$,其中: q_1, q_2 分别为 d 轴和 q 轴的电感电荷, q_3 为电动机机械角位移;广义速度坐标为 $\dot{q} = [\dot{q}_1 \ \dot{q}_2 \ \dot{q}_3]^T$,其中: \dot{q}_1, \dot{q}_2 分别为 d 轴和 q 轴的电感电流, \dot{q}_3 表示机械角速度; $u = [u_1 \ u_2 \ 0]^T$ 为 d 轴和 q 轴的原始控制输入,并且 $u = O(q)v$,其中输入耦合矩阵 $O = [I_{o1} \ I_{o2}]$, $v \in \mathbb{R}^2$,

假设PMSM系统产生的磁动势沿气隙圆周按正弦规律分布;磁路线性且不考虑磁路饱和;忽略系统的涡流、磁滞损耗,则PMSM系统在两相旋转 d - q 坐标系下的原始方程^[10]为

$$\begin{bmatrix} L_1 & 0 & 0 \\ 0 & L_2 & 0 \\ 0 & 0 & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -n_p L_2 \dot{q}_2 \\ 0 & 0 & n_p L_1 \dot{q}_1 \\ n_p L_2 \dot{q}_2 & -n_p L_1 \dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R & 0 & 0 \\ 0 & R & n_p \psi_0 \\ 0 & -n_p \psi_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ T_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

式中: L_1, L_2 分别为定子 d 轴及 q 轴上的电感分量; J 为系统的转动惯量; $T_L = T_1 + T'_L$ 为负载转矩,其中: T_1 表示空载转矩与电机外加负载转矩之和, $T'_L = Hq_3$ 表示电机与机械负载之间用相对较长的轴连接时产生的扭转矩,其中 H 为变形系数; n_p 为极对数; ψ_0 为永磁体.

式(1)可简写为

$$M\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + C_0\dot{q} + \partial_q E_p = u, \quad (2)$$

期望系统在平衡点 $(q^T, \dot{q}^T) = (q_d^T, 0^T)$ 处稳定.系统的控制输入必须满足 $\bar{O}u = 0$,其中 $\bar{O} \in (O^\perp)^T$,且 $(O^\perp)^T O = 0$,故 $\bar{O} = [0 \ 0 \ 1]$.

4 基于受控拉格朗日函数的PMSM系统控制器设计

4.1 构造受控能量和广义力

根据式(2),将线圈绕组和永磁体产生的电磁能与转子产生的动能两者之和作为系统的受控动能: $\bar{E}_k(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^T \bar{M}(q)\dot{q}$,其中: $\bar{M} \triangleq MK^{-1}(q)M$, $K = K^T$ 且 $|K| \neq 0$.将负载转矩产生的机械能作为系统的受控势能: $\bar{E}_p(q): \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$.广义力 $\bar{u} \in \mathbb{R}^3$,则系统的受控拉格朗日函数 $\bar{L}(q, \dot{q})$ 和受控能量 \bar{E} 如下所示:

$$\begin{cases} \bar{L} = \bar{E}_k - \bar{E}_p, \\ \bar{E} = \bar{E}_k + \bar{E}_p, \end{cases} \quad (3)$$

则根据 \bar{L} 和 \bar{u} 确定的受控方程为

$$\bar{u} = \bar{M}\ddot{q} + \partial_{q^T}(\bar{M}\dot{q})\dot{q} - \frac{1}{2}\partial_q(\dot{q}^T\bar{M}\dot{q}) + \partial_q\bar{E}_p. \quad (4)$$

由式(3)–(4)可得

$$\dot{\bar{E}} = \frac{d}{dt}[\dot{q}^T \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{q}} - \bar{L}] = \dot{q}^T \bar{u}. \quad (5)$$

系统的广义力包括两部分,即保守力 $G(q, \dot{q})\dot{q}$ 和耗散力 $-D(q)\dot{q}$,其中耗散矩阵 $D = D^T \geq 0$,保守力矩阵 $G = -G^T$, G 矩阵的各元素如下:

$$\begin{cases} G_{12} = g_1\dot{q}_1 + g_2\dot{q}_2 + g_3\dot{q}_3 + g_{10}, \\ G_{13} = g_4\dot{q}_1 + g_5\dot{q}_2 + g_6\dot{q}_3 + g_{11}, \\ G_{23} = g_7\dot{q}_1 + g_8\dot{q}_2 + g_9\dot{q}_3 + g_{12}, \end{cases} \quad (6)$$

其中: g_1, \dots, g_9 为关于 q 的函数, g_{10}, g_{11}, g_{12} 为常数.

