

具有通信约束的反馈辅助PD型量化迭代学习控制

周楠, 王森, 王晶[†], 沈栋

(北京化工大学 信息科学与技术学院, 北京 100029)

摘要: 本文针对网络线性系统, 研究了具有通信约束的反馈辅助PD型迭代学习控制问题. 信号从远程设备传输到迭代学习控制器过程中, 存在数据量化与数据包丢失的情况. 将数据包丢失模型描述为具有已知概率的伯努利二进位序列, 采用扇形界方法处理数据量化误差, 提出了一种反馈辅助PD型迭代学习控制算法. 采用压缩映射法分析证明了在存在数据量化和丢失的情况下, 所提控制算法依然可以保证跟踪误差渐近收敛到零. 并进一步对存在初始状态偏移时所提算法的鲁棒性进行了讨论. 最后, 通过仿真示例, 对比验证了理论结果的有效性和优越性.

关键词: 迭代学习控制; 数据量化; 数据包丢失; 反馈辅助PD策略; 初始状态条件

引用格式: 周楠, 王森, 王晶, 等. 具有通信约束的反馈辅助PD型量化迭代学习控制. 控制理论与应用, 2020, 37(9): 1989–2000

DOI: 10.7641/CTA.2020.90932

Feedback-assisted PD-type quantized iterative learning control with communication constraints

ZHOU Nan, WANG Sen, WANG Jing[†], SHEN Dong

(College of Information Science and Technology, Beijing University of Chemical Technology, Beijing 100029, China)

Abstract: The feedback-assisted PD-type iterative learning control (ILC) problem is studied for network linear systems with communication constraints in this paper, where data quantization and dropouts occur during transmission from the remote device to controller. The quantization error issue is handled by the sector bound method and the packet loss is modeled by a Bernoulli binary sequence with known probability distribution. A feedback-assisted PD-type ILC is proposed and the asymptotical convergence of the tracking error to zero is proved by the contraction mapping technique. The robustness of the proposed algorithm in the presence of initial state shifts is further discussed. Simulation examples are provided to demonstrate the effectiveness and superiority of the proposed scheme.

Key words: iterative learning control; data quantization; packet loss; feedback-assisted PD strategy; initial state conditions

Citation: ZHOU Nan, WANG Sen, WANG Jing, et al. Feedback-assisted PD-type quantized iterative learning control with communication constraints. *Control Theory & Applications*, 2020, 37(9): 1989–2000

1 引言

迭代学习控制是根据其环境获得知识或经验的过程, 并参考知识或经验对环境采取行动, 从而改善下一次的性能表现. 1984年, 日本学者Arimoto提出了迭代学习控制理论^[1], 自此便引起了人们的广泛研究. 它是一种模仿人类学习能力的先进智能控制方式, 具有严格的数学描述, 适用于有限时间区间上重复运动的被控对象, 最早起源于工业机器人控制问题^[2-3]. 迭代学习控制需要较少的系统先验知识, 方式简单, 因此可用于具有不确定性、非线性和复杂性的系统^[4],

例如机器人系统、无缝钢管张减过程壁厚控制系统以及诸多工业过程控制系统^[5].

为获得良好的控制性能, 大多数有关迭代学习控制的研究, 都依赖于对整个系统信息和运行数据的获取和利用, 即假设学习算法所需数据的测量或传输, 是以无限精度执行的. 在实际情况下, 通过共享通信网络来交换控制器和执行器、传感器之间信息的网络化控制系统已经成为国际自动控制领域的一个热点研究课题^[6]. 在过去10年中, 网络系统成功应用于控制、故障诊断、信号处理、信息融合等领域, 已经有许

收稿日期: 2019-11-11; 录用日期: 2020-04-29.

[†]通信作者. E-mail: jwang@mail.buct.edu.cn.

本文责任编辑: 侯忠生.

国家自然科学基金项目(61973023, 61573050, 61673045), 北京市自然科学基金项目(4202052)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (61973023, 61573050, 61673045) and the Beijing Natural Science Foundation (4202052).

多关于控制和稳定性问题的可用结果^[7]. 对比传统的点对点控制模式, 网络化控制系统具有易安装和易设置、少布线和低维护成本、可实现资源共享等优点.

随着通信, 电子技术和计算机的快速发展与广泛应用, 网络通信被引入计算机控制领域^[8]. 在实际应用中, 需考虑通信网络带来的影响. 由通信约束导致不完备信息的因素很多, 既有客观因素, 也有主观因素. 沈栋等将不完备信息场景分为两类^[9]: 被动不完备信息和主动不完备信息. 被动不完备信息的迭代学习控制重点研究随机数据包丢失、通信延迟、容量限制以及迭代变长度, 它们的信息丢失均是由实际条件和现场环境, 或其他硬件限制(传感器/执行器饱和)造成^[10]. 在研究数据包丢失时, 有两种主要的迭代学习算法设计方案, 一种是事件触发, 另一种是迭代触发, 不同之处在于学习更新时如何处理丢失的数据, 对丢失数据进行充分补偿可以有效提高跟踪性能. 因此, 针对具体问题制定具体的补偿机制具有重要意义, 但相关研究成果较少. 在研究通信延迟时, 用伯努利随机变量描述随机时滞, 在收敛性分析中采用期望值消除随机性. 迭代变长问题目前取得了一些进展, 大多数文献考虑离散时间系统, 系统被限制为线性或全局利普希茨非线性, 基于平均算子的迭代学习控制器设计被广泛研究. 在主动不完备信息场景下, 考虑了两种降低数据量的措施, 即采样数据迭代学习控制和量化迭代学习控制. 与采样数据迭代学习控制相关联的主要问题有两个: 采样瞬间的行为和采样间隔性能如何. 具体来说, 前者的目标是构造适当的学习算法以保证在采样时刻收敛, 而后者则侧重于定量分析不同采样时刻之间的跟踪性能和可能的解决方案, 以减少采样间隔内的跟踪误差. 与传统的量化控制相比, 量化迭代学习控制还处于初级阶段. 由于网络的传输容量有限, 被控对象与控制器之间的通讯能力往往有限, 传输的数据应在发送到下一个网络节点之前进行量化^[11-12]. 即把采样得到的信号进行幅度离散, 可有效地降低传输数据量, 从而满足系统的带宽要求, 这是减少传输负担的必要条件, 量化器为此提供了极大的优势^[13]. 因此, 研究其对控制性能的影响以及如何克服影响并提高系统的鲁棒性非常重要, 但在迭代学习控制领域, 基于数据量化、数据包丢失设计控制器以及相关跟踪性能的分析还处于起步阶段.

卜旭辉等^[14]给出了量化迭代学习控制的早期尝试, 输出测量值由对数量化器量化后, 传输到控制器以更新控制律. 通过使用扇形界和传统的压缩映射方法, 表明跟踪误差收敛到一个小范围, 其上限取决于量化密度. 为实现零误差跟踪性能, 沈栋等又提出量化跟踪误差的方法^[15-16], 使用P型迭代学习律可以保证零误差收敛. 卜旭辉等人提出量化控制输入更新信号, 采用二维模型理论给出了系统渐近稳定性条

件^[17]. 除此之外还扩展到了随机系统^[18]. 在数据包丢失情况下, 提出间歇性和连续性迭代学习律, 如果未接收到信息, 前者将停止控制律的更新, 而后者将根据最新的可用信息继续进行更新^[19]. 沈栋等^[20]探讨了数据丢包迭代学习控制的通用情况, 允许数据丢失在测量端和执行器端随机发生, 提出了针对计算输入和实际输入的更新机制, 并将这两个更新过程转化为马尔可夫链模型. 上述方法仅借助前一批次的跟踪误差信息来修正当前批次控制信号, 是典型的开环学习方式, 但实际上还可以利用当前批次所获信息来构造学习算法, 形成闭环学习过程. 相较而言, 闭环学习比开环学习修正及时, 通过较少的迭代次数即可改善系统稳定性能. 但由于因果性, 无法准确获得当前误差的导数信号^[21].

本文讨论迭代学习控制在网络环境中执行, 且同时存在量化和数据包丢失的情况. 方便起见, 仅考虑输出测量端存在通信信道的情况. 将数据包丢失描述为一个概率已知的伯努利序列, 采用对数量化器, 将量化的跟踪误差传送给控制器. 基于反馈辅助PD型迭代学习律, 利用前一批次和当前批次产生的跟踪误差信号来更新控制输入. 当初始状态精确重置时, 能保证零误差收敛, 并加快系统的收敛速度. 而对于初态偏移情况, 则证明了跟踪误差与初始状态偏差的界成正比, 且反馈辅助PD型迭代学习控制算法仍然保持稳健的性能, 同时可以发现, 较大的初始偏差会导致较大的跟踪误差范围. 通过数值仿真, 对比了反馈辅助PD型学习律与开环P型、PD型学习律的收敛性能, 验证了所提学习算法的有效性及其优越性. 本文贡献如下: 1) 在具有通信约束的环境下, 提出了反馈辅助PD型迭代学习控制律, 采用压缩映射法分析证明了同时存在数据量化和数据包丢失时, 所提控制算法依然可以保证跟踪误差渐近收敛到零; 2) 通过数值仿真对比反馈辅助PD型学习律与P型、PD型学习律的控制效果, 验证了所提方法可以很好地提高学习过程的收敛速度; 3) 讨论了存在初态偏移时反馈辅助PD型迭代学习控制的理论分析与仿真结果.

2 问题提出

考虑如下离散线性时不变系统

$$\begin{cases} x_k(t+1) = Ax_k(t) + Bu_k(t), \\ y_k(t) = Cx_k(t), \end{cases} \quad (1)$$

其中: $k = 1, 2, \dots$ 表示迭代次数; $t = 0, 1, \dots, N$ 表示在一次迭代过程中的不同时间; N 是迭代长度; $x_k(t), u_k(t), y_k(t)$ 分别是状态、输入和输出; A, B, C 是适当维数的矩阵. 本文虽考虑时不变系统, 但下述结果可以平推至时变系统情形. 假设 CB 是列满秩的. CB 列满秩是迭代学习算法收敛的一个充分必要条件. 为了判断在所提出的控制结构下是否存在收敛学

习法则, 仅需要检查输出输入耦合矩阵是否为列满秩. 该假设的物理意义是系统的相对阶数为1, 在实际中可以满足^[22-24].

