

## 含不等式约束的欠驱动系统约束跟随控制

李 旻, 熊 亮, 尹 辉<sup>†</sup>, 上官文斌, 秦 武

(华南理工大学 机械与汽车工程学院, 广东 广州 510640)

**摘要:** 在运动控制领域, 欠驱动机械系统通常需要满足一系列的等式约束(完整或非完整的)以便获得较好的运动表现, 同时出于安全考虑还需要满足一定的不等式约束条件. 本文提出了一种约束跟随控制方法, 用以解决同时含等式和不等式约束的欠驱动系统控制问题. 该控制设计主要分为两步: 第1步: 只考虑系统需要满足的等式约束, 运用约束跟随控制方法推导出基于系统模型的状态反馈控制律; 第2步: 考虑系统需要满足的不等式约束, 先通过状态变量映射将不等式约束整合到原等式约束中以得到新的等式约束, 再基于新的等式约束和第1步所述的约束跟随控制方法, 推导出系统所需的状态反馈控制律. 将该约束跟随控制方法应用于三自由度非线性强耦合的欠驱动平面垂直起降(PVTOL)飞行器. 仿真结果表明, 该控制方法能有效处理PVTOL飞行器运动过程中需满足的等式约束(轨迹跟踪和姿态保持)和不等式约束(边界服从).

**关键词:** 欠驱动系统; 约束跟随控制; 不等式约束; PVTOL飞行器

**引用格式:** 李旻, 熊亮, 尹辉, 等. 含不等式约束的欠驱动系统约束跟随控制. 控制理论与应用, 2020, 37(9): 1971 – 1982

DOI: 10.7641/CTA.2020.90954

## Constraint-following control for underactuated systems with inequality constraints

LI Min, XIONG Liang, YIN Hui<sup>†</sup>, SHANGGUAN Wen-bin, QIN Wu

(School of Mechanical and Automotive Engineering, South China University of Technology, Guangzhou Guangdong 510640, China)

**Abstract:** In the field of motion control, underactuated mechanical systems are required to obey a set of holonomic and/or nonholonomic equality constraints in order to achieve better performance. On the other hand, due to the safety concerns, they also need to obey some inequality constraints. This paper endeavours to develop a constraint-following control methodology to solve the control problems of underactuated systems subject to both equality and inequality constraints. The control is designed in two steps. First, without considering the inequality constraints, constraint-following control design for underactuated systems is investigated. Second, a variable transformation technique is introduced to incorporate the inequality constraints into the equality constraints, yielding new equality constraints. The new equality constraints include the original equality constraints and the inequality constraints. Therefore, we are able to obtain the constraint-following control that renders the system to satisfy the original equality constraints and the inequality constraints, via designing the constraint-following control rendering the system to follow the new equality constraints based on the first step. The effectiveness of the proposed control is demonstrated on planar vertical take-off and landing (PVTOL) aircraft by numerical simulation, which has both equality constraints (trajectory tracking and attitude maintaining) and inequality constraints (boundary obedience).

**Key words:** underactuated system; constraint-following control; inequality constraint; PVTOL aircraft

**Citation:** LI Min, XIONG Liang, YIN Hui, et al. Constraint-following control for underactuated systems with inequality constraints. *Control Theory & Applications*, 2020, 37(9): 1971 – 1982

收稿日期: 2019–11–17; 录用日期: 2020–03–23.

<sup>†</sup>通信作者. E-mail: yinhui233@126.com; Tel.: +86 18673175203.

本文责任编辑: 方勇纯.

中国博士后科学基金项目(2019M652880), 华南理工大学中央高校基本科研业务费项目(2019MS064), 湖南大学汽车车身先进设计制造国家重点实验室开放基金项目(31915002)资助.

Supported by the China Postdoctoral Science Foundation (2019M652880), the Fundamental Research Funds for the Central Universities, SCUT (2019MS064) and the Open Funds for the State Key Laboratory of Advanced Design and Manufacture of Automobile Body of Hunan University (31915002).

## 1 引言

欠驱动机械系统是指控制输入数量小于自由度数的系统<sup>[1]</sup>. 与全驱动机械系统相比, 它通常配备更少的作动器, 具有体积小、重量轻和能耗低等优点<sup>[2]</sup>, 因此广泛应用于移动机器人、航空航天系统、柔性系统和水下机器人等工业领域中. 近年来, 欠驱动机械系统逐渐成为自动控制领域比较热门的研究对象, 其中有些系统甚至成为用来验证各种控制策略效果的经典案例<sup>[3-6]</sup>. 然而, 由于欠驱动的性质, 欠驱动系统往往表现出复杂的内部动力学特性, 给其控制研究带来很大困难. 目前, 很多学者将线性二次型调节器(linear quadratic regulator, LQR)控制<sup>[7-8]</sup>、滑模控制<sup>[9-10]</sup>、模糊控制<sup>[11-13]</sup>和反推演示控制<sup>[14-15]</sup>等传统控制方法应用于各式欠驱动系统复杂控制问题. Bullo等提出了欠驱动系统的位移和速度控制方法<sup>[16]</sup>; Pettersen等研究了欠驱动车辆系统轨迹跟踪和避障等多目标控制方法<sup>[17-20]</sup>; Azeloglu和Smoczek等提出了欠驱动起重机系统的自适应模糊逻辑控制器<sup>[21]</sup>和基于粒子群优化的广义预测控制<sup>[22]</sup>; Sun等提出了含不确定参数和双摆摆动效应的欠驱动起重机系统非线性稳定控制方法<sup>[23-24]</sup>.

Chen将Udwadia-Kalaba (U-K)方程<sup>[25-26]</sup>成功引入到需满足一系列等式约束(包括完整和不完整约束)的全驱动机械系统, 并首次提出了基于U-K方程的状态反馈约束跟随控制方法<sup>[27-29]</sup>. 该方法的基本思想是将系统控制目标(系统镇定、轨迹跟踪和最优控制等)设计成一系列的约束(约束数量与自由度数量可不相同), 控制任务即是驱动系统满足这些约束(因此为约束跟随控制). 相较于其他控制方法, 该方法不需要对非线性系统进行线性化, 且可在不出现任何辅助变量(如拉格朗日乘子)或伪变量(如广义速度)的情况下得到系统状态反馈控制律的显式方程, 此外, 所得的控制力满足高斯最小原理和达朗伯原理的拉格朗日形式, 实际过程中会提供适度的控制. 近年来, 基于U-K的约束跟随控制在全驱动不确定系统中得到了广泛的研究和应用. 然而, 基于U-K方程的约束跟随控制不适用于欠驱动系统. Yin等<sup>[30]</sup>进一步地将约束跟随控制方法扩展到含有等式约束的欠驱动系统, 实现了欠驱动二轮式移动机器人系统的轨迹跟踪控制. 但是, 利用约束跟随控制方法处理含有不等式约束的欠驱动系统, 目前尚未见到相关报道.

平面垂直起降(planar vertical take-off and landing, PVTOL)飞行器是一种典型的非线性强耦合欠驱动系统. 由于空气弹性效应、机翼的柔韧性、发动机的内部动力学以及众多变量的影响, 该系统的整个动力学相当复杂. Hauser等<sup>[31]</sup>简化了飞行器的结构, 只保留设计控制律时必须考虑的主要特征, 将PVTOL飞行器假设成一个三自由度的欠驱动系统, 该系统模型已成为欠驱动系统的一个经典案例<sup>[6]</sup>, 并被广泛应用于验

证各种控制方法的控制效果<sup>[32-36]</sup>. 文献<sup>[37-38]</sup>通过近似输入-输出线性化方法来研究该系统的稳定性、位置控制以及输出跟踪问题, 但在设计控制器时都忽略了滚动力矩和横向加速度之间的耦合, 而实际中这种耦合是不可忽略的. PVTOL飞行器在运动过程中常需要按照操纵者的意图进行轨迹跟踪和姿态保持控制, 且在收敛到目标轨迹或姿态的过程中需要服从一定的边界限制. 例如, 由于自身结构设计、功率及外部因素限制, 飞行器运动时存在最大飞行高度, 机翼存在最大摆角, 而现有的研究中大多没有考虑边界限制<sup>[39-41]</sup>.