注1 由于原始系统中存在 $C_0\dot{q}$ 项,为与之匹配,在保守力矩阵 G 的各元素中引入常数项 g_{10}, g_{11} 和 g_{12} 构成速度一次项的保守力.

对于式(5),当广义力 $\bar{u} = (G - D)\dot{q}$ 时,则有

$$\dot{\bar{E}} = \dot{q}^T(G - D)\dot{q} \leq 0, \quad (7)$$

即PMSM系统的受控能量是衰减的.

给式(4)两端同时左乘 $M\bar{M}^{-1} \triangleq N(q)$ 可得

$$N\bar{u} = M\ddot{q} + N[\partial_{q^T}(\bar{M}\dot{q})\dot{q} - \frac{1}{2}\partial_q(\dot{q}^T\bar{M}\dot{q}) + \partial_q\bar{E}_p]. \quad (8)$$

由式(2)和式(8)可得原始控制输入 u 和广义力 \bar{u} 的如下关系:

$$u = (C + C_0)\dot{q} - N[\partial_{q^T}(\bar{M}\dot{q})\dot{q} - \frac{1}{2}\partial_q(\dot{q}^T\bar{M}\dot{q})] - N\partial_q\bar{E}_p + \partial_q E_p + N\bar{u}. \quad (9)$$

根据式(9)和文献[14]的式(9)–(14)可得

$$u = -\frac{1}{2}N(I_{o1}\dot{q}^T T^{(1)} + I_{o2}\dot{q}^T T^{(2)} + I_{o3}\dot{q}^T T^{(3)})\dot{q} + (C + C_0)\dot{q} + N(\bar{u} - \bar{G}\dot{q}) - N\partial_q\bar{E}_p + \partial_q E_p, \quad (10)$$

其中 $T^{(i)} = MK_i^{-1}M, i \in N_3$.

4.2 确定匹配条件

如果受控方程式(4)与原始方程式(2)相匹配,则由式(9)确定的控制输入是成立的,即 $u_3 = 0$ 对任意的 (q, \dot{q}) 都成立.

定义与 G 矩阵形式相同的矩阵 $\hat{G}(q, \dot{q})$:

$$\hat{G}(q, \dot{q}) \triangleq G(q, \dot{q}) - \bar{G}(q, \dot{q}), \quad (11)$$

其中 $\hat{G}(q, \dot{q})$ 定义了类似于 g_1, \dots, g_{12} 的函数 $\hat{g}_1, \dots, \hat{g}_{12}$.

将 $\bar{u} = (G - D)\dot{q}$ 和式(11)代入到式(10)可得

$$u = -\frac{1}{2}N(I_{o1}\dot{q}^T T^{(1)} + I_{o2}\dot{q}^T T^{(2)} + I_{o3}\dot{q}^T T^{(3)})\dot{q} + (C + C_0)\dot{q} + N(\hat{G} - D)\dot{q} - N\partial_q\bar{E}_p + \partial_q E_p. \quad (12)$$

令 $\bar{N} \triangleq \bar{O}N$.用行向量 \bar{O} 左乘式(12)并恒取零,可得系统的匹配条件如下:

$$0 = \bar{N}_1 T_{11}^{(1)} + \bar{N}_2 T_{11}^{(2)} + \bar{N}_3(T_{11}^{(3)} + 2\hat{g}_4) + 2\bar{N}_2 \hat{g}_1, \quad (13)$$

$$0 = \bar{N}_1 T_{22}^{(1)} + \bar{N}_2 T_{22}^{(2)} + \bar{N}_3(T_{22}^{(3)} + 2\hat{g}_8) - 2\bar{N}_1 \hat{g}_2, \quad (14)$$

$$0 = \bar{N}_1 T_{33}^{(1)} + \bar{N}_3 T_{33}^{(3)} + \bar{N}_2(T_{33}^{(2)} - 2\hat{g}_9) - 2\bar{N}_1 \hat{g}_6, \quad (15)$$

$$0 = \bar{N}_1 T_{12}^{(1)} + \bar{N}_2 T_{12}^{(2)} + \bar{N}_3 T_{12}^{(3)} - \bar{N}_1 \hat{g}_1 + \bar{N}_2 \hat{g}_2 + \bar{N}_3(\hat{g}_5 + \hat{g}_7) + n_p(L_1 - L_2), \quad (16)$$