定义参考轨迹 $y_d(t), t = 0, 1, \dots, N$.

控制目标是找到一个输入序列 $\{u_k(t)\}$, 使得对于任意 t 当 $k \rightarrow \infty$ 时, 输出 $y_k(t)$ 收敛到 $y_d(t)$. 为了后续分析, 需要如下假设条件.

假设 1 参考轨迹 $y_d(t)$ 可实现, 即存在唯一的输入 $u_d(t)$ 使得

$$\begin{cases} x_d(t+1) = Ax_d(t) + Bu_d(t), \\ y_d(t) = Cx_d(t), \end{cases}$$

其中存在一个合适的初始状态 $x_d(0)$.

假设 2 满足相同初始条件, 即对于所有批次, $x_k(0) = x_d(0), x_d(0)$ 是期望的初始状态.

假设 3 初始状态从 $x_d(0)$ 偏移, 但应该是有界的, 即 $\|x_d(0) - x_k(0)\| \leq \varepsilon$, 其中 ε 是正常数.

在本文中, 对于任何确定的跟踪轨迹, 在操作之前首先传输到系统, 产生跟踪误差, 再将其量化和传输回控制器. 在这个过程中, 数据包丢失情况经常发生. 假设控制器具有智能检测功能, 它可以确定数据是否丢失^[25]. 本文将讨论对于系统(1)和期望轨迹 $y_d(t)$, 在数据量化和随机数据包丢失的情况下, 如何设计控制律使得系统的鲁棒性增强.

定义 $Q(\cdot)$ 为所选量化器. 本文使用对数量化器^[26].

$$U = \{\pm z_i : z_i = \mu^i z_0, i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\} \cup \{0\},$$

$$0 < \mu < 1, z_0 > 0, \quad (2)$$

其中 μ 是量化密度, 相应的量化器 $Q(\cdot)$ 如下:

$$Q(v) = \begin{cases} z_i, & \frac{1}{1+\zeta} z_i < v \leq \frac{1}{1-\zeta} z_i, \\ 0, & v = 0, \\ -Q(-v), & v < 0, \end{cases} \quad (3)$$

其中 $\zeta = (1 - \mu)/(1 + \mu)$. 很明显量化器 $Q(\cdot)$ 对称且时不变.

对数量化器的量化误差满足下述扇形界性质^[27]:

$$\begin{cases} Q(e_k(t)) - e_k(t) = \Delta e_k(t) \cdot e_k(t), \\ |\Delta e_k(t)| \leq \zeta. \end{cases} \quad (4)$$

将数据包丢失模型描述为具有已知概率的伯努利二进制序列^[28]. 定义随机参数 $\alpha_k(t)$ 是0-1伯努利序列, 即 $\alpha_k(t) \in \{0, 1\}$. $\alpha_k(t) = 0$ 表示数据丢失, 否则未丢失, 且满足

$$P\{\alpha_k(t) = 1\} = E\{\alpha_k(t)\} = \bar{\alpha}, \quad (5)$$

其中: $P\{\cdot\}$ 指求概率; $E\{\cdot\}$ 是期望因子; $\bar{\alpha}$ 指数据传输的成功率, 满足 $0 \leq \bar{\alpha} \leq 1$. 该随机丢包参数与 $u_k(t), x_k(t), y_k(t)$ 独立.

现给出引理1用于之后的证明过程^[29]:

引理 1 定义 η 为伯努利二进制随机变量, $P\{\eta = 1\} = \bar{\eta}, P\{\eta = 0\} = 1 - \bar{\eta}$. M 是正定矩阵. 那么当且仅当满足如下条件之一时, 等式 $E\|I - \eta M\| = \|I - \bar{\eta} M\|$ 成立:

- 1) $\bar{\eta} = 0$;
- 2) $\bar{\eta} = 1$;
- 3) $0 < \bar{\eta} < 1, 0 < M \leq I$.

针对以上控制目标, 本文利用前次迭代产生的输出信号 $e_k(t)$ 与 $e_k(t+1)$ 和当前次迭代产生的输出反馈信号, 构成控制输入的修正项, 从而提高学习过程的收敛速度, 提出反馈辅助PD型量化迭代学习控制律

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + \alpha_k(t)L_1Q(e_k(t+1)) + \alpha_k(t)L_2Q(e_k(t)) + \alpha_k(t)KQ(e_{k+1}(t)). \quad (6)$$

控制结构图如图1所示.

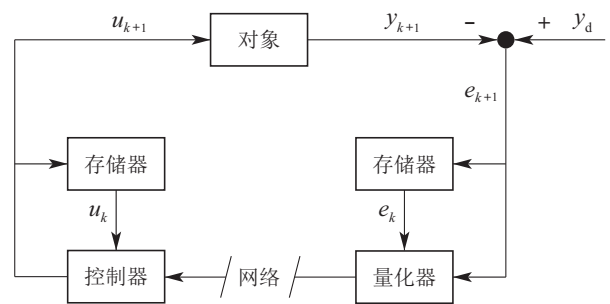


图 1 反馈辅助PD型量化迭代学习控制系统结构图

Fig. 1 Structure of the feedback-assisted PD-type quantized iterative learning control system

如果控制器增益 $L_2 = 0, K = 0$, 则控制律为P型迭代学习律

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + \alpha_k(t)L_1Q(e_k(t+1)). \quad (7)$$

如果控制器增益 $K = 0$, 则控制律为PD型迭代学习律

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + \alpha_k(t)L_1Q(e_k(t+1)) + \alpha_k(t)L_2Q(e_k(t)), \quad (8)$$

其中: $e_k(t) = y_d(t) - y_k(t)$ 为跟踪误差信号, L_1, L_2, K 为学习增益矩阵.

3 主要结论

在此节, 如下定理刻画了算法(6)的收敛性质.

定理 1 考虑存在量化误差的系统(1)和更新律(6), 假设1-2成立. 如果增益矩阵 L_1 满足

$$\begin{cases} \|I - \bar{\alpha}CBL_1\| + \zeta\|\bar{\alpha}CBL_1\| \leq \rho < 1, \\ (1 + \zeta)\|\bar{\alpha}CL_2\| + (1 + \zeta)\|\bar{\alpha}CAL_1\| \leq \omega, \\ (1 + \zeta)\|\bar{\alpha}KC\| \leq \sigma, \\ 0 < CBL_1 < I. \end{cases} \quad (9)$$

那么随着 $k \rightarrow \infty$, 系统的跟踪误差收敛到零.

证 记 $\delta u_k(t) = u_d(t) - u_k(t)$, $\delta x_k(t) = x_d(t) - x_k(t)$. 用 $u_d(t)$ 两边同时减去式(6), 结合式(4), 可以得到

$$\begin{aligned} \delta u_{k+1}(t) = & \delta u_k(t) - \alpha_k(t)L_1Q(e_k(t+1)) - \\ & \alpha_k(t)L_2Q(e_k(t)) - \alpha_k(t)KQ(e_{k+1}(t)) = \\ & \delta u_k(t) - \alpha_k(t)L_2((1 + \Delta e_k(t))e_k(t)) - \\ & \alpha_k(t)L_1((1 + \Delta e_k(t+1))e_k(t+1)) - \\ & \alpha_k(t)K((1 + \Delta e_{k+1}(t))e_{k+1}(t)) = \\ & \delta u_k(t) - \alpha_k(t)L_2(1 + \Delta e_k(t))C\delta x_k(t) - \\ & \alpha_k(t)L_1(1 + \Delta e_k(t+1))C\delta x_k(t+1) - \\ & \alpha_k(t)K(1 + \Delta e_{k+1}(t))C\delta x_{k+1}(t). \end{aligned} \quad (10)$$

根据系统(1)和假设1,

$$\begin{aligned} \delta x_k(t+1) = & x_d(t+1) - x_k(t+1) = \\ & Ax_d(t) + Bu_d(t) - Ax_k(t) - Bu_k(t) = \\ & A\delta x_k(t) + B\delta u_k(t), \end{aligned} \quad (11)$$

因此, 代入得到

$$\begin{aligned} \delta u_{k+1}(t) = & \delta u_k(t) - \alpha_k(t)L_1(1 + \Delta e_k(t+1))CA\delta x_k(t) - \\ & \alpha_k(t)L_1(1 + \Delta e_k(t+1))CB\delta u_k(t) - \\ & \alpha_k(t)L_2(1 + \Delta e_k(t))C\delta x_k(t) - \\ & \alpha_k(t)K(1 + \Delta e_{k+1}(t))C\delta x_{k+1}(t) = \\ & (I - \alpha_k(t)L_1CB)\delta u_k(t) - \\ & \alpha_k(t)(1 + \Delta e_k(t+1))CAL_1\delta x_k(t) - \\ & \alpha_k(t)(\Delta e_k(t+1))CBL_1\delta u_k(t) - \\ & \alpha_k(t)(1 + \Delta e_k(t))CL_2\delta x_k(t) - \\ & \alpha_k(t)(1 + \Delta e_{k+1}(t))KC\delta x_{k+1}(t). \end{aligned} \quad (12)$$

对上式两边取范数得到

$$\begin{aligned} \|\delta u_{k+1}(t)\| \leq & \|(I - \alpha_k(t)L_1CB)\| \|\delta u_k(t)\| + \\ & (1 + \zeta)\|\alpha_k(t)CAL_1\| \|\delta x_k(t)\| + \\ & \zeta\|\alpha_k(t)CBL_1\| \|\delta u_k(t)\| + \\ & (1 + \zeta)\|\alpha_k(t)CL_2\| \|\delta x_k(t)\| + \\ & (1 + \zeta)\|\alpha_k(t)KC\| \|\delta x_{k+1}(t)\|. \end{aligned} \quad (13)$$

对式(11)取范数得到

$$\|\delta x_k(t+1)\| \leq \|A\| \|\delta x_k(t)\| + \|B\| \|\delta u_k(t)\|. \quad (14)$$