在上述研究基础上, 本文提出了含不等式约束的欠驱动系统约束跟随控制方法. 首先, 只考虑系统需要满足的等式约束(完整或不完整约束), 运用约束跟随控制方法推导出基于系统模型的状态反馈伺服控制律; 其次, 考虑系统需要满足的不等式约束, 先通过状态变量映射将不等式约束整合到原等式约束中以得到新的等式约束, 再基于新的等式约束、新的系统模型和第一步中的约束跟随控制方法, 推导出系统所需的状态反馈伺服控制律; 最后, 将该约束跟随控制方法应用于三自由度非线性强耦合的PVTOL飞行器以验证其控制效果. 将PVTOL飞行器的轨迹跟踪和姿态保持表示成等式约束, 将飞行器质心在垂直方向上的高度限制表示成不等式约束. 仿真结果验证了该方法的有效性. 此外, 本文将该方法与现有的全驱动系统约束跟随控制方法和LQR控制方法进行了对比, 仿真结果表明该方法在处理诸如PVTOL飞行器等非线性强耦合的欠驱动系统控制问题时具有一定的优越性. 最后, 为进一步突出该方法的适用范围, 本文假设了一种等式约束(含完整和非完整约束)和不等式约束(含单边和双边不等式)同时存在的情况, 仿真结果表明该方法也可处理这类复杂问题.

## 2 处理等式约束的欠驱动系统约束跟随控制

### 2.1 系统描述

欠驱动机械系统动力学模型可表述为

$$\begin{aligned} M(q(t), \dot{q}(t), t)\ddot{q}(t) + C(q(t), \dot{q}(t), t)\dot{q}(t) + \\ G(q(t), \dot{q}(t), t) = B(q(t), \dot{q}(t), t)\tau(t), \end{aligned} \quad (1)$$

其中:  $t \in \mathbb{R}$ 为运动时间;  $q \in \mathbb{R}^n$ 为系统的位置矢量;  $n$ 为系统的自由度;  $\dot{q} \in \mathbb{R}^n$ 为系统的速度矢量;  $\ddot{q} \in \mathbb{R}^n$ 为系统的加速度矢量;  $\tau \in \mathbb{R}^m$  ( $m < n$ )为系统的控制输入矢量;  $M(q(t), \dot{q}(t), t)$ ,  $C(q(t), \dot{q}(t), t)$ ,  $G(q(t), \dot{q}(t), t)$ ,  $B(q(t), \dot{q}(t), t)$ 分别表示系统的惯性矩阵、科氏力矩阵、重力矩阵以及控制输入矩阵, 且假设它们都是连续可微的, 并且 $M(q(t), \dot{q}(t), t)$ 是对称正定的.

### 2.2 等式约束

假设系统需要满足 $m$ 个连续可微的等式约束, 包

括完整约束或非完整约束, 以下对这两种情形分别进行讨论.

**情形 1** 等式约束是完整的, 即约束方程中不包含坐标对时间的导数, 或者约束方程中微分项可以积分为有限形式, 如下所示:

$$\psi_i(q, t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (2)$$

其中:  $t \in \mathbb{R}$  为时间,  $q \in \mathbb{R}^n$  为系统的位置矢量, 约束(2)等效为

$$\ddot{\psi}_i(q, t) + \varphi_i \dot{\psi}_i(q, t) + \mu_i \psi_i(q, t) = 0, \quad (3)$$

其中:  $\varphi_i, \mu_i$  为正常数,  $i = 1, 2, \dots, m$ .

**注 1** 将  $\psi_i(q, t)$  作为一个整体, 则式(3)是一个二阶常系数齐次线性微分方程, 当系数都为正的常数时, 该方程的解随着时间的增加必趋近于0. 即在控制输入的作用下, 如果系统满足式(3), 则系统最终可渐进收敛到约束(2), 从而满足相应的控制目标. 值得提出的是, 若将式(3)展开, 则该方程可能是非线性的.

$\psi_i(q, t)$  对  $t$  求导得

$$\dot{\psi}_i(q, t) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \psi_i(q, t)}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \psi_i(q, t)}{\partial t}. \quad (4)$$

$\dot{\psi}_i(q, t)$  对  $t$  求导得

$$\begin{aligned} \ddot{\psi}_i(q, t) = & \sum_{k=1}^n \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \psi_i(q, t)}{\partial q_k \partial q_j} \dot{q}_k \dot{q}_j + \frac{\partial^2 \psi_i(q, t)}{\partial t \partial q_k} \dot{q}_k + \right. \\ & \left. \frac{\partial \psi_i(q, t)}{\partial q_k} \ddot{q}_k \right) + \frac{\partial^2 \psi_i(q, t)}{\partial t^2} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 \psi_i(q, t)}{\partial q_k \partial t} \dot{q}_k. \end{aligned} \quad (5)$$

将式(4)–(5)代入式(3)得

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n \frac{\partial \psi_i(q, t)}{\partial q_k} \ddot{q}_k = \\ & - \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial^2 \psi_i(q, t)}{\partial t \partial q_k} + \frac{\partial^2 \psi_i(q, t)}{\partial q_k \partial t} + \right. \\ & \left. \varphi_i \frac{\partial \psi_i(q, t)}{\partial q_k} \right) \dot{q}_k - \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \psi_i(q, t)}{\partial q_k \partial q_j} \dot{q}_k \dot{q}_j - \\ & \frac{\partial^2 \psi_i(q, t)}{\partial t^2} - \varphi_i \frac{\partial \psi_i(q, t)}{\partial t} - \mu_i \psi_i(q, t) =: b_i, \\ & i = 1, 2, \dots, m, \end{aligned} \quad (6)$$

则约束(3)可以表示成以下的矩阵形式:

$$\tilde{A}(q, t) \ddot{q} = \tilde{b}(q, \dot{q}, t), \quad (7)$$

其中:  $\tilde{A} = \left[ \frac{\partial \psi_i(q, t)}{\partial q_k} \right]_{m \times n}$ ,  $\tilde{b} = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_m]^T$ .

**情形 2** 等式约束是非完整的, 即约束方程包含坐标对时间的导数, 且微分项不利用动力学方程无法直接积分, 如下所示:

$$\psi_i(q, \dot{q}, t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (8)$$

其中:  $t \in \mathbb{R}$  为时间,  $q \in \mathbb{R}^n$  为系统的位置矢量,  $\dot{q} \in$

$\mathbb{R}^n$  为系统的速度矢量, 约束(8)等效为

$$\dot{\psi}_i(q, \dot{q}, t) + \rho_i \psi_i(q, \dot{q}, t) = 0, \quad (9)$$

其中:  $\rho_i$  为正常数,  $i = 1, 2, \dots, m$ .

**注 2** 将  $\psi_i(q, \dot{q}, t)$  作为一个整体, 则式(9)是一个一阶常系数齐次线性微分方程, 当系数为正的常数时, 该方程的解随着时间的增加必趋近于0. 即在控制输入的作用下, 如果系统满足式(9), 则系统最终可渐进收敛到约束(8), 从而满足相应的控制目标. 值得提出的是, 若将式(9)展开, 则该方程是非线性的.