$$0 = \bar{N}_1 T_{13}^{(1)} + \bar{N}_2 T_{13}^{(2)} + \bar{N}_3 T_{13}^{(3)} - \bar{N}_1 \hat{g}_4 + \bar{N}_3 \hat{g}_6 + \bar{N}_2(\hat{g}_3 - \hat{g}_7), \quad (17)$$

$$0 = \bar{N}_1 T_{23}^{(1)} + \bar{N}_2 T_{23}^{(2)} + \bar{N}_3 T_{23}^{(3)} - \bar{N}_2 \hat{g}_8 + \bar{N}_3 \hat{g}_9 - \bar{N}_1(\hat{g}_5 + \hat{g}_3), \quad (18)$$

$$0 = \bar{N}_1 \bar{E}_{p,1} + \bar{N}_2 \bar{E}_{p,2} + \bar{N}_3 \bar{E}_{p,3} - E_{p,3}, \quad (19)$$

$$0 = \bar{N}_1 D_{11} + \bar{N}_2 D_{21} + \bar{N}_3 D_{31} + \bar{N}_2 \hat{g}_{10} + \bar{N}_3 \hat{g}_{11}, \quad (20)$$

$$0 = \bar{N}_1(\hat{g}_{10} - D_{12}) - \bar{N}_2 D_{22} - \bar{N}_3(D_{32} + \hat{g}_{12}) - n_p \psi_0, \quad (21)$$

$$0 = \bar{N}_1(\hat{g}_{11} - D_{13}) + \bar{N}_2(\hat{g}_{12} - D_{23}) - \bar{N}_3 D_{33}. \quad (22)$$

方程(13)–(18)因只和动能相关,故被称为动能方程(K方程).同理,式(19)被称为势能方程(P方程).对式(13)–(18)分别乘以 $\bar{N}_1^2, \bar{N}_2^2, \bar{N}_3^2, 2\bar{N}_1\bar{N}_2, 2\bar{N}_1\bar{N}_3, 2\bar{N}_2\bar{N}_3$ 后求和,可得一个与保守力项无关的K方程:

$$2\bar{N}_1\bar{N}_2n_p(L_1 - L_2) = \bar{O}[\sum_{i \in N_3} \bar{N}_i K_{i,i}] \bar{O}^T. \quad (23)$$

受控动能矩阵 K 的正则条件为 $|K| \neq 0$.若 $\bar{N}_1, \bar{N}_2, \bar{N}_3$ 都为零时,则根据 N, \bar{M} 的定义可得 $|K| = 0$.因此 \bar{N}_1, \bar{N}_2 和 \bar{N}_3 不可同时为零.后文为求解方便,选取 $\bar{N}_3 \neq 0$.

对式(20)–(22)分别乘以 $-\bar{N}_1, \bar{N}_2, \bar{N}_3$ 后求和,可得

$$0 = \bar{N}D\bar{N}^T + \bar{N}_2n_p\psi_0. \quad (24)$$

综上所述,将式(13)–(22)以及 $|K| \neq 0$ 合起来即为受控方程与原始方程匹配的条件.

注2 式(19)(23)为偏微分方程,与保守力项有关的方程(13)–(18)以及式(20)–(22)为线性代数方程组.因此,先求解难解的偏微分方程,后面求解代数方程.

4.3 确定匹配控制器

令 $(O^T O)^{-1} O^T \triangleq \hat{O}$, $\hat{O} N \triangleq \hat{N}$. 用 \hat{O} 左乘式(12)可得PMSM输入耦合的匹配控制器:

$$v = -\frac{1}{2} \dot{q}^T (\hat{N}_{a1} T^{(1)} + \hat{N}_{a2} T^{(2)} + \hat{N}_{a3} T^{(3)}) \dot{q} + \hat{O}_{a1} C_{13} \dot{q}_3 + n_p \psi_0 (\hat{O}_{a2} \dot{q}_3 - \hat{O}_{a3} \dot{q}_2) + \hat{O}_{a2} C_{23} \dot{q}_3 + (\hat{O}_{a1} \dot{q}_1 + \hat{O}_{a2} \dot{q}_2) R - (\hat{N}_{a2} \hat{G}_{12} + \hat{N}_{a3} \hat{G}_{13}) \dot{q}_1 + \hat{N}_{a1} \hat{G}_{13} \dot{q}_3 + (\hat{N}_{a1} \hat{G}_{12} - \hat{N}_{a3} \hat{G}_{23}) \dot{q}_2 + \hat{N}_{a2} \hat{G}_{23} \dot{q}_3 - (\hat{N}_{a1} D_{11} + \hat{N}_{a2} D_{21} + \hat{N}_{a3} D_{31}) \dot{q}_1 - \hat{N} \partial_q \bar{E}_p - (\hat{N}_{a1} D_{12} + \hat{N}_{a2} D_{22} + \hat{N}_{a3} D_{32}) \dot{q}_2 + \hat{O} \partial_q E_p - (\hat{N}_{a1} D_{13} + \hat{N}_{a2} D_{23} + \hat{N}_{a3} D_{33}) \dot{q}_3. \quad (25)$$

5 求解匹配条件

对于PMSM系统, 第 a 个自由度有控制输入作用 ($u_a \neq 0$); 第 3 个自由度无控制输入作用 ($u_3 = 0$), 故 $a \in N_2$. 相应地, 并将前面文中出现的一些符号变为

$$\hat{O} = O^T, \bar{N} = N_{30}, O_{a0} \hat{N} = N_{a0}. \quad (26)$$

引入函数向量 $\Gamma^T = -N_{30}/N_{33}$. 由 N, \bar{M} 的定义可得 $K_{30} = -N_{33} \Phi^T(q)$, 其中 $\Phi^T = [\Phi_1 \ \Phi_2 \ \Phi_3] = \Gamma^T M$, 相应地有 $K_{3a} = K_{33} \Phi_a / \Phi_3$. 为保证 $K > 0$, 通常选取 $K_{aa} = K_{33} [k_a \Phi_a^2 + k_{a+n} \Phi_3^2] / \Phi_3^2$, 其中 k_a, k_{a+n} 为常数.

用 Γ, K_{33} 以及 \bar{E}_p 表示的 K 方程和 P 方程以及与耗散力相关的方程如下所示:

$$\sum_{i \in N_3} T_i K_{33,i} = 2K_{33} \Gamma_1 \Gamma_2 (L_2 - L_1) L_3^{-1}, \quad (27)$$

$$\sum_{i \in N_3} T_i \bar{E}_{p,i} = K_{33}^{-1} \Gamma^T M_{03} E_{p,3}, \quad (28)$$

$$\Gamma^T D \Gamma = N_{33}^{-1} \Gamma_2 n_p \psi_0. \quad (29)$$

令 $\Gamma_1 = 0, \Gamma_2 = 0, \Gamma_3 = -1$, 则可得式(27)即 K_{33} 的一特解:

$$K_{33} = k_3, \quad (30)$$

其中 k_3 为常数.

系统的 K 矩阵为

$$K = K_{33} \begin{bmatrix} k_4 & 0 & 0 \\ 0 & k_5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (31)$$

则 K 矩阵的行列式为 $|K| = k_3^3 k_4 k_5$, 因此 $K > 0$ 的一个充分条件为

$$k_3 > 0, k_4 > 0, k_5 > 0. \quad (32)$$

由式(28)可得 \bar{E}_p 正定的解以及满足的条件:

$$\bar{E}_p = (q_1 - a_1)^2 + (q_2 - a_2)^2 + (q_3 - a_3)^2, \quad (33)$$

$$k_3 = \frac{1}{2} H L_3, a_3 = -\frac{T_1 L_3}{2k_3}, \quad (34)$$

其中 a_1, a_2, a_3 为常数.

通过直接计算, 可知 \bar{E}_p 的 Hessian 矩阵为

$$\frac{\partial^2 \bar{E}_p}{\partial q \partial q^T} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

观察可知, Hessian 矩阵正定. 由 $\bar{E}_{p,1}(a_1) = \bar{E}_{p,2}(a_2) = \bar{E}_{p,3}(a_3) = 0$ 可得点 $(a_1 \ a_2 \ a_3)$ 为受控势能的极小值点.

由式(29)可得

$$\begin{cases} D_{11} = d_1, D_{12} = 0, D_{13} = 0, \\ D_{22} = d_2, D_{23} = 0, D_{33} = 0, \end{cases} \quad (35)$$

其中 d_1, d_2 为大于零的任意值.