根据假设2, 上式通过递归得到

$$\begin{aligned} \|\delta x_k(t)\| \leq & \|A\| \|\delta x_k(t-1)\| + \|B\| \|\delta u_k(t-1)\| \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \|A\|^2 \|\delta x_k(t-2)\| + \|A\| \|B\| \|\delta u_k(t-2)\| + \\ & \|B\| \|\delta u_k(t-1)\| \leq \\ & \sum_{i=0}^{t-1} \|A\|^{t-1-i} \|B\| \|\delta u_k(i)\|, \end{aligned} \quad (15)$$

因此

$$\|\delta x_{k+1}(t)\| \leq \sum_{i=0}^{t-1} \|A\|^{t-1-i} \|B\| \|\delta u_{k+1}(i)\|. \quad (16)$$

结合式(13)–(16)有

$$\begin{aligned} \|\delta u_{k+1}(t)\| \leq & \|I - \alpha_k(t)L_1CB\| \|\delta u_k(t)\| + \\ & \zeta\|\alpha_k(t)CBL_1\| \|\delta u_k(t)\| + \\ & (1 + \zeta)\|\alpha_k(t)CAL_1\| \sum_{i=0}^{t-1} \|A\|^{t-1-i} \|B\| \|\delta u_k(i)\| + \\ & (1 + \zeta)\|\alpha_k(t)CL_2\| \sum_{i=0}^{t-1} \|A\|^{t-1-i} \|B\| \|\delta u_k(i)\| + \\ & (1 + \zeta)\|\alpha_k(t)KC\| \sum_{i=0}^{t-1} \|A\|^{t-1-i} \|B\| \|\delta u_{k+1}(i)\|. \end{aligned} \quad (17)$$

上式包含随机因子 $\alpha_k(t)$, 且与 $u_k(t)$, $u_{k+1}(t)$ 无关, 上式两端取期望得

$$\begin{aligned} E\|\delta u_{k+1}(t)\| \leq & E(\|I - \alpha_k(t)CBL_1\| \|\delta u_k(t)\|) + \\ & \zeta E(\|\alpha_k(t)CBL_1\| \|\delta u_k(t)\|) + \\ & (1 + \zeta)E(\|\alpha_k(t)CAL_1\| \sum_{i=0}^{t-1} \|A\|^{t-1-i} \|B\| \|\delta u_k(i)\|) + \\ & (1 + \zeta)E(\|\alpha_k(t)CL_2\| \sum_{i=0}^{t-1} \|A\|^{t-1-i} \|B\| \|\delta u_k(i)\|) + \\ & (1 + \zeta)E(\|\alpha_k(t)KC\| \sum_{i=0}^{t-1} \|A\|^{t-1-i} \|B\| \|\delta u_{k+1}(i)\|) \leq \\ & \|I - \bar{\alpha}CBL_1\| E\|\delta u_k(t)\| + \zeta\|\bar{\alpha}CBL_1\| E\|\delta u_k(t)\| + \\ & (1 + \zeta)\|\bar{\alpha}CAL_1\| \sum_{i=0}^{t-1} \|A\|^{t-1-i} \|B\| E\|\delta u_k(i)\| + \\ & (1 + \zeta)\|\bar{\alpha}CL_2\| \sum_{i=0}^{t-1} \|A\|^{t-1-i} \|B\| E\|\delta u_k(i)\| + \\ & (1 + \zeta)\|\bar{\alpha}KC\| \sum_{i=0}^{t-1} \|A\|^{t-1-i} \|B\| E\|\delta u_{k+1}(i)\| \leq \\ & \rho E\|\delta u_k(t)\| + \omega \sum_{i=0}^{t-1} \|A\|^{t-1-i} \|B\| E\|\delta u_k(i)\| + \\ & \sigma \sum_{i=0}^{t-1} \|A\|^{t-1-i} \|B\| E\|\delta u_{k+1}(i)\|, \end{aligned} \quad (18)$$

其中:

$$\begin{aligned} \|I - \bar{\alpha}CBL_1\| + \zeta\|\bar{\alpha}CBL_1\| & \leq \rho, \\ (1 + \zeta)\|\bar{\alpha}CAL_1\| + (1 + \zeta)\|\bar{\alpha}CL_1\| & \leq \omega, \\ (1 + \zeta)\|\bar{\alpha}KC\| & \leq \sigma. \end{aligned}$$

第2个不等号的成立由 $0 < CBL_1 < I$ 及引理1

保证.

特别地, 将上式展开得

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\|\delta u_{k+1}(0)\| \leq \rho \mathbb{E}\|\delta u_k(0)\|, \\ & \mathbb{E}\|\delta u_{k+1}(1)\| \leq \\ & \rho \mathbb{E}\|\delta u_k(1)\| + \omega \|B\| \mathbb{E}\|\delta u_k(0)\| + \sigma \|B\| \mathbb{E}\|\delta u_{k+1}(0)\|, \\ & \mathbb{E}\|\delta u_{k+1}(2)\| \leq \\ & \rho \mathbb{E}\|\delta u_k(2)\| + \omega \|A\| \|B\| \mathbb{E}\|\delta u_k(0)\| + \\ & \omega \|B\| \mathbb{E}\|\delta u_k(1)\| + \sigma \|A\| \|B\| \mathbb{E}\|\delta u_{k+1}(0)\| + \\ & \sigma \|B\| \mathbb{E}\|\delta u_{k+1}(1)\|, \\ & \vdots \\ & \mathbb{E}\|\delta u_{k+1}(N-1)\| \leq \\ & \rho \mathbb{E}\|\delta u_k(N-1)\| + \omega \sum_{i=0}^{N-2} \|A\|^{N-2-i} \|B\| \mathbb{E}\|\delta u_k(i)\| + \\ & \sigma \sum_{i=0}^{N-2} \|A\|^{N-2-i} \|B\| \mathbb{E}\|\delta u_{k+1}(i)\|. \end{aligned}$$

记 $V_k = [\mathbb{E}\|\delta u_k(0)\|, \mathbb{E}\|\delta u_k(1)\|, \dots, \mathbb{E}\|\delta u_k(N-1)\|]^T$, 显然

$$V_{k+1} \leq \Gamma V_k + L V_{k+1}, \quad (19)$$

其中:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \rho & 0 & \dots & 0 \\ \omega \|B\| & \rho & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \omega \|A\|^{N-2} \|B\| & \omega \|A\|^{N-3} \|B\| & \dots & \rho \end{bmatrix},$$

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \sigma \|B\| & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma \|A\|^{N-2} \|B\| & \sigma \|A\|^{N-3} \|B\| & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

由式(19)可知

$$(I - L)V_{k+1} \leq \Gamma V_k,$$

即

$$H V_{k+1} \leq \Gamma V_k,$$

其中:

$$H = \begin{bmatrix} I & 0 & \dots & 0 \\ -\sigma \|B\| & I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\sigma \|A\|^{N-2} \|B\| & -\sigma \|A\|^{N-3} \|B\| & \dots & I \end{bmatrix}.$$

注意到, Γ, L, H 均为下三角矩阵, H 对角线元素为 I , Γ 对角线元素为 $\rho < 1$. 因此, 当 $k \rightarrow \infty$ 时, $V_k \rightarrow 0$, 或者等价的, 对于任意时间, $k \rightarrow \infty, \|\delta u_k(t)\| \rightarrow 0$. 由式(15)和时间的有限性可知, 对于任意时间, $k \rightarrow \infty, \|\delta x_k(t)\| \rightarrow 0$, 因此有 $k \rightarrow \infty, \|e_k(t)\| \rightarrow 0$. 系统的零误差跟踪性能得证. 证毕.

推论 1 对于离散线性时不变系统(1), 同时考虑数据量化与数据包丢失, 采用P型学习律

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + \alpha_k(t) L_1 Q(e_k(t+1)).$$

假设1-2成立. 如果增益矩阵 L_1 满足

$$\|I - \bar{\alpha} C B L_1\| + \zeta \|\bar{\alpha} C B L_1\| \leq \rho < 1, \quad (20)$$

那么随着 $k \rightarrow \infty$, 系统的跟踪误差收敛到零.

推论 2 对于离散线性时不变系统(1), 同时考虑数据量化与数据包丢失, 采用PD型学习律

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + \alpha_k(t) L_1 Q(e_k(t+1)) + \alpha_k(t) L_2 Q(e_k(t)).$$

假设1-2成立. 如果增益矩阵 L_1 满足

$$\begin{cases} \|I - \bar{\alpha} C B L_1\| + \zeta \|\bar{\alpha} C B L_1\| \leq \rho < 1, \\ (1 + \zeta) \|\bar{\alpha} C L_2\| + (1 + \zeta) \|\bar{\alpha} C A L_1\| \leq \omega, \end{cases} \quad (21)$$

那么随着 $k \rightarrow \infty$, 系统的跟踪误差收敛到零.

注 1 上述推论与定理1的证明过程类似, 此处略.

定理 2 考虑存在量化误差的系统(1)和更新律(6), 假设1和假设3成立. 如果增益矩阵 L_1 满足

$$\begin{cases} \|I - \bar{\alpha} C B L_1\| + \zeta \|\bar{\alpha} C B L_1\| \leq \bar{\rho} < 1, \\ (1 + \zeta) \|\bar{\alpha} C L_2\| + (1 + \zeta) \|\bar{\alpha} C A L_1\| \leq \bar{\omega}, \\ (1 + \zeta) \|\bar{\alpha} K C\| \leq \bar{\sigma}, \\ 0 < C B L_1 < I, \end{cases} \quad (22)$$

那么当迭代次数 $k \rightarrow \infty$ 时, 跟踪误差收敛到小范围内, 其界限与偏差 ε 成正比, 即

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \|e_k(t)\| \leq \gamma \varepsilon,$$

其中 γ 是一个适当的常数.