$\psi_i(q, \dot{q}, t)$  对  $t$  求导得

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_i(q, \dot{q}, t) = & \sum_{k=1}^n \frac{\partial \psi_i(q, \dot{q}, t)}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \psi_i(q, \dot{q}, t)}{\partial t} + \\ & \sum_{k=1}^n \frac{\partial \psi_i(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k. \end{aligned} \quad (10)$$

将式(10)代入式(9)得

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n \frac{\partial \psi_i(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k = \\ & - \sum_{k=1}^n \frac{\partial \psi_i(q, \dot{q}, t)}{\partial q_k} \dot{q}_k - \rho_i \psi_i(q, \dot{q}, t) - \\ & \frac{\partial \psi_i(q, \dot{q}, t)}{\partial t} =: \bar{b}_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \end{aligned} \quad (11)$$

则约束(9)可表示成以下的矩阵形式:

$$\bar{A}(q, \dot{q}, t) \ddot{q} = \bar{b}(q, \dot{q}, t), \quad (12)$$

其中:  $\bar{A} = \left[ \frac{\partial \psi_i(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_k} \right]_{m \times n}$ ,  $\bar{b} = [\bar{b}_1 \ \bar{b}_2 \ \dots \ \bar{b}_m]^T$ .

由式(7)和式(12)可知, 两种情形下的等式约束都可以统一表示成以下的矩阵形式:

$$A(q, \dot{q}, t) \ddot{q} = b(q, \dot{q}, t). \quad (13)$$

**定义 1** 对于给定的矩阵  $A$  和  $b$ , 如果方程(13)至少存在一个解, 则称约束(13)是一致的.

**引理 1** 根据文献[42], 约束(13)一致的充要条件是  $AA^+b = b$ , 其中  $A^+$  表示  $A$  的 Moore-Penrose 广义逆矩阵.

**假设 1** 约束(13)是一致的.

**注 3** 假设1保证了约束(13)是实际可行的. 式(13)是一个通用的等式约束形式, 其既可以表示完整和非完整约束, 也可以表示文献[43–44]中的目标约束. 此外, 文献[27]中的控制目标(包括轨迹跟踪、系统镇定和最优控制等)都可以先设计成相应的约束, 再通过求导转换成约束(13)的形式. 因此, 约束(13)可以涵盖实际工程中大多数的控制目标.

**注 4** 将含  $n$  个自由度系统的镇定、轨迹跟踪等控制目标设计成相应的等式约束时, 约束数量不一定与自由度数相同<sup>[45–47]</sup>, 视具体情况而定即可.

### 2.3 处理等式约束的欠驱动系统约束跟随控制

对于给定的形如式(1)的欠驱动系统以及相应的系

统所需满足的等式约束(13), 控制律的求解主要按照以下两个步骤进行:

**步骤 1** 令  $\ddot{x} := M^{\frac{1}{2}}\ddot{q}$ ,  $a := M^{-\frac{1}{2}}(-C\dot{q} - G)$ , 则系统(1)和约束(13)分别可改写为

$$\ddot{x} = a + M^{-\frac{1}{2}}B\tau, \quad (14)$$

$$\Phi_1\ddot{x} = b, \quad (15)$$

其中  $\Phi_1 = AM^{-\frac{1}{2}}$ .

**定义 2** 对于所有的  $(q, \dot{q}, t) \in \Omega_q \times \Omega_{\dot{q}} \times \Omega_t$ , 如果控制输入  $\tau$  使得系统(14)满足约束(15), 则称系统(14)相对于约束(15)是伺服约束可控的.

令  $\bar{b} = b - \Phi_1 a$ ,  $\Phi_2 = M^{-\frac{1}{2}}B$ . 联立式(14)–(15), 可得关于控制输入  $\tau$  的约束方程:

$$(\Phi_1\Phi_2)\tau = \bar{b}. \quad (16)$$

**定义 3** 对于给定的  $\Phi_1, \Phi_2$  和  $\tau$ , 如果方程(16)至少存在一个解, 则方程(16)是一致的.

**假设 2** 约束(16)是一致的.

假设2保证了控制输入  $\tau$  的存在性. 对于所有的  $(q, \dot{q}, t) \in \Omega_q \times \Omega_{\dot{q}} \times \Omega_t$ , 由方程(16)可知控制输入的直接解为  $\tau = (\Phi_1\Phi_2)^+\bar{b}$ .

**步骤 2**

**定理 1** 若对于任意  $(q, \dot{q}, t) \in \Omega_q \times \Omega_{\dot{q}} \times \Omega_t$ , 都有下式成立:

$$\text{rank}[\Phi_1(q, \dot{q}, t)\Phi_2(q, \dot{q}, t)] \geq 1, \quad (17)$$

则系统(14)相对于约束(15)是伺服约束可控的, 相应的控制输入为

$$\tau = (\Phi_1\Phi_2)^+\bar{b} + [I - (\Phi_1\Phi_2)^+(\Phi_1\Phi_2)]S, \quad (18)$$

其中:  $t \in \Omega_t \subseteq \mathbb{R}$  为时间,  $q \in \Omega_q \subseteq \mathbb{R}^n$  为位置矢量,  $\dot{q} \in \Omega_{\dot{q}} \subseteq \mathbb{R}^n$  为速度矢量,  $S \in \mathbb{R}$  为任一矢量.

**证** 1) 充分性. 对所有的  $(q, \dot{q}, t) \in \Omega_q \times \Omega_{\dot{q}} \times \Omega_t$ ,  $\Phi_1\Phi_2$  的 Moore-Penrose 广义逆  $(\Phi_1\Phi_2)^+$  始终存在, 因此式(18)中控制输入  $\tau$  是有意义的. 将式(18)代入式(14), 两边同时乘以  $\Phi_1$  得

$$\begin{aligned} \Phi_1\ddot{x} &= \Phi_1\Phi_2\{(\Phi_1\Phi_2)^+\bar{b} + [I - (\Phi_1\Phi_2)^+\Phi_1\Phi_2]S\} + \Phi_1a = \\ &= \Phi_1\Phi_2(\Phi_1\Phi_2)^+\bar{b} + [\Phi_1\Phi_2 - \Phi_1\Phi_2(\Phi_1\Phi_2)^+ \\ &+ \Phi_1\Phi_2]S + \Phi_1a = \bar{b} + \Phi_1a = b. \end{aligned} \quad (19)$$

上式满足约束(15), 故该系统是伺服约束可控的.

2) 必要性. 若存在  $(q, \dot{q}, t) \in \Omega_q \times \Omega_{\dot{q}} \times \Omega_t$ , 使得

$$\text{rank}[\Phi_1(q, \dot{q}, t)\Phi_2(q, \dot{q}, t)] = 0, \quad (20)$$

则  $\Phi_1(q, \dot{q}, t)\Phi_2(q, \dot{q}, t) = 0$ . 将式(14)两边同时乘以  $\Phi_1$  得

$$\Phi_1\ddot{x} = \Phi_1a + \Phi_1\Phi_2\tau = \Phi_1a. \quad (21)$$

显然, 上式不满足约束(15). 故对于任意的  $(q, \dot{q}, t) \in \Omega_q \times \Omega_{\dot{q}} \times \Omega_t$ , 若系统伺服约束可控, 则必有  $\text{rank}[\Phi_1(q, \dot{q}, t)\Phi_2(q, \dot{q}, t)] \geq 1$  成立. 证毕.

以上过程称为处理等式约束的欠驱动系统约束跟随控制方法.

### 3 含不等式约束的欠驱动系统约束跟随控制

如第2.3节所述的约束跟随控制方法成功解决了欠驱动系统在等式约束下的控制输入求解问题, 但当系统同时存在不等式约束时, 该方法可能无法满足要求. 为同时处理含等式和不等式约束的欠驱动系统, 需要先通过状态变量映射将不等式约束整合到原等式约束中以得到新的等式约束, 再基于新的等式约束、新的系统模型和第2.3节所述的约束跟随控制方法, 推导出系统所需的状态反馈伺服控制律. 将该控制律加入到原系统中, 即可使原系统既满足等式约束要求又满足不等式约束要求.