6 确定匹配控制律及稳定性分析

由 N 和 \bar{M} 的定义可得 $N = K M^{-1}$, 故由式(31)以及 M^{-1} 可得

$$N = K_{33} \begin{bmatrix} \frac{k_4}{L_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k_5}{L_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_3} \end{bmatrix}. \quad (36)$$

因为 $T^{(i)} = M K_{,i}^{-1} M$, 其中 $i \in N_3$. 故由式(31)和矩阵 $T^{(i)}$ 可得

$$T^{(1)} = 0, T^{(2)} = 0, T^{(3)} = 0. \quad (37)$$

由式(13)–(18), (20)–(22)(26)(36)得到系统匹配条件中保守力分量函数的解为

$$\begin{cases} \hat{g}_1 = \gamma_1, & \hat{g}_2 = \gamma_2, \\ \hat{g}_3 = \gamma_3, & \hat{g}_4 = 0, \\ \hat{g}_5 = \frac{n_p L_2}{\bar{N}_3}, & \hat{g}_6 = 0, \\ \hat{g}_7 = -\frac{n_p L_1}{\bar{N}_3}, & \hat{g}_8 = 0, \\ \hat{g}_9 = 0, & \hat{g}_{10} = \gamma_4, \\ \hat{g}_{11} = 0, & \hat{g}_{12} = -\frac{1}{\bar{N}_3} n_p \psi_0, \end{cases} \quad (38)$$

式中 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ 为任意值.

注 3 通过观察可知, 与保守力相关的方程为含有 7 个独立方程的线性方程组. 方程组共有 12 个变量, 其中 7 个独立变量, 5 个自由变量. 因此, 式(38)只是其中的一个解. 根据式(38)可知, 匹配条件有大量的解, 故与之对应的匹配控制器也有大量的解.

将式(26)(33)(35)–(38)代入式(25)可得系统的具体匹配控制律:

$$u_1 = -n_p L_2 \dot{q}_2 \dot{q}_3 + R \dot{q}_1 + \frac{k_4 L_2 L_3 n_p}{L_1} \dot{q}_2 \dot{q}_3 + \frac{k_3 k_4}{L_1} (\gamma_1 \dot{q}_1 + \gamma_2 \dot{q}_2 + \gamma_3 \dot{q}_3 + \gamma_4) \dot{q}_2 - \frac{k_3 k_4 d_1}{L_1} \dot{q}_1 - \frac{2k_3 k_4}{L_1} (q_1 - a_1), \quad (39)$$

$$u_2 = n_p (\psi_0 + n_p L_1 \dot{q}_1) \dot{q}_3 + R \dot{q}_2 - \frac{k_3 k_5}{L_2} (\gamma_1 \dot{q}_1 + \gamma_2 \dot{q}_2 + \gamma_3 \dot{q}_3 + \gamma_4) \dot{q}_1 - \frac{n_p k_5 L_3}{L_2} (L_1 \dot{q}_1 + \psi_0) \dot{q}_3 - \frac{k_3 k_5 d_2}{L_2} \dot{q}_2 - \frac{2k_3 k_5}{L_2} (q_2 - a_2). \quad (40)$$

根据以上分析给出以下稳定性结论:

命题 1 对于PMSM系统, 其控制器参数按如下选取:

$$\begin{cases} k_3 > 0, k_4 > 0, k_5 > 0, \\ d_1 > 0, d_2 > 0, \end{cases} \quad (41)$$

则由式(39)–(40)确定的光滑反馈控制律可使PMSM系统在 $(q_d^T, 0^T)$ 实现全局渐近稳定, 其中 q_d^T 为受控势能的极小值点 (a_1, a_2, a_3) .

证 选取受控能量 \bar{E} 作为Lyapunov函数 V . 若式(41)成立, 则 V 正定. 根据式(7), 则有 $\dot{V} \leq 0$. 故由式(39)–(40)所给的控制律可使PMSM系统在期望平衡点实现全局稳定.

为讨论系统的渐近稳定性, 可用反证法证明在 $\dot{V} = 0$ 的集合中不存在非孤立点的轨迹.

假设在该集合中存在这种轨迹, 则由 $\dot{V} = 0$ 可知轨迹上存在以下等式:

$$\dot{q}_1 \equiv 0, \dot{q}_2 \equiv 0. \quad (42)$$

在轨迹上应存在某点 q_0 , 进而在该点 q_0 的某个领域 δ_0 内也成立, 其中 $q_d \notin \delta_0$. 沿轨迹对式(42)进行微分和积分可得

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 \equiv 0, \ddot{q}_2 \equiv 0, \\ q_1 \equiv \alpha, q_2 \equiv \beta, \end{cases} \quad (43)$$

其中 α 和 β 为常数.