证 该证明过程沿着定理1, 式(10)-(14)的推导保持不变, 但式(15)变化为

$$\begin{aligned} & \|\delta x_k(t)\| \leq \\ & \|A\| \|\delta x_k(t-1)\| + \|B\| \|\delta u_k(t-1)\| \leq \\ & \|A\|^2 \|\delta x_k(t-2)\| + \|A\| \|B\| \|\delta u_k(t-2)\| + \\ & \|B\| \|\delta u_k(t-1)\| \leq \\ & \sum_{i=0}^{t-1} \|A\|^{t-1-i} \|B\| \|\delta u_k(i)\| + \|A\|^t \|\delta x_k(0)\|. \end{aligned} \quad (23)$$

结合假设3可推出

$$\|\delta x_k(t)\| \leq \sum_{i=0}^{t-1} \|A\|^{t-1-i} \|B\| \|\delta u_k(i)\| + \|A\|^t \varepsilon, \quad (24)$$

因此

$$\begin{aligned} & \|\delta x_{k+1}(t)\| \leq \\ & \sum_{i=0}^{t-1} \|A\|^{t-1-i} \|B\| \|\delta u_{k+1}(i)\| + \|A\|^t \varepsilon. \end{aligned} \quad (25)$$

结合式(13)–(14)(23)–(25), 有

$$\begin{aligned} & \|\delta u_{k+1}(t)\| \leq \\ & \|I - \alpha_k(t)CBL_1\| \|\delta u_k(t)\| + \\ & \zeta \|\alpha_k(t)CBL_1\| \|\delta u_k(t)\| + \\ & (1 + \zeta) \|\alpha_k(t)CL_2\| \|A\|^t \varepsilon + \\ & (1 + \zeta) \|\alpha_k(t)CL_2\| \sum_{i=0}^{t-1} \|A\|^{t-1-i} \|B\| \|\delta u_k(i)\| + \\ & (1 + \zeta) \|\alpha_k(t)CAL_1\| \|A\|^t \varepsilon + \\ & (1 + \zeta) \|\alpha_k(t)CAL_1\| \sum_{i=0}^{t-1} \|A\|^{t-1-i} \|B\| \|\delta u_k(i)\| + \\ & (1 + \zeta) \|\alpha_k(t)KC\| \|A\|^t \varepsilon + \\ & (1 + \zeta) \|\alpha_k(t)KC\| \sum_{i=0}^{t-1} \|A\|^{t-1-i} \|B\| \|\delta u_{k+1}(i)\|. \end{aligned} \tag{26}$$

上式两端取期望得

$$\begin{aligned} & E\|\delta u_{k+1}(t)\| \leq \\ & \|I - \bar{\alpha}CBL_1\| E\|\delta u_k(t)\| + \\ & \zeta \|\bar{\alpha}CBL_1\| E\|\delta u_k(t)\| + \\ & (1 + \zeta) \|\bar{\alpha}CL_2\| \|A\|^t \varepsilon + \\ & (1 + \zeta) \|\bar{\alpha}CL_2\| \sum_{i=0}^{t-1} \|A\|^{t-1-i} \|B\| E\|\delta u_k(i)\| + \\ & (1 + \zeta) \|\bar{\alpha}CAL_1\| \|A\|^t \varepsilon + \\ & (1 + \zeta) \|\bar{\alpha}CAL_1\| \sum_{i=0}^{t-1} \|A\|^{t-1-i} \|B\| E\|\delta u_k(i)\| + \\ & (1 + \zeta) \|\bar{\alpha}KC\| \|A\|^t \varepsilon + \\ & (1 + \zeta) \|\bar{\alpha}KC\| \sum_{i=0}^{t-1} \|A\|^{t-1-i} \|B\| E\|\delta u_{k+1}(i)\| \leq \\ & \bar{\rho} E\|\delta u_k(t)\| + \bar{\omega} \sum_{i=0}^{t-1} \|A\|^{t-1-i} \|B\| E\|\delta u_k(i)\| + \\ & \bar{\omega} \|A\|^t \varepsilon + \bar{\sigma} \sum_{i=0}^{t-1} \|A\|^{t-1-i} \|B\| E\|\delta u_{k+1}(i)\| + \\ & \bar{\sigma} \|A\|^t \varepsilon, \end{aligned} \tag{27}$$

其中:

$$\begin{aligned} & \|I - \bar{\alpha}CBL_1\| + \zeta \|\bar{\alpha}CBL_1\| \leq \bar{\rho}, \\ & (1 + \zeta) \|\bar{\alpha}CL_2\| + (1 + \zeta) \|\bar{\alpha}CAL_1\| \leq \bar{\omega}, \\ & (1 + \zeta) \|\bar{\alpha}KC\| \leq \bar{\sigma}. \end{aligned}$$

第2个不等式的成立由 $0 < CBL_1 < I$ 及引理1保证.

接下来与定理1的证明步骤相似, 记 $\bar{V}_k = [E\|\delta u_k(0)\| \ E\|\delta u_k(1)\| \ \cdots \ E\|\delta u_k(N-1)\|]^T$, 很容易得到

$$\bar{H}\bar{V}_{k+1} \leq \bar{\Gamma}\bar{V}_k + M(\bar{\omega} + \bar{\sigma})\varepsilon, \tag{28}$$

其中:

$$\begin{aligned} \bar{H} &= \begin{bmatrix} I & 0 & \cdots & 0 \\ -\bar{\sigma}\|B\| & I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\bar{\sigma}\|A\|^{N-2}\|B\| & -\bar{\sigma}\|A\|^{N-3}\|B\| & \cdots & I \end{bmatrix}, \\ \bar{\Gamma} &= \begin{bmatrix} \bar{\rho} & 0 & \cdots & 0 \\ \bar{\omega}\|B\| & \bar{\rho} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{\omega}\|A\|^{N-2}\|B\| & \bar{\omega}\|A\|^{N-3}\|B\| & \cdots & \bar{\rho} \end{bmatrix}, \\ M &= \begin{bmatrix} I \\ A \\ \vdots \\ A^{N-1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

记 $\|M(\bar{\omega} + \bar{\sigma})\| \leq \phi$, 其中 ϕ 为常数. 注意到, $\bar{\Gamma}, \bar{H}$ 均为下三角矩阵, \bar{H} 对角线元素为 I , $\bar{\Gamma}$ 对角线元素为 $\bar{\rho} < 1$. 因此, $\limsup_{k \rightarrow \infty} \|V_{k+1}\| \leq \frac{\phi\varepsilon}{1 - \bar{\rho}}$. 结合式(24)可发现, $\|\delta x_k(t)\|$ 有界, 其界限与 ε 成比例. 因此, 存在一个适当的常数 γ , 使得 $\limsup_{x \rightarrow \infty} \|e_k(t)\| \leq \gamma\varepsilon$.

证毕.

4 数值仿真

考虑如下线性系统:

$$x_k(t+1) = \begin{pmatrix} -0.8 & -0.22 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x_k(t) + \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \end{pmatrix} u_k(t),$$

$$y_k(t) = (1 \ 0.5)x_k(t).$$

期望参考轨迹

$$y_d(t) = \sin(8t/50) + \sin(4t/50), \quad t \in [0, 100].$$

初始状态设定为对于所有 $k, x_k(0) = x_d(0) = 0$, 初始输入选为 $u_0(t) = 0$. 给定量化器参数 $z_0 = 2, \mu = 0.85$, 则 $\zeta = 0.08$. 分别选择学习增益 $L_1 = 0.8, L_2 = 0.3, K = 0.2$. 该算法执行20次迭代, 考虑系统在反馈辅助PD型学习律、PD型学习律、P型学习律下的收敛性能. 考虑3种数据包丢失的情况:

情况 1 无数据包丢失, 即 $\bar{\alpha} = 1$;

情况 2 10%的数据包丢失, 即 $\bar{\alpha} = 0.9$;

情况 3 40%的数据包丢失, 即 $\bar{\alpha} = 0.6$.

具体仿真结果如下:

情况 1 无数据丢失情况下, 图2(a)–2(c)分别描述在第2次、第3次、第5次、第20次迭代时, 反馈辅助PD型学习律、PD型学习律、P型学习律的跟踪性能. 图2(d)对比了不同学习律下系统沿迭代轴的跟踪误差. 图2(e)–2(f)描述了第3和5次迭代时, 3种学习律的跟踪效果.

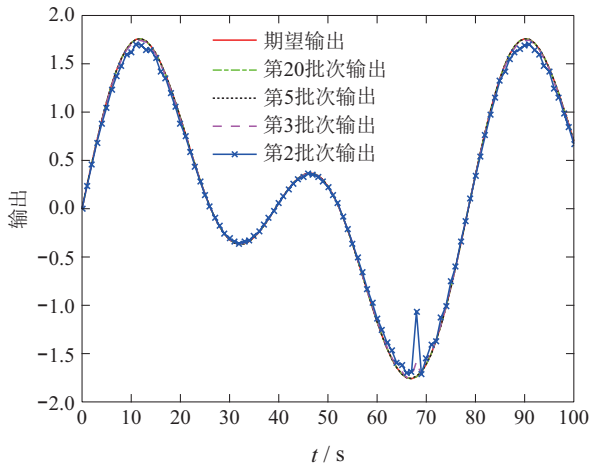
可以看出, 在无数据丢失情况下, 反馈辅助PD型学习律、PD型学习律、P型学习律均可保证零误差收

敛. 但反馈辅助PD型学习律效果最好, 在第3次迭代时几乎收敛到期望轨迹.

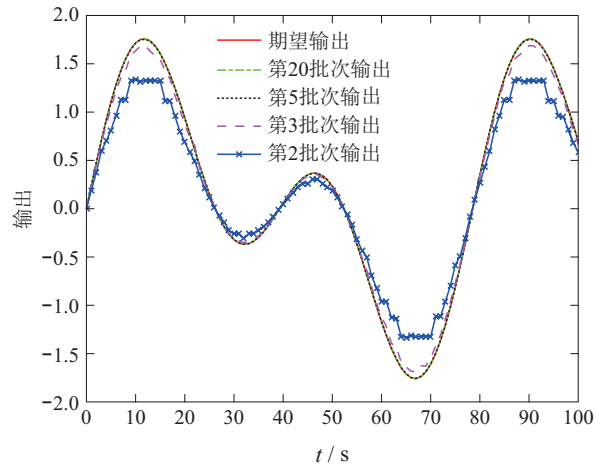
情况 2 10%数据丢失情况下, 图3(a)–3(c)分别描述在第2次、第3次、第5次、第20次迭代时, 反馈辅助PD型学习律、PD型学习律、P型学习律的跟踪性能. 图3(d)对比了不同学习律下系统沿迭代轴的跟踪误差.