#### 3.1 不等式约束

欠驱动机械系统(1)在运动过程中常需要服从一系列的不等式约束, 包括双边和单边不等式约束, 如下所示:

$$c_i < g_i^d(q, t) < \bar{c}_i, \quad i = 1, 2, \dots, L, \quad (22)$$

$$g_j^s(q, t) < c_j, \quad j = 1, 2, \dots, l - L, \quad (23)$$

其中:  $t \in \mathbb{R}$  为时间,  $q \in \mathbb{R}^n$  为系统的位置矢量,  $c_i, \bar{c}_i, c_j$  为常数,  $l (l \leq m)$  为总的不等式约束数量,  $L (L \leq l)$  为双边不等式约束的数量.

#### 3.2 含不等式约束的欠驱动系统约束跟随控制

现在假设系统需要同时满足如式(13)所需的  $m (m < n)$  个等式约束以及式(22)–(23)所示的  $l (l \leq m)$  个不等式约束. 此时, 控制律的求解主要按照以下两个步骤进行:

**步骤 1** 对于不等式约束(22)–(23), 定义状态变量映射如下:

$$T_i : z_i = \tan\left(\frac{\pi}{\bar{c}_i - c_i}g_i^d(q, t) - \frac{\pi(\bar{c}_i + c_i)}{2(\bar{c}_i - c_i)}\right) + \gamma_i, \quad (24)$$

$$T_j : z_j = \ln\left(\frac{c_j - g_j^s(q, t)}{c_j}\right), \quad (25)$$

其中:  $z_i, z_j$  分别是映射后的系统状态变量;  $\gamma_i$  是一常数, 可根据具体情况确定. 显然映射  $T_i, T_j$  满足

$$T_i : \Omega_i \rightarrow R, \quad g_i^d(q, t) \in \Omega_i = (c_i, \bar{c}_i), \quad (26)$$

$$T_j : \Omega_j \rightarrow R, \quad g_j^s(q, t) \in \Omega_j = (-\infty, c_j), \quad (27)$$

其中  $R = (-\infty, +\infty)$ . 即通过状态变量映射  $T_i, T_j$  可

将原含有不等约束的状态变量空间映射到无不等式约束的新状态变量空间, 此时新的状态变量 $z_i, z_j$ 就没有不等式约束限制了. 由于新空间的状态矢量 $\tilde{z} = [z_1 \ z_2 \ \cdots \ z_l]^T$ 的维数 $l$ 可能少于原空间状态矢量 $q$ 的维数 $n$ , 所以需要再添加 $n - l$ 个独立变量构成新空间 $n$ 维的状态矢量 $z = [z_1 \ z_2 \ \cdots \ z_l \ z_{l+1} \ \cdots \ z_n]^T$ , 其中 $z_{l+1} \ \cdots \ z_n$ 都是关于 $q$ 的函数. 再根据式(24)–(25)可推导出 $z$ 与 $q$ 的关系为

$$q = s(z, t). \quad (28)$$

上式对 $t$ 求导得

$$\dot{q} = \frac{\partial s(z, t)}{\partial z} \dot{z} + \frac{\partial s(z, t)}{\partial t}. \quad (29)$$

上式对 $t$ 求导得

$$\ddot{q} = \frac{\partial s(z, t)}{\partial z} \ddot{z} + \dot{z} \left( \frac{\partial^2 s(z, t)}{\partial z^2} \dot{z} + 2 \frac{\partial^2 s(z, t)}{\partial z \partial t} \right) + \frac{\partial^2 s(z, t)}{\partial t^2}. \quad (30)$$

将式(28)–(30)代入约束原等式约束(13)得到新的等式约束为

$$\hat{A}(z, \dot{z}, t) \ddot{z} = \hat{b}(z, \dot{z}, t), \quad (31)$$

其中:

$$\begin{cases} \hat{A} = A \frac{\partial s(z, t)}{\partial z}, \\ \hat{b} = b - A \left[ \dot{z} \left( \frac{\partial^2 s(z, t)}{\partial z^2} \dot{z} + 2 \frac{\partial^2 s(z, t)}{\partial z \partial t} \right) + \frac{\partial^2 s(z, t)}{\partial t^2} \right]. \end{cases} \quad (32)$$

将式(28)–(30)代入原系统动力学方程(1)得到新的动力学方程为

$$\begin{aligned} \hat{M}(z(t), \dot{z}(t), t) \ddot{z}(t) + \hat{C}(z(t), \dot{z}(t), t) \dot{z}(t) + \\ \hat{G}(z(t), \dot{z}(t), t) = \hat{B}(z(t), \dot{z}(t), t) \hat{\tau}(t), \end{aligned} \quad (33)$$

其中:

$$\begin{aligned} \hat{M} &= M \frac{\partial s(z, t)}{\partial z}, \quad \hat{\tau} = \tau, \quad \hat{B} = B, \\ \hat{C} &= C \frac{\partial s(z, t)}{\partial z} + M \left( \frac{\partial^2 s(z, t)}{\partial z^2} \dot{z} + 2 \frac{\partial^2 s(z, t)}{\partial z \partial t} \right), \\ \hat{G} &= G + M \frac{\partial^2 s(z, t)}{\partial t^2} + C \frac{\partial s(z, t)}{\partial t}. \end{aligned} \quad (34)$$

**步骤 2** 由步骤1得到新的系统动力学方程(33)及其需要满足的等式约束(31), 根据第2.3节所述处理等式约束的欠驱动系统约束跟随控制方法, 可得系统新的控制输入为

$$\hat{\tau} = (\Phi'_1 \Phi'_2)^+ \bar{b}' + [I - (\Phi'_1 \Phi'_2)^+ \Phi'_1 \Phi'_2] S', \quad (35)$$

其中:  $\Phi'_1 = \hat{A} \hat{M}^{-\frac{1}{2}}, \Phi'_2 = \hat{M}^{-\frac{1}{2}} \bar{b}', \bar{b}' = \hat{b} - \Phi'_1 a', a' = \hat{M}^{-\frac{1}{2}} (-\hat{C} \dot{z} - \hat{G}), S' \in \mathbb{R}$ 为任一矢量.

以上过程称为含不等式约束的欠驱动系统约束跟随控制方法.

**注 5** 处理含不等式约束的欠驱动系统控制问题时采用的是倒推的方法. 先假设不等式约束满足, 通过状态变量映射(24)–(25)得到新的无不等式约束系统模型(即系统动力学方程(33))以及新的等式约束(31), 再运用第2.3节所述的约束跟随控制方法求解相应新的控制输入. 将此控制输入代入到原系统中即可使原系统同时满足等式和不等式约束.

综合第3.1节和第3.2节所述, 处理欠驱动系统的约束跟随控制方法主要流程如图1所示.