将式(39)–(40)(42)–(43)代入式(1), 可得

$$\begin{cases} 2k_3 k_4 L_1^{-1} (\alpha - a_1) \equiv 0, \\ 2k_3 k_5 (\beta - a_2) + (k_5 L_3 - L_2) n_p \psi_0 \dot{q}_3 \equiv 0, \\ J \ddot{q}_3 + \frac{2k_3}{L_3} (q_3 - a_3) \equiv 0. \end{cases} \quad (44)$$

由式(44)可得到, 当

$$\begin{aligned} \alpha &\equiv a_1 \equiv q_1, \beta = a_2 \equiv q_2, \\ q_3 &\equiv a_3, \dot{q}_3 \equiv 0, \ddot{q}_3 \equiv 0 \end{aligned}$$

时, 式(44)才成立, 即在 $\dot{V} = 0$ 的集合中只存在平衡点, 不存在非孤立点的轨迹, 故假设不成立. 又因为 \bar{E}_p 的Hessian矩阵正定, 因此点 $(q_d^T, 0^T)$ 为 $\bar{E}_p(q)$ 唯一极值点. 根据LaSalle不变原理, 该匹配控制律在期望点可实现全局渐近稳定. 证毕.

7 仿真结果分析

系统仿真参数按如下选取: d - q 轴电感电荷分别为 $L_1 = 4.5 \text{ mH}$, $L_2 = 3.2 \text{ mH}$; 负载转矩 $T_1 = 8 \text{ Nm}$; 变形系数 $H = 8$; 转动惯量 $J = 0.002 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$; 平衡点 $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = -1$; 极对数 $n_p = 8$; 永磁体磁通 $\psi_0 = 0.4 \text{ Wb}$; 定子电阻为 $R = 0.97 \Omega$; 控制器的系数为

$$\begin{aligned} k_3 &= 0.008, k_4 = 0.6, k_5 = 0.6, \\ d_1 &= 3, d_2 = 0.4. \end{aligned}$$

仿真结果如图1–4所示.