差. 图3(e)–3(f)描述了第3和5次迭代时, 3种学习律的跟踪效果.

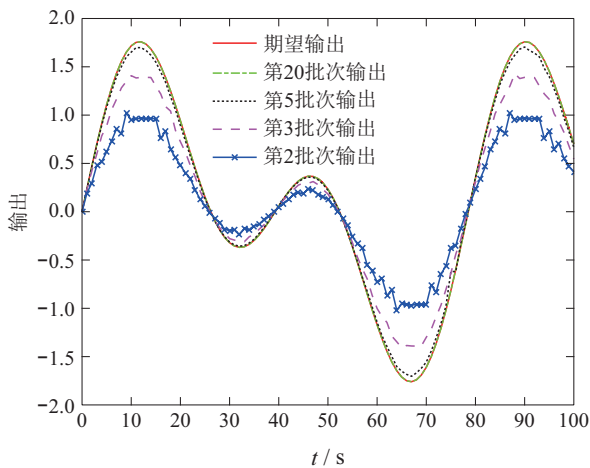
可以看出, 在10%数据丢失情况下, 反馈辅助PD型学习律、PD型学习律、P型学习律均可保证零误差收敛. 但反馈辅助PD型学习律效果最好、收敛速度最快.



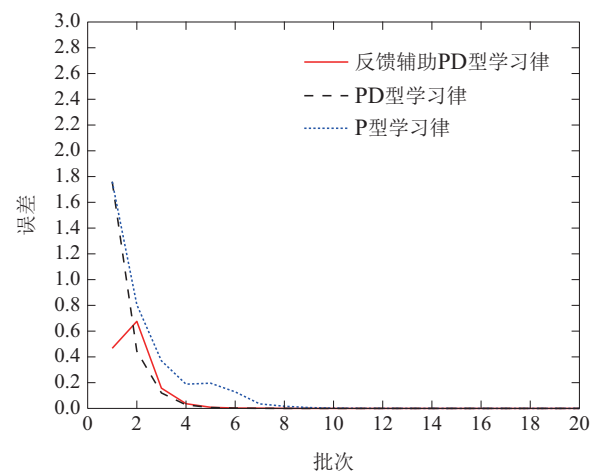
(a) 反馈辅助PD型学习律系统输出



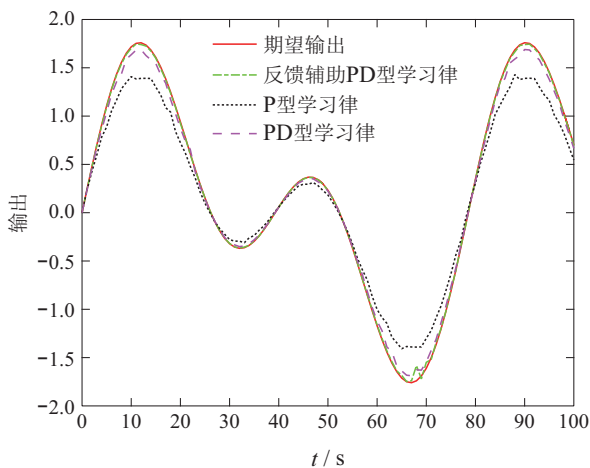
(b) PD型学习律系统输出



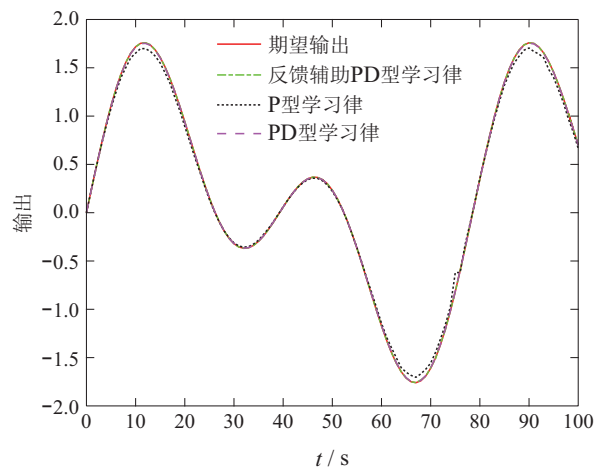
(c) P型学习律系统输出



(d) 不同学习律下的跟踪误差



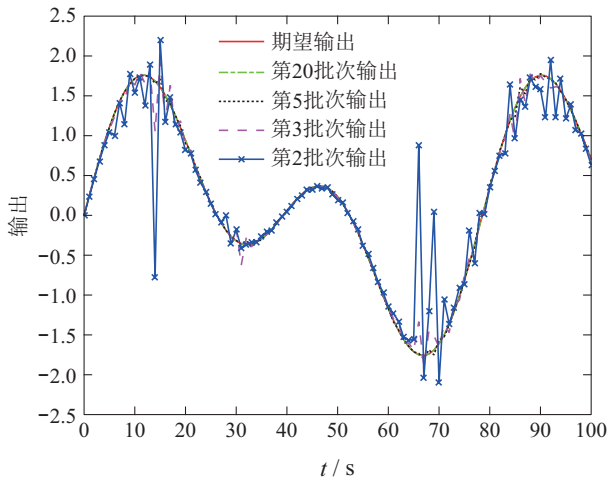
(e) 第3次迭代时不同学习律的跟踪效果



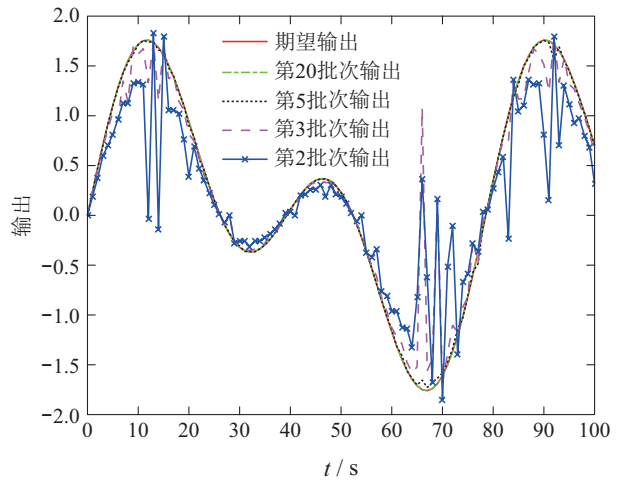
(f) 第5次迭代时不同学习律的跟踪效果

图 2 无数据丢失情况下

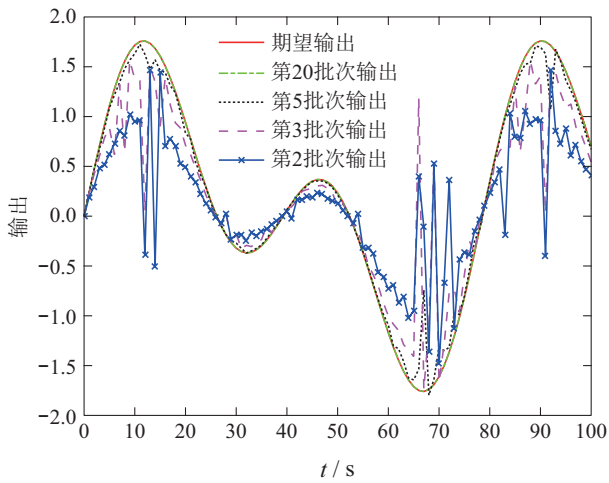
Fig. 2 No data loss



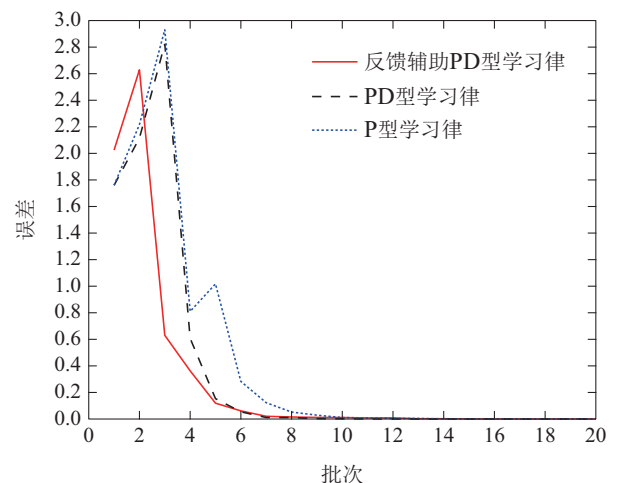
(a) 反馈辅助PD型学习律系统输出



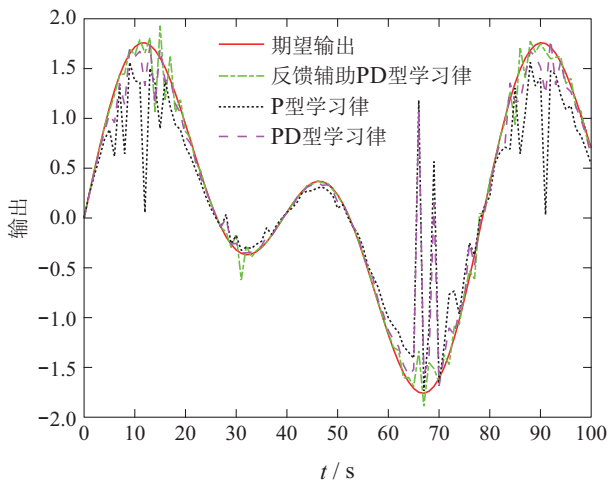
(b) PD型学习律系统输出



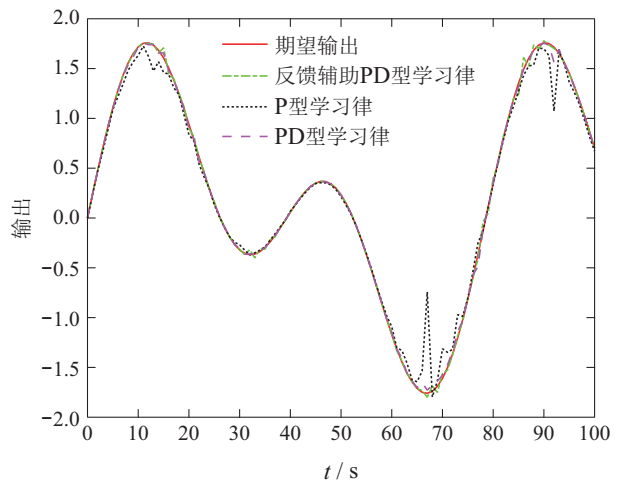
(c) P型学习律系统输出



(d) 不同学习律下的跟踪误差



(e) 第3次迭代时不同学习律的跟踪效果



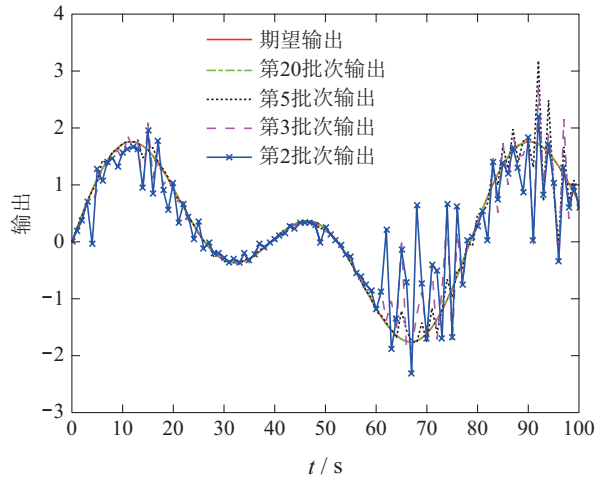