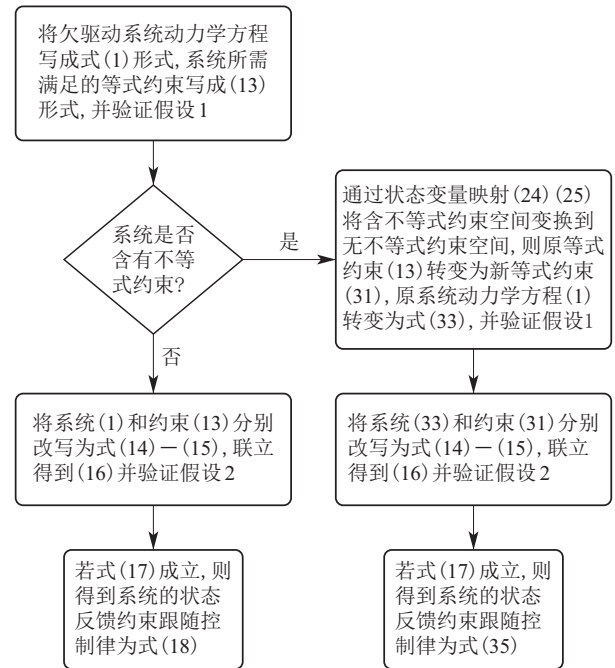


图1 欠驱动系统约束跟随控制方法设计过程

Fig. 1 Control design procedure for the underactuated systems

## 4 基于约束跟随的PVTOL飞行器运动控制

### 4.1 欠驱动PVTOL飞行器动力学模型

如图2所示为PVTOL飞行器运动简图. 系统的归一化动力学方程<sup>[31]</sup>为

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\sin \theta u_1 + \varepsilon \cos \theta u_2, \\ \ddot{y} = \cos \theta u_1 + \varepsilon \sin \theta u_2 - 1, \\ \ddot{\theta} = u_2. \end{cases} \quad (36)$$

该系统是一个双控制输入的三自由度欠驱动系统. 其中 $x, y$ 分别表示飞行器质心的水平与垂直位移,  $\theta$ 为机翼与水平方向的旋转夹角,  $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$ 为相应的加速度. 控制输入 $u_1$ 是飞行器底部垂直于机翼的推力, 控制输入 $u_2$ 是使飞行器旋转的转动力矩. “-1”表示归一化后的重力加速度,  $\varepsilon$ 是转动力矩与横向加速度之间的耦合系数. 将系统(36)写成式(1)的矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \theta & \varepsilon \cos \theta \\ \cos \theta & \varepsilon \sin \theta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad (37)$$

则式(1)中  $M, C, G, B, \tau$  可分别表示如下:

$$\begin{cases} M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, q = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix}, C = 0, G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ B = \begin{bmatrix} -\sin \theta & \varepsilon \cos \theta \\ \cos \theta & \varepsilon \sin \theta \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \tau = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}. \end{cases} \quad (38)$$

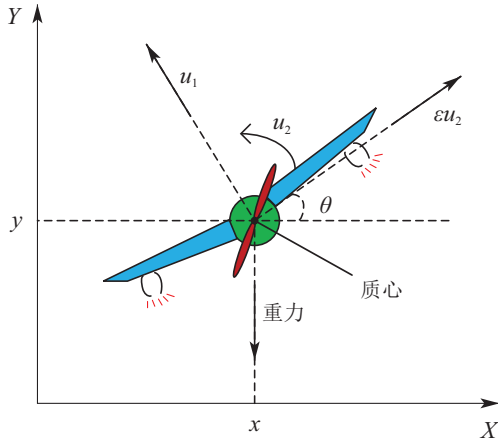


图2 平面垂直起降(PVTOL)飞行器

Fig. 2 Planar vertical take-off and landing (PVTOL) aircraft

### 4.2 只含等式约束(轨迹跟踪、姿态保持)时系统控制律求解

PVTOL 飞行器运动时经常需要进行轨迹跟踪和姿态保持控制, 因此需要满足相应的等式约束. 为验证本文约束跟随控制方法, 将控制目标设计成以下的等式约束形式:

$$\begin{cases} y = \mu \sin(\omega x) + H, & \text{目标轨迹,} \\ \theta = \beta, & \text{目标姿态,} \end{cases} \quad (39)$$

其中  $\mu, \omega, H, \beta$  都为常数.

定义跟踪误差:

$$\begin{cases} e_1 = y - \mu \sin(\omega x) - H, \\ e_2 = \theta - \beta. \end{cases} \quad (40)$$

定义误差函数:

$$\begin{cases} \varphi_1 = \ddot{e}_1 + \kappa_1 \dot{e}_1 + \kappa_2 e_1, \\ \varphi_2 = \ddot{e}_2 + \rho_1 \dot{e}_2 + \rho_2 e_2, \end{cases} \quad (41)$$

其中收敛系数  $\kappa_1, \kappa_2, \rho_1, \rho_2$  都为正的常数. 若要系统跟踪目标轨迹和目标姿态, 即当  $t \rightarrow \infty$  时, 跟踪误差  $e \rightarrow 0$ . 则由式(3)可知系统需满足如下等效的等式约束:

$$\begin{cases} \varphi_1 = 0, \\ \varphi_2 = 0. \end{cases} \quad (42)$$

将式(40)–(41)代入上式并写成式(13)统一的等式约束矩阵形式, 则  $A$  和  $b$  可表示为

$$\begin{cases} A = \begin{bmatrix} -\mu\omega \cos(\omega x) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ b = \begin{bmatrix} -\mu\omega^2 x^2 \sin(\omega x) - \kappa_1(\dot{y} - \mu\omega x \cos(\omega x)) - \kappa_2 e_1 \\ -\rho_1 \dot{\theta} - \rho_2(\theta - \beta) \end{bmatrix}. \end{cases} \quad (43)$$

显然矩阵  $A$  是行满秩的, 所以根据第 2.2 节引理 1 有  $AA^+b = (A^T A)^{-1} A^T A b = b$ , 假设 1 成立. 且由式(17)得

$$\begin{aligned} \Phi_1 \Phi_2 &= AM^{-1}B = \\ &= \begin{bmatrix} \mu\omega \sin \theta \cos(\omega x) + \cos \theta - \mu\omega \varepsilon \cos(\omega x) + \varepsilon \sin \theta \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (44)$$

显然  $\text{rank}[\Phi_1 \Phi_2] = 2 \geq 1$ , 故假设 2 成立, 该系统是伺服约束可控的. 于是由式(18)并令  $S = 0$  可得系统的状态反馈伺服控制律为

$$\tau = (AM^{-1}B)^+[b + AM^{-1}(C\dot{q} + G)]. \quad (45)$$

### 4.3 含不等式约束(边界服从)时系统控制律求解

实际情况中, PVTOL 飞行器由于自身结构设计、功率及外部因素限制, 飞行器运动时存在最大飞行高度. 由第 4.2 节所述, 在式(45)的控制输入下, 飞行器最终会满足等式约束(39)从而按照期望的轨迹和姿态运动. 但满足目标约束前会有一个收敛的过程. 由于飞行器的初始状态是未知的, 如果初始条件比较恶劣, 飞行器收敛到目标轨迹的过程中很可能会超出边界限制, 此时控制律(45)可能无法满足控制要求. 因此, 除等式约束(40)外, 考虑如下的不等式约束:

$$y < h, \quad (46)$$

其中  $h$  为飞行器质心在垂直方向能达到的最大高度. 根据式(25), 定义如下状态变量映射:

$$T: z_1 = \ln\left(\frac{h-y}{h}\right), \quad (47)$$

显然  $z_1 \in \mathbb{R}$ . 将原系统状态矢量  $q = [x \ y \ \theta]^T$  变换为新的状态矢量  $z = [x \ z_1 \ \theta]^T$ , 此时新的状态空间就没有不等式约束限制了. 将式(47)代入式(36)得新的系统动力学方程

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\sin \theta u_1 + \varepsilon \cos \theta u_2, \\ \ddot{z}_1 = \frac{\cos \theta u_1 + \varepsilon \sin \theta u_2 - 1}{-he^{z_1}} - \dot{z}_1^2, \\ \ddot{\theta} = u_2, \end{cases} \quad (48)$$

写成式(33)所示的矩阵形式, 可得

$$\hat{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \hat{\tau} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \hat{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dot{z}_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \hat{B} = \begin{bmatrix} -\sin \theta & \varepsilon \cos \theta \\ -\cos \theta & -\varepsilon \sin \theta \\ \frac{he^{z_1}}{0} & \frac{he^{z_1}}{1} \end{bmatrix}, \hat{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ \frac{1}{he^{z_1}} \end{bmatrix}. \quad (49)$$