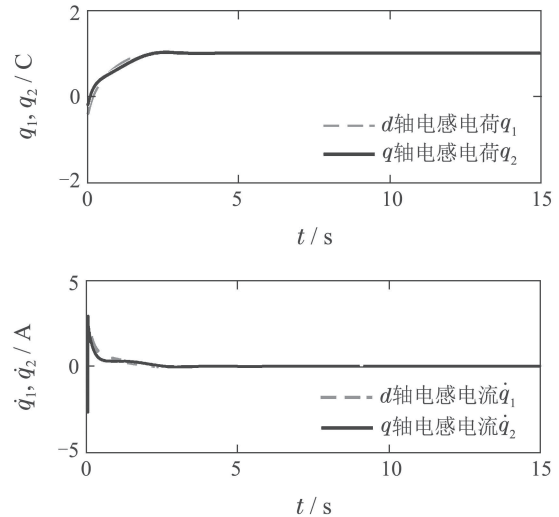


图1 d - q 轴电感电荷和电流
Fig. 1 d - q axis inductance charge and current

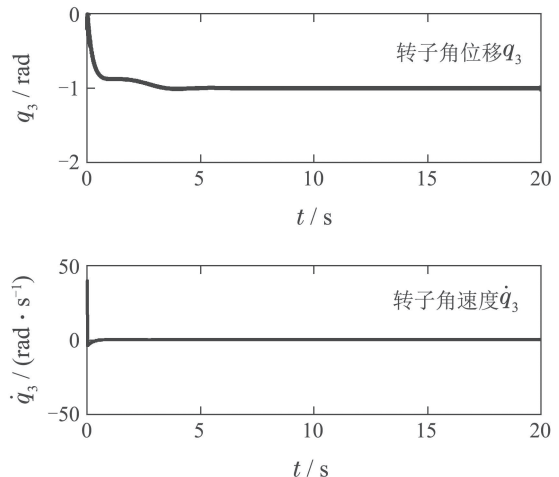


图2 转子角位移和角速度
Fig. 2 Rotor angular displacement and angular velocity

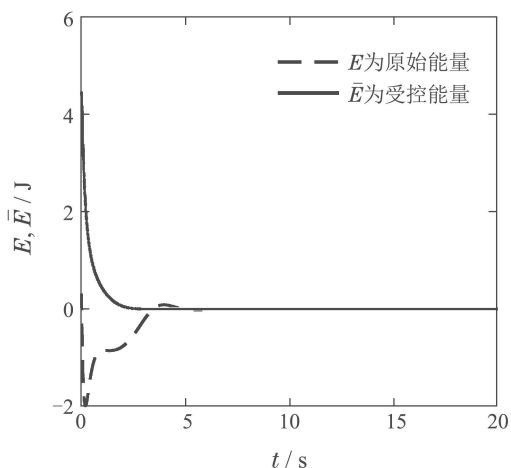


图3 原始能量和受控能量

Fig. 3 Original energy and controlled energy

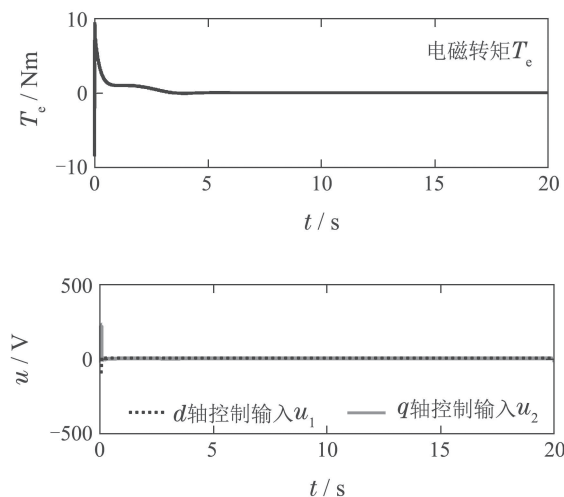


图4 电磁转矩和控制输入

Fig. 4 Electromagnetic torque and control input

系统给定的平衡点为 $(q, \dot{q}) = (q_d, 0)$, 且每个状态赋的初始值为分别为 $q = [-0.4 \ -0.2 \ -0.2]^T$, $\dot{q} = [1 \ -1 \ 40]^T$. 由图1和图2可知, 当PMSM系统正常工作时, 系统在初始状态时, 在图4的控制输入作用下, 系统的控制目标能尽快回到平衡点.

根据文献[16]可知, PMSM的电磁转矩的表达式为 $T_e = T_1 + J/n_p \ddot{q}_3 + F\dot{q}_3 + Hq_3$, 其中 F 表示与转速成正比的阻尼系数. 交流电机在一般的调速控制情况下并最终到达稳态时, 系统的加速度 \ddot{q}_3 为零. 而负载转矩 T_1 , 角位移 q_3 以及角速度 \dot{q}_3 都不为零, 从而根据电磁转矩的表达式可知其亦不为零. 而在本文中, 当系统运行到达期望的位置平衡点时, 广义速度的一次项以及与之对应的加速度都为零, 故电磁转矩为 $T_e = T_1 + Hq_3 = T_1 + Hq_d = 0$.

由上文可知, 系统所给的受控能量正定, 即 $\bar{E} > 0$, 而由式(7)可知 $\dot{\bar{E}} \leq 0$, 故系统的受控能量是衰减的, 直到衰减到受控势能的极小值点, 而图3的仿真结果和本文稳定性证明一致.

8 结论

本文将CL法应用到高阶、强耦合、非线性的PMSM的控制问题中. 根据期望的受控能量及其时间导数来构造CL和广义力, 通过它们得到系统的受控方程. 其中引入速度一次项的保守力, 得到原始方程与其相匹配的条件. 通过求解匹配条件中的偏微分方程, 得到与之相匹配的具体控制律. 该控制律可同时实现位置与速度的全局渐近镇定; 最后以正定的受控能量作为Lyapunov函数给系统稳定性证明带来极大简便.

CL法从欠驱动力学系统角度来分析PMSM系统, 使受控系统从形式上保持拉格朗日力学结构, 可得到非线性光滑反馈控制律, 具有较大收敛范围, 并且有助于实现鲁棒控制和最优控制. 因此, 笔者下一步还可通过借鉴一般哈密顿系统的鲁棒控制来研究鲁棒CL法.