(f) 第5次迭代时不同学习律的跟踪效果

图3 10%数据丢失情况下

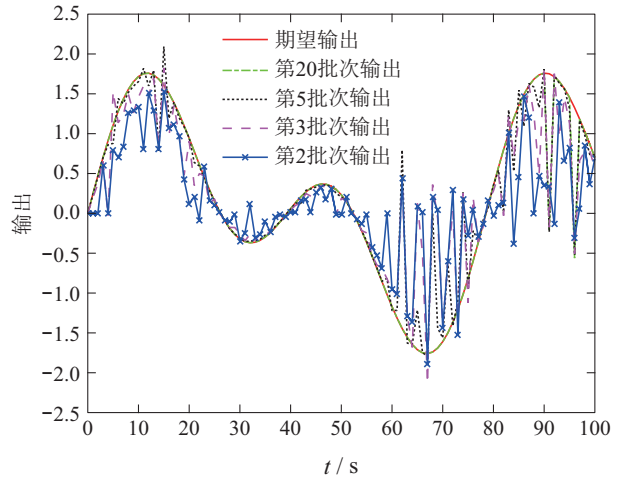
Fig. 3 10% data loss

情况 3 40%数据丢失情况下, 图4(a)–4(c)分别描述在第2次、第3次、第5次、第20次迭代时, 反馈辅助PD型学习律、PD型学习律、P型学习律的跟踪性能.

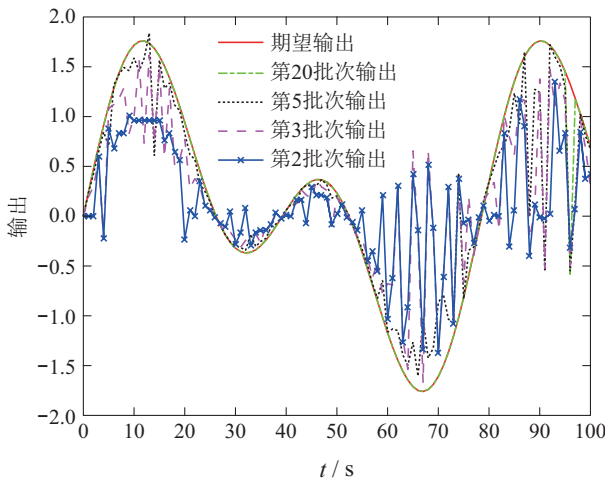
图4(d)对比了不同学习律下系统沿迭代轴的跟踪误差. 图4(e)–4(f)描述了第5和20次迭代时, 3种学习律的跟踪效果.



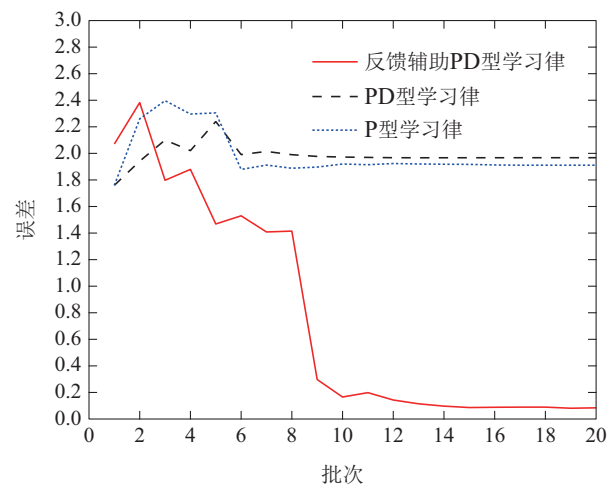
(a) 反馈辅助PD型学习律系统输出



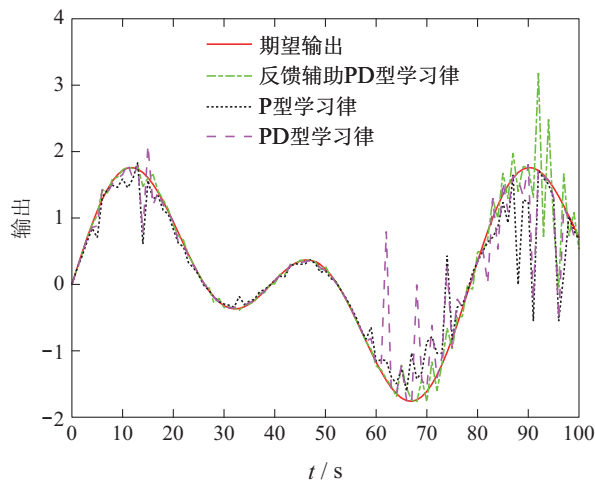
(b) PD型学习律系统输出



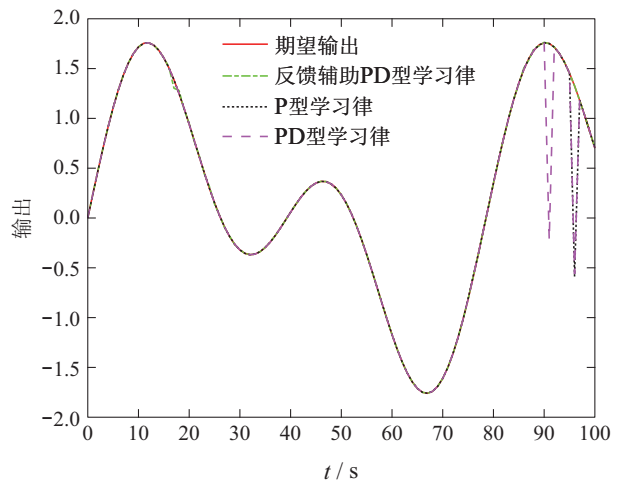
(c) P型学习律系统输出



(d) 不同学习律下的跟踪误差



(e) 第5次迭代时不同学习律的跟踪效果



(f) 第20次迭代时不同学习律的跟踪效果

图4 40%数据丢失情况下

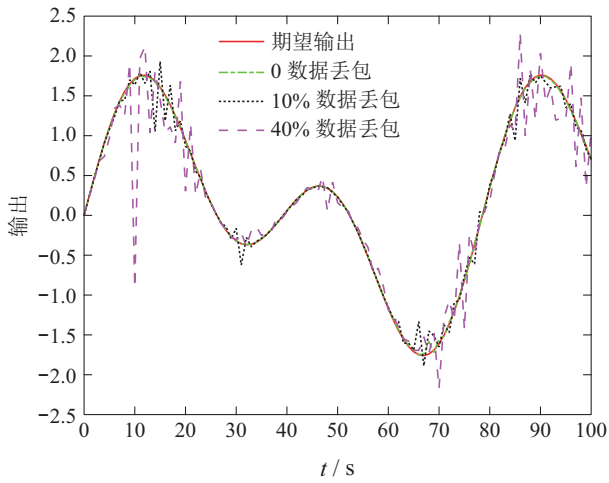
Fig. 4 40% data loss

可以看出, 在40%数据丢失情况下, 反馈辅助PD型学习律、PD型学习律、P型学习律均可保证零误差收敛. 但反馈辅助PD型学习律效果最好, 收敛速度最快.

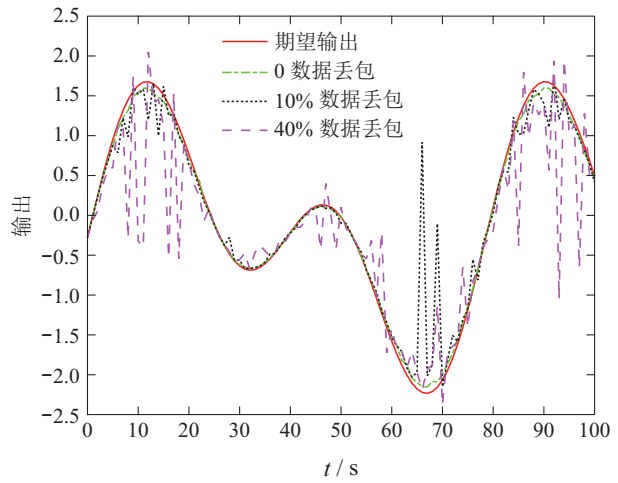
数据包丢失的影响: 图5(a)–5(f)分别在第3次迭代

时, 对比了0, 10%, 40%数据丢失情况下, 反馈辅助PD型学习律、PD型学习律、P型学习律的跟踪性能.