将式(47)代入式(39)可得新的等式约束

$$z_1 = \ln\left(\frac{\mu \sin(\omega x) + H - h}{-h}\right), \theta = \beta. \quad (50)$$

重复第4.2节步骤, 由式(35)并令  $S = 0$  可得系统的状

$$\begin{cases} \hat{A} = \begin{bmatrix} \frac{\mu\omega \cos(\omega x)}{P} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \hat{b} = \begin{bmatrix} \frac{-\mu\omega^2 \dot{x}^2 \sin(\omega x)}{P} - \frac{T^2}{P^2} - \kappa_1(z_1 - \frac{T}{P}) - \kappa_2(z_1 - \ln(\frac{P}{-h})) \\ -\rho_1 \dot{\theta} - \rho_2(\theta - \beta) \end{bmatrix}, \\ T = \mu\omega \dot{x} \cos(\omega x), P = \mu \sin(\omega x) + H - h. \end{cases} \quad (52)$$

## 5 欠驱动PVTOL飞行器运动仿真结果

### 5.1 仿真案例 1

参照第3-4节所述, 设PVTOL飞行器系统的初始值为  $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 10 \text{ m/s}, y(0) = 99 \text{ m}, \dot{y}(0) = 40 \text{ m/s}, \theta(0) = 0.73 \text{ rad}, \dot{\theta}(0) = 1.5 \text{ rad/s}$ . 系统相应的参数如表1所示.

表 1 PVTOL 飞行器系统参数

Table 1 The system parameters of PVTOL aircraft

符号	说明	数值
$\varepsilon$	耦合系数	1
$H/m$	常数	90
$\mu$	常数	0.5
$\omega$	参数	0.1
$\beta/\text{rad}$	机翼目标摆角	0
$\kappa_{1,2}$	收敛系数	15
$\rho_{1,2}$	收敛系数	15
$h/m$	飞行器质心最大高度	100

考虑系统需满足的等式约束(39)与不等式约束(46), 分别采用控制律(45)(51), 仿真结果如图3-6所示.

图3为PVTOL飞行器质心在竖直平面上的运动轨迹; 图4为PVTOL飞行器运动过程中机翼与水平方向夹角; 图5和图6分别为控制输入  $u_1$  和  $u_2$ . 仿真结果表明:

a) 系统在控制律(45)的作用下, 飞行器质心在竖直平面上的运动轨迹最终收敛于目标轨迹, 飞行器机翼最终保持目标姿态(机翼与水平方向夹角为0), 满足等式约束(39)要求. 所以处理等式约束的欠驱动系统约束跟踪状态反馈控制律(45)是有效的. 但飞行器质心在垂直方向上的最大位移会超过最大高度限制  $y = 100 \text{ m}$ .

b) 系统在控制律(51)的作用下, 飞行器质心在竖直平面上的运动轨迹最终收敛于目标轨迹, 飞行器机

态反馈伺服控制律为

$$\hat{\tau} = (\hat{A}\hat{M}^{-1}\hat{B})^+[\hat{b} + \hat{A}\hat{M}^{-1}(\hat{C}\dot{z} + \hat{G})], \quad (51)$$

其中:

翼最终保持目标姿态(机翼与水平方向夹角为0), 且飞行器质心垂直方向最大高度不超过最大高度限制  $y = 100 \text{ m}$ , 同时满足等式约束(39)和不等式约束(46)要求. 所以, 处理含不等式约束的欠驱动系统约束跟踪状态反馈控制律(51)是有效的.

c) 图5表明, 若要飞行器质心在垂直方向的位移不超过最大高度(考虑不等式约束), 则系统控制输入需要相应的增大, 控制成本相对提高, 这也符合实际情况.

为进一步比较系统考虑不等式约束前后飞行器运动表现的差异, 本文还设置了一系列的初始条件组合, 通过仿真得到每组初始条件下飞行器质心在垂直方向的最大位移, 如图7所示.

显然, 由图7可知只考虑等式约束, 采用控制律(45)时, 在部分初始条件组合下, 飞行器质心垂直方向最大位移将超过最大的允许高度100 m; 由图8可知当考虑等式和不等式约束, 采用控制律(51)时, 无论何种初始条件组合, 飞行器质心垂直方向最大位移均小于最大的允许高度  $y = 100 \text{ m}$ .

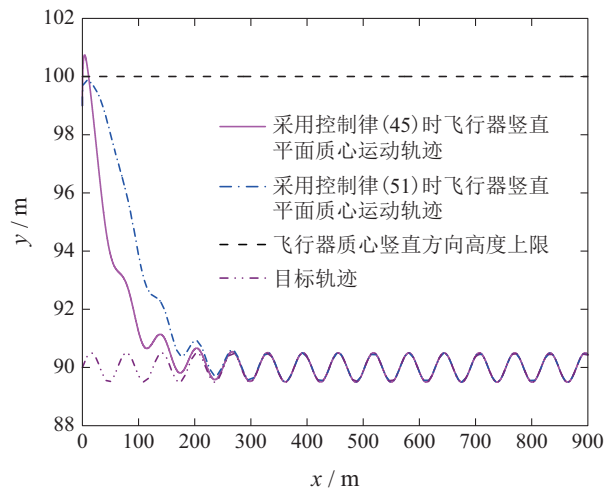


图 3 PVTOL 飞行器质心在竖直平面上的运动轨迹

Fig. 3 Trajectory of the center of mass of PVTOL aircraft in the vertical plane

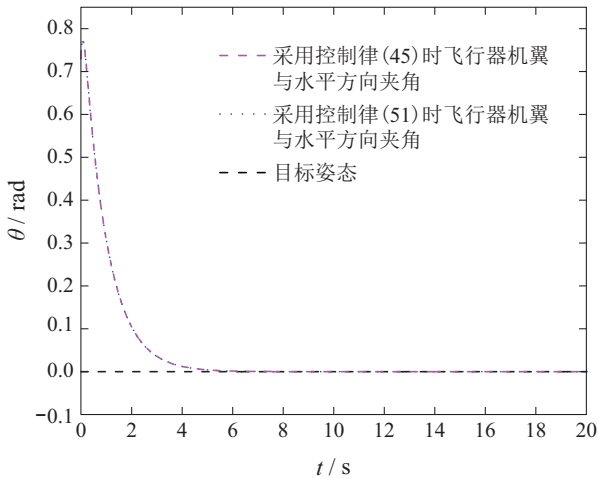


图4 PVTOL飞行器机翼与水平方向夹角

Fig. 4 PVTOL aircraft wing Angle with the horizontal direction in the time history