参考文献:

- [1] KRISHMAN R. *Electric Motor Drives: Modeling, Analysis, and Control*. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice-Hall, 2001.
- [2] UTKIN V I. Sliding mode control design principles and applications to electric drives. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 1993, 40(1): 23 – 36.
- [3] CUI Jiarui, GAO Jiangfeng, ZHANG Bo, et al. Sliding mode variable structure robust control of permanent magnet synchronous motor. *Journal of Electric Machines and Control*, 2016, 20(5): 84 – 89. (崔家瑞, 高江峰, 张波, 等. 永磁同步电机滑模变结构鲁棒控制. 电机与控制学报, 2016, 20(5): 84 – 89.)
- [4] GRACAR B, CAFUTA P, ZNIDARIC M, et al. Nonlinear control of synchronous servo drive. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 1996, 4(2): 177 – 184.
- [5] LI Z, ZHANG R, DU Y, et al. Research on backstepping control of permanent magnet linear synchronous motor based on Lyapunov stability theory. *The 21st International Conference on Electrical Machines and Systems (ICEMS)*. Jeju, South Korea: IEEE, 2018, 10: 1348 – 1351.
- [6] LIU Xizhe, WU Jie. Design of active ring disturbance rejection controller for permanent magnet linear synchronous motor. *Journal of Electrotechnics*, 2004, 19(4): 6 – 11. (刘希喆, 吴捷. 永磁直线同步电动机速度环自抗扰控制器的设计. 电工技术学报, 2004, 19(4): 6 – 11.)
- [7] PETROVIC V, ORTEGA R, STANKOVIC A M. Interconnection and damping assignment approach to control of PM synchronous motors. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2001, 9(6): 811 – 820.
- [8] WU Chun, QI Rong, GAO Feng. Passive control of permanent magnet synchronous motor based on expanded PCHD model. *Control and Decision*, 2014, 29(5): 895 – 900. (吴春, 齐蓉, 高峰. 基于扩张PCHD模型的永磁同步电机无源控制. 控制与决策, 2014, 29(5): 895 – 900.)
- [9] CHENG Qiming, CHENG yinman, WANG Yingfei, et al. Development of control strategy for AC motor. *Power System Protection and Control*, 2011, 39(9): 145 – 154. (程启明, 程尹曼, 王映斐, 等. 交流电机控制策略的发展综述. 电力系统保护与控制, 2011, 39(9): 145 – 154.)
- [10] WANG Jiuhe. *Nonlinear Control of AC Motors*. Beijing: Electronic Industry Press, 2009. (王久和. 交流电动机的非线性控制. 北京: 电子工业出版社, 2009.)

- [11] ORTEGA R, ROMERO J G. Robust integral control of port-Hamiltonian systems: the case of non-passive outputs with unmatched disturbances. *Systems & Control Letters*, 2012, 61(1): 11 – 17.
- [12] ROMERO J G, DONAIRE A, ORTEGA R. Robust energy shaping control of mechanical systems. *Systems & Control Letters*, 2013, 62(9): 770 – 780.
- [13] VU N M T, LEFÈVRE L. A connection between optimal control and IDA–PBC design. *IFAC—PapersOnLine*, 2018, 51(3): 205 – 210.
- [14] LI M Q, HUO W. Controller design for mechanical systems with underactuation degree one based on controlled Lagrangians method. *International Journal of Control*, 2009, 82(9): 1747 – 1761.
- [15] LI Maoqing. Control design for planar vertical takeoff-and landing aircraft based on controlled Lagrangians. *Control Theory & Applications*, 2010, 27(6): 688 – 694.
(李茂青. 基于受控拉格朗日函数的垂直起降飞机控制器设计. 控制理论与应用, 2010, 27(6): 688 – 694.)
- [16] TANG Yunmiao. *Electrical Machinery*. Beijing: Mechanical Industry Press, 2011: 162.
(汤蕴缪. 电机学. 北京: 机械工业出版社, 2011: 162.)

作者简介:

李茂青 硕士生导师, 教授, 主要研究方向为非线性控制、列车运行控制与通信, E-mail: limq@mail.lzjtu.cn;

刘建强 硕士研究生, 主要研究方向为交流电机的控制, E-mail: gsyjz0879@163.com;

高锋阳 硕士生导师, 教授级高级工程师, 主要研究方向为大功率电源、新能源发电并网系统以及牵引电机系统研究等, E-mail: 329365048@qq.com;

张廷荣 讲师, 主要研究方向为电力传动和电力电子, E-mail: 1620422@qq.com.