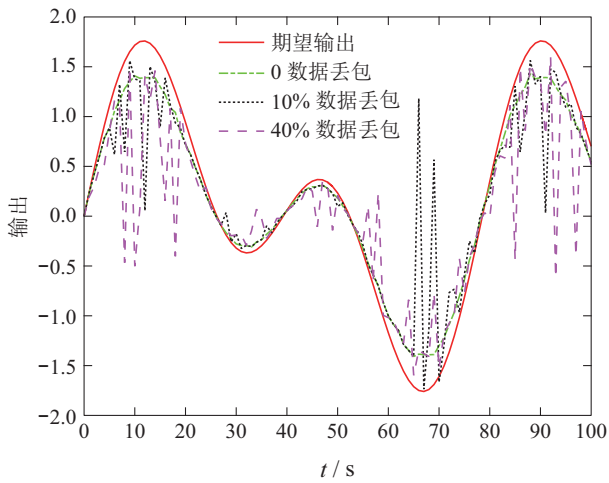
可以看出, 与情况1–2丢失0, 10%数据相比, 跟踪误差收敛速度变慢, 这与数据丢失程度增加有关. 但反馈辅助PD型迭代学习控制仍具有较好的收敛性能.



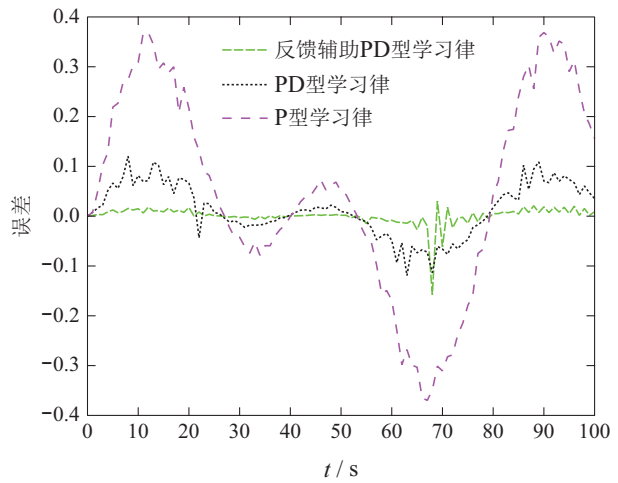
(a) 反馈辅助PD型学习律在第3次迭代时系统输出



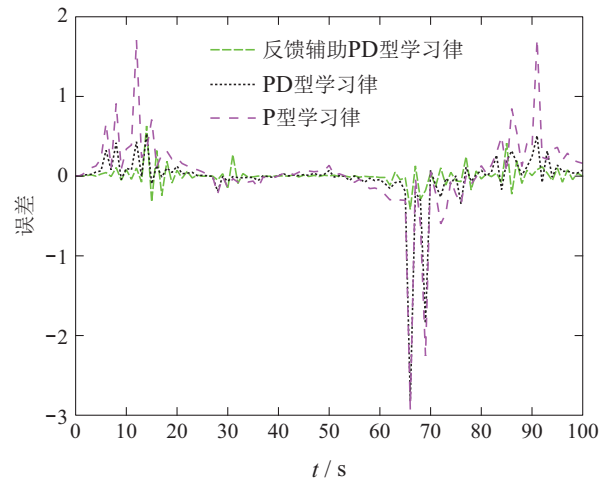
(b) PD型学习律在第3次迭代时系统输出



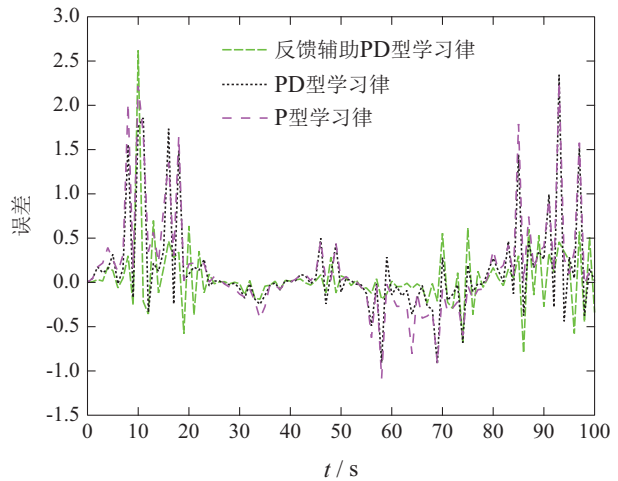
(c) P型学习律在第3次迭代时系统输出



(d) 无数据丢失时不同学习律在第3次迭代下的误差



(e) 10%数据丢失时不同学习律在第3次迭代下的误差



(f) 40%数据丢失时不同学习律在第3次迭代下的误差

图5 数据包丢失对学习律的影响

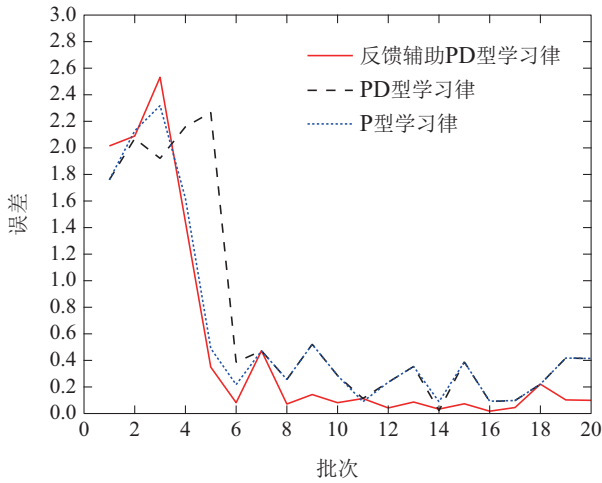
Fig. 5 Impact of packet loss on learning law

初态偏移的影响: 为了验证在不同初始状态下的收敛性, 让初始状态在 $[-\varepsilon, \varepsilon]$ 之间随机偏移, 令 $\varepsilon = 1, 2$. 如下图所示, 反馈辅助PD型迭代学习控制算法仍然保持稳健的性能, 同时可以发现, 较大的初始偏

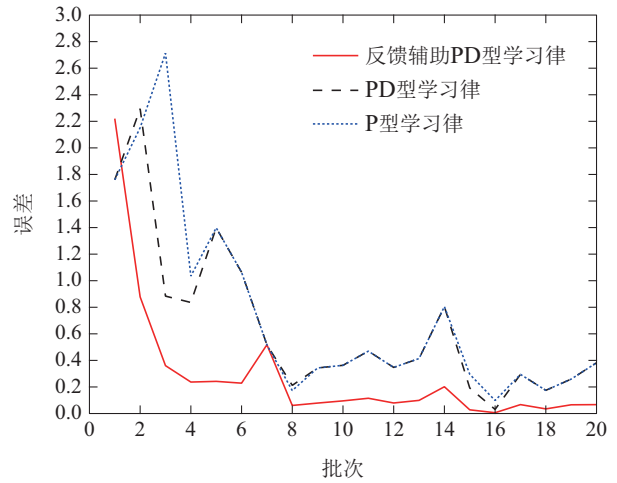
差会导致较大的跟踪误差范围.

情况1: 分别令 $\varepsilon = 1, 2, 10\%$ 的数据包丢失时, 3种学习律的跟踪误差.