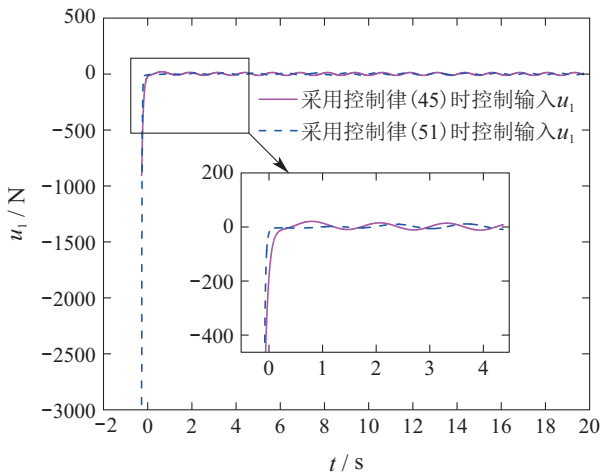


图5 控制输入 $u_1$

Fig. 5 The control input  $u_1$  in the time history

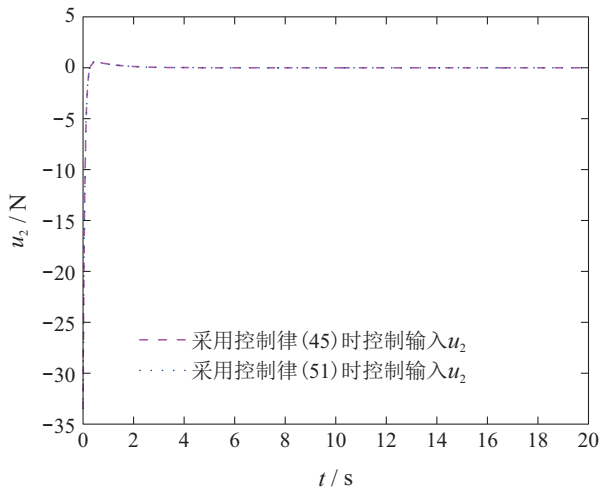


图6 控制输入 $u_2$

Fig. 6 The control input  $u_2$  in the time history

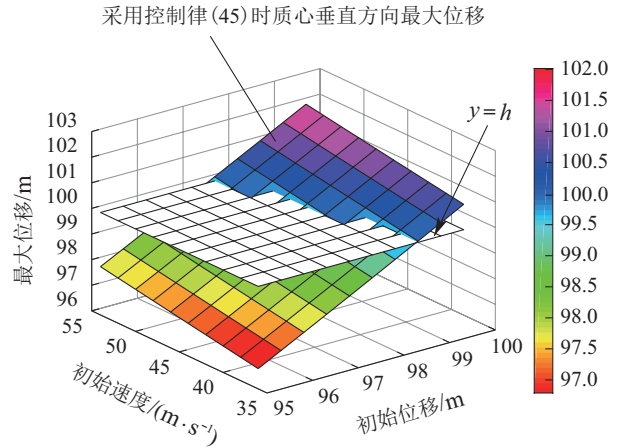


图7 只考虑等式约束,采用控制律(45)时飞行器质心垂直方向最大位移

Fig. 7 Maximal vertical displacement  $y$  of the center of mass of PVTOL aircraft in the time history under the control obtained by (45) which only considering equality constraints

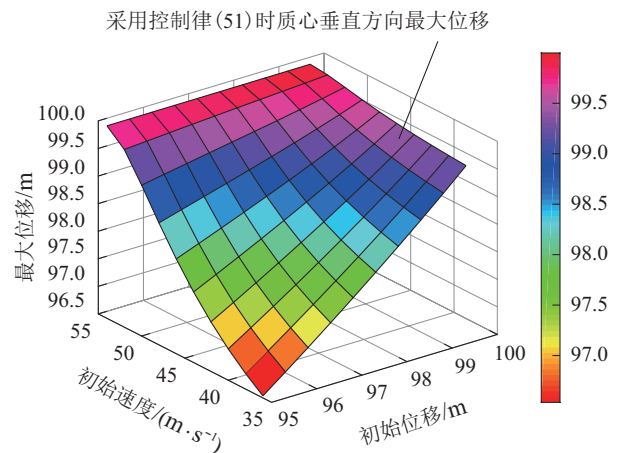


图8 考虑不等式约束,采用控制律(51)时飞行器质心垂直方向最大位移

Fig. 8 Maximal vertical displacement  $y$  of the center of mass of PVTOL aircraft in the time history under the control obtained by (51) which considering inequality constraint

此外,为比较不同控制方法对PVTOL飞行器控制效果的差异,本文将关于欠驱动系统的约束跟随控制方法与基于U-K方程的全驱动系统约束跟随控制方法<sup>[27-28]</sup>和LQR方法<sup>[7-8]</sup>对比如图9-10所示.

显然,由图9可知,基于U-K方程的全驱动系统约束跟随控制方法并不能解决欠驱动PVTOL飞行器系统的轨迹跟踪问题,而本文提到的欠驱动系统约束跟随控制方法能实现PVTOL飞行器的轨迹跟踪;由图10可知,传统的LQR控制方法无法解决非线性PVTOL飞行器系统的姿态保持问题,而本文提到的欠驱动系统约束跟随控制方法能实现PVTOL飞行器的姿态保持.



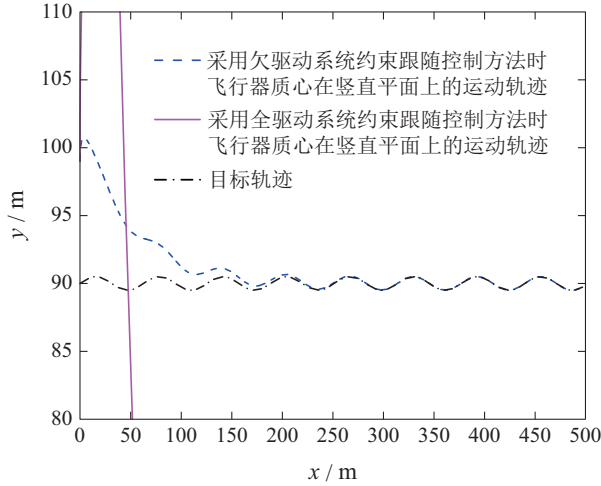


图9 欠驱动与全驱动系统的约束跟随控制方法比较

Fig. 9 Comparison between constraint-following control for underactuated systems and fullactuated systems

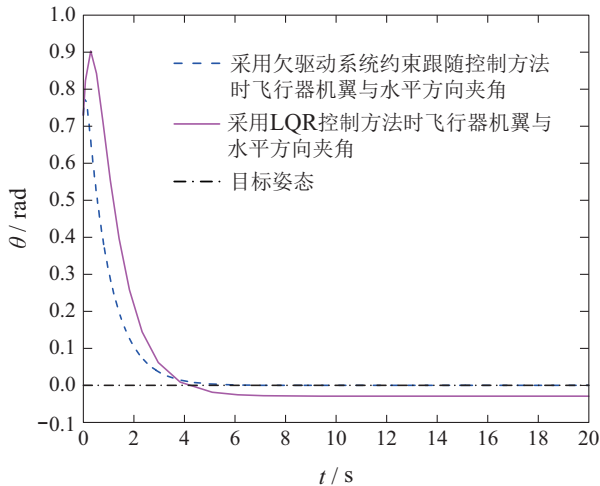


图10 欠驱动系统约束跟随控制方法与LQR控制方法比较  
Fig. 10 Comparison between constraint-following control for underactuated systems and LQR control

### 5.2 仿真案例2

第5.1节所述的仿真案例表明本文提出的欠驱动系统约束跟随控制方法能够同时处理式(39)所示的完整等式约束(轨迹跟踪和姿态保持)和式(46)所示的单边不等式约束(边界服从), 具有一定的现实意义. 为进一步丰富该方法的适用范围, 如下举出一例同时含有等式约束(包含完整和非完整约束)和不等式约束(包含单边和双边不等式约束)的案例:

$$\begin{cases} y = \dot{x}, & \text{不完整约束,} \\ \theta = 0, & \text{完整约束,} \end{cases} \quad (53)$$

$$\begin{cases} y < 100, & \text{单边不等式约束,} \\ -\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4}, & \text{双边不等式约束.} \end{cases} \quad (54)$$

参照前文所述, 设PVTOL飞行器系统初始条件为

$$\begin{aligned} x(0) &= 0, \quad \dot{x}(0) = 20 \text{ m/s,} \\ y(0) &= 99 \text{ m,} \quad \dot{y}(0) = 60 \text{ m/s,} \\ \theta(0) &= 0.73 \text{ rad,} \quad \dot{\theta}(0) = 2.5 \text{ rad/s.} \end{aligned}$$

仿真结果如图11-14所示. 仿真结果表明:

相对于以往针对欠驱动系统的控制方法大多只处理了系统所涉及的完整等式约束问题, 文本所提出的含不等式约束的欠驱动系统约束跟随控制方法能够同时处理含有等式约束(包含完整和非完整约束)和不等式约束(包含单边和双边不等式约束)等较为复杂的情况, 具有较强的适用性.