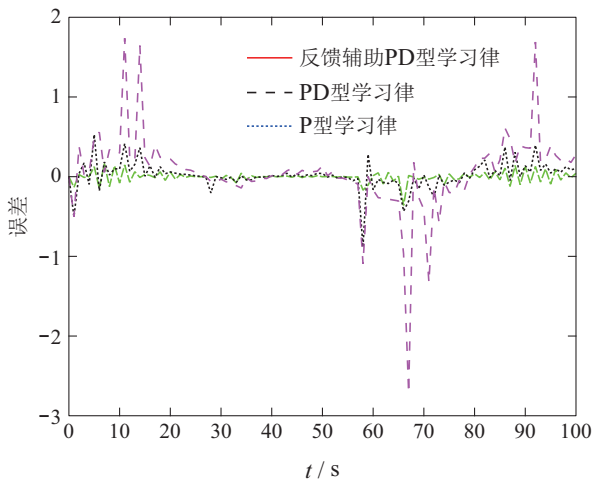
情况2: 令 $\varepsilon = 2$



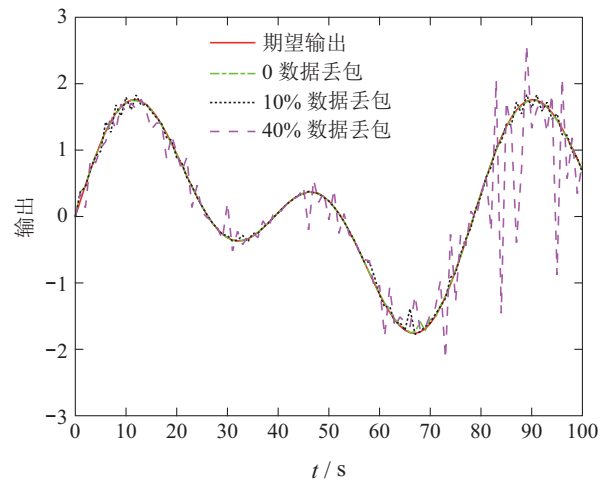
(a) $\epsilon = 1$



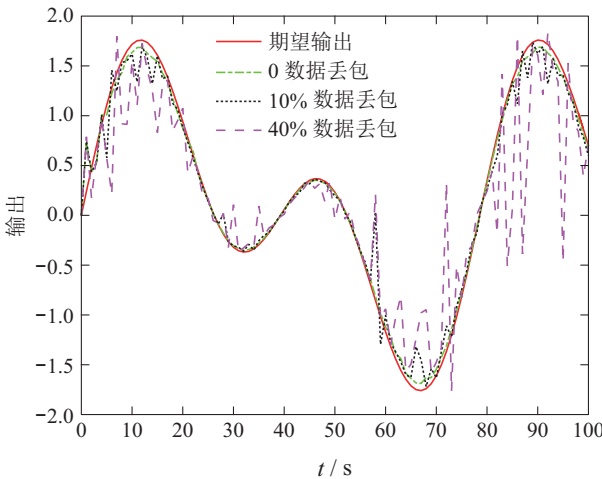
(b) $\epsilon = 2$



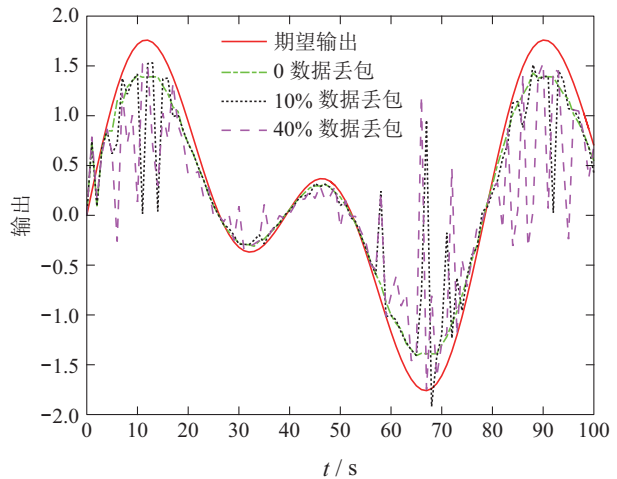
(c) 10%数据丢失时不同学习律在第3次迭代下的误差



(d) 反馈辅助PD型学习律在第3次迭代时系统输出



(e) PD型学习律在第3次迭代时系统输出



(f) P型学习律在第3次迭代时系统输出

图6 初态偏差对学习律的影响

Fig. 6 Initial state shifts on learning law

- 1) 10%的数据包丢失时, 在第3次迭代下, 3种学习律的跟踪效果.
- 2) 第3次迭代时, 3种学习律在无数据丢包、10%数据丢包、40%数据丢包下的跟踪效果.

5 结论

本文针对同时具有数据量化和数据包丢失的网络线性系统, 设计反馈辅助PD型迭代学习控制算法. 将数据包丢失描述为一个概率已知的伯努利过程, 采用

对数量化器,将量化的跟踪误差传送给控制器.利用前一批次和当前批次产生的跟踪误差信号来更新控制输入.当初始状态精确重置时,能保证零误差收敛,并加快系统的收敛速度.而对于初态偏移情况,则证明了跟踪误差与初始状态偏差的界成正比,且反馈辅助PD型迭代学习控制算法仍然保持稳健的性能,同时可以发现,较大的初始偏差会导致较大的跟踪误差范围.此外,反馈辅助PD型迭代学习控制引入了当前迭代跟踪误差的反馈.客观上说,应该有助于提升控制器对非重复干扰等因素的鲁棒性.如何进一步从非重复干扰鲁棒性的角度分析反馈辅助PD型迭代学习算法的优势将是笔者未来工作的重点.

参考文献:

- [1] ARIMOTO S, KAWAMURA S, MIYAZAKI F. Bettering operation of robots by learning. *Journal of Robotic Systems*, 1984, 1(2): 123 – 140.
- [2] DAI Xisheng, GUO Yajun, TIAN Senping, et al. Iterative learning control of nonlinear parabolic partial difference systems. *Control Theory & Applications*, 2015, 32(12): 1607 – 1612.
(戴喜生, 郭亚君, 田森平, 等. 非线性抛物型偏差分系统迭代学习控制. 控制理论与应用, 2015, 32(12): 1607 – 1612.)
- [3] GU Panpan, TIAN Senping. Iterative learning control for degenerating higher order parabolic distributed parameter systems. *Control Theory & Applications*, 2019, 36(7): 1147 – 1152.
(顾盼盼, 田森平. 退化高阶抛物型分布参数系统的迭代学习控制. 控制理论与应用, 2019, 36(7): 1147 – 1152.)
- [4] SUN M X, HUANG B J. *Iterative Learning Control*. Beijing: National Defense Industry Press, 1995.
- [5] DAI Xisheng, TIAN Senping. Iterative learning control for first order strong hyperbolic distributed parameter systems. *Control Theory & Applications*, 2012, 29(8): 1086 – 1089.
(戴喜生, 田森平. 一阶强双曲分布参数系统的迭代学习控制. 控制理论与应用, 2012, 29(8): 1086 – 1089.)
- [6] ZHOU Ying, HE Lei, ZHENG Feng. Iterative learning control for linear motor system with time delay and data dropout. *Control Theory & Applications*, 2017, 34(12): 1631 – 1636.
(周颖, 何磊, 郑凤. 具有时延和数据丢失的直线电机迭代学习控制. 控制理论与应用, 2017, 34(12): 1631 – 1636.)
- [7] LIU W, YU K J, TAN X G, et al. State estimation for networked systems with Markovian communication constraints and multiple packet dropouts. *Journal of the Franklin Institute*, 2018, 355: 878 – 901.
- [8] CHEN Chaoyang, GUI Weihua, GUAN Zhihong, et al. Optimal tracking performance of networked control systems under multi-constraints. *Control Theory & Applications*, 2017, 34(9): 1195 – 1200.
(陈超洋, 桂卫华, 关治洪, 等. 多通道约束下的网络控制系统的最优跟踪性能. 控制理论与应用, 2017, 34(9): 1195 – 1200.)
- [9] SHEN D. Iterative learning control with incomplete information: a survey. *CAA Journal of Automatica Sinica*, 2018, 5(5): 885 – 901.
- [10] YANG T C. Networked control system: a brief survey. *IEE Proceedings Control Theory and Applications*, 2006, 153(4): 403 – 412.
- [11] BU X, HOU Z, CUI L, et al. Stability analysis of quantized iterative learning control systems using lifting representation. *International Journal of Adaptive Control & Signal Process*, 2017, 31(9): 1327 – 1336.
- [12] YIN Y L, BU X H, LIANG J Q. Quantized iterative learning control design for linear systems based on a 2-D Roesser model. *Asian Journal of Control*, 2018, 20(3): 1058 – 1066.
- [13] XU Yun. *Iterative learning control and optimization under active-type incomplete data*. Beijing: Beijing University of Chemical Technology, 2017.
(许云. 主动不完备数据下迭代学习控制与优化. 北京: 北京化工大学, 2017.)
- [14] BU X H, WANG T H, HOU Z S, et al. Iterative learning control for discrete-time systems with quantised measurements. *IET Control Theory and Applications*, 2015, 9(9): 1455 – 1460.
- [15] XU Y, SHEN D. Zero-error convergence of iterative learning control using quantized error information. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 2017, 34(3): 1061 – 1077.
- [16] XU P P, BU X H, HOU Z S. Convergence analysis of quantized iterative learning control using lifting representation. *Chinese Control Conference*. Chengdu: IEEE, 2016: 3137 – 3141.
- [17] YIN Y L, BU X H, YAN S K, et al. Robust quantized ILC design for linear systems using a 2-D model. *Chinese Control and Decision Conference*. Yinchuan: IEEE, 2016: 4209 – 4214.
- [18] SHEN D, XU Y. Iterative learning control for discrete-time stochastic systems with quantized information stochastic systems with quantized information. *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, 2016, 3(1): 59 – 67.
- [19] SHEN D, ZHANG C, XU Y. Intermittent and successive ILC for stochastic nonlinear systems with random data dropouts. *Asian Journal of Control*, 2018, 20(3): 1102 – 1114.
- [20] SHEN D, XU J X. A novel Markov chain based ILC analysis for linear stochastic systems under general data dropouts environments. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, 62(11): 5850 – 5857.
- [21] ZHOU G L. *Finite-time iterative learning control: feedback-aided strategies*. Zhejiang: Zhejiang University of Technology, 2013.
(周国良. 有限时间迭代学习控制: 反馈辅助策略. 浙江: 浙江工业大学, 2013.)
- [22] SHEN D. A technical overview of recent progresses on stochastic iterative learning control. *Unmanned Systems*, 2018, 6(3): 147 – 164.
- [23] HUANG S N, TAN K K, LEE T H. Necessary and sufficient condition for convergence of iterative learning algorithm. *Automatica*, 2002, 38(7): 1257 – 1260.
- [24] SHEN D, ZHANG W, WANG Y Q, et al. On almost sure and mean square convergence of P-type ILC under randomly varying iteration lengths. *Automatica*, 2016, 63: 359 – 365.
- [25] BU X H, CUI Z Y, CUI L Z, et al. Robust quantized H_∞ ILC design for uncertain systems with communication constraints. *Information Technology and Control*, 2018, 47(3): 564 – 574.
- [26] LI Mu. *Optimal dynamic quantizer design and stability analysis of networked control systems*. Beijing: Beijing Institute of Technology, 2015.
(李牧. 网络化系统最优动态量化器设计与稳定性分析. 北京: 北京理工大学, 2015.)
- [27] FU M Y, XIE L H. The sector bound approach to quantized feedback control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, 50(11): 1698 – 1711.
- [28] SHEN D, XU J X. A framework of iterative learning control under random data dropouts: mean square and almost sure convergence. *International Journal of Adaptive Control & Signal Processing*, 2017, 31(12): 1825 – 1852.
- [29] SHEN D, ZHANG W, XU J X. Iterative learning control for discrete nonlinear systems with randomly iteration varying lengths. *Systems & Control Letters*, 2016, 96: 81 – 87.

作者简介:

周楠 硕士研究生, 目前研究方向为鲁棒量化迭代学习控制, E-mail: zhounan_zara@163.com;

王森 博士研究生, 目前研究方向为鲁棒控制、迭代学习控制、网络系统控制, E-mail: wangsmmm@126.com;

王晶 教授, 博士, 目前研究方向为复杂工业过程的建模、控制与故障诊断, E-mail: jwang@mail.buct.edu.cn;

沈栋 教授, 博士, 目前研究方向为迭代学习控制、复杂通信条件的网络控制系统、随机逼近、多智能体系统、分布式和分散式算法, E-mail: dshen@ieee.org.