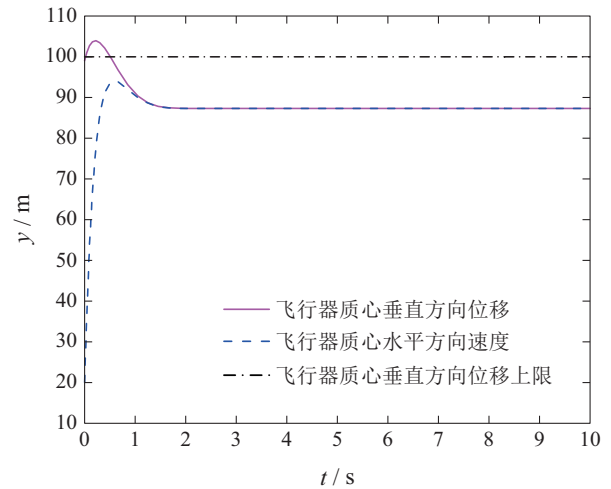


图11 只考虑等式约束(53), PVTOL飞行器质心竖直方向位移

Fig. 11 Vertical displacement  $y$  of the center of mass of PVTOL aircraft in the time history by only considering equality constraints (53)

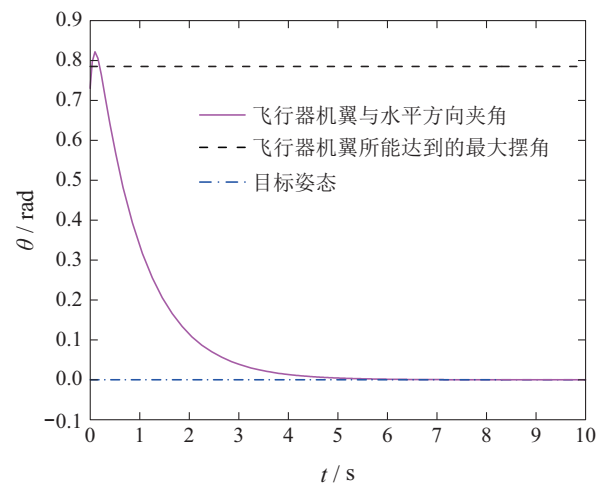


图12 只考虑等式约束(53), PVTOL飞行器机翼与水平方向夹角

Fig. 12 PVTOL aircraft wing Angle with the horizontal direction in the time history by only considering equality constraints (53)

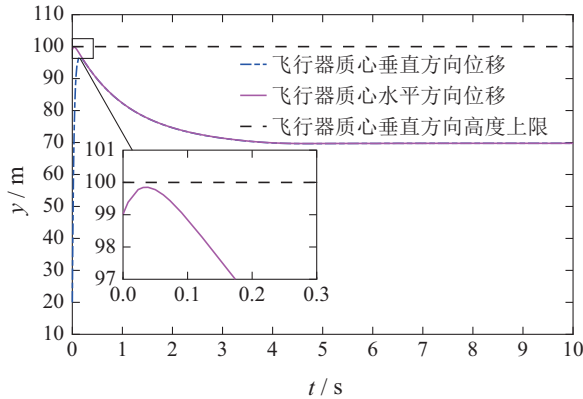


图 13 同时考虑约束(53)–(54), PVTOL 飞行器质心竖直方向位移

Fig. 13 Vertical displacement  $y$  of the center of mass of PVTOL aircraft in the time history by considering constraints (53)–(54)

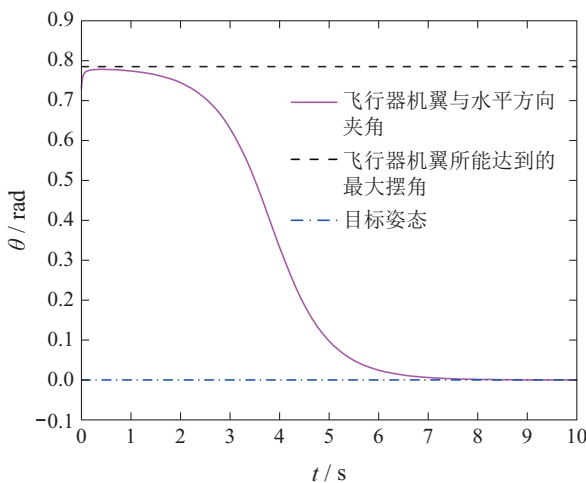


图 14 同时考虑约束(53)–(54), PVTOL 飞行器机翼与水平方向夹角

Fig. 14 PVTOL aircraft wing Angle with the horizontal direction in the time history by considering constraints (53)–(54)

## 6 结论

对欠驱动机械系统的控制一直是控制领域比较棘手的难题. 本文在相关研究基础上提出了一种含不等式约束的欠驱动系统约束跟随控制方法, 该控制方法既能保证系统的性能表现又满足相应的安全需求. 本文的主要内容可总结为如下几点:

1) 针对控制领域比较棘手的欠驱动系统运动控制问题, 本文提出了一种新颖的解决方法. 该方法将基于等式约束的欠驱动系统约束跟随控制与状态变量映射方法相结合, 可同时处理含等式约束(完整和非完整约束)和不等式约束(单边和双边不等式约束)的欠驱动系统, 且不需要对非线性系统进行线性化, 可在不出现任何辅助变量(如拉格朗日乘子)或伪变量(如广义速度)的情况下得到系统状态反馈控制律的

显式方程.

2) 将该约束跟随控制方法成功应用于三自由度非线性强耦合的欠驱动PVTOL飞行器运动控制上. 首先, 将飞行器的轨迹跟踪和姿态保持表示成等式约束, 将飞行器质心在垂直方向上的高度限制表示成不等式约束; 其次, 运用约束跟随控制方法求解出飞行器在等式约束下的控制律, 仿真结果表明该控制律满足要求; 最后, 运用状态变量映射方法将不等式约束整合到原等式约束中得到新的等式约束和新的系统模型, 即可将含有不等式约束的状态空间变换到无不等式约束空间, 再次运用约束跟随控制求出系统的控制律. 仿真结果表明该控制律可以使PVTOL飞行器同时满足轨迹跟踪、姿态保持和边界限制的要求.

3) 将本文所提的含不等式约束的欠驱动系统约束跟随控制方法分别与基于U-K方程的全驱动系统约束跟随控制方法以及传统的LQR控制方法相比较. 仿真结果表明, 基于U-K方程的全驱动系统约束跟随控制方法并不能实现欠驱动PVTOL飞行器系统的轨迹跟踪, 传统的LQR控制方法也无法实现非线性强耦合PVTOL飞行器系统的姿态保持. 而本文所提的欠驱动系统约束跟随控制方法能够处理诸如PVTOL飞行器等非线性强耦合欠驱动系统的控制问题, 且能够同时处理等式与不等式约束, 从而证明了该方法具有一定的优越性.

## 参考文献:

- [1] SEIFRIED R. *Dynamics of Underactuated Multibody Systems*. Berlin: Springer, 2014: 1–2.
- [2] WU Xianqing, ZHANG Yibo. Sliding mode control of the cascade-based translation oscillators with rotating actuator system. *Control Theory & Applications*, 2020, 37(2): 307–315.  
(武宪青, 张益波. 基于级联型具有旋转激励的平移振荡器系统的滑模控制. *控制理论与应用*, 2020, 37(2): 307–315.)
- [3] SHE J, ZHANG A, LAI X, et al. Global stabilization of 2-DOF underactuated mechanical systems—an equivalent-input-disturbance approach. *Nonlinear Dynamics*, 2012, 69(1/2): 475–509.
- [4] EI-HAWWARY M I, ELSHAFAEI A L, EMARA H M, et al. Adaptive fuzzy control of the inverted pendulum problem. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2006, 14(6): 1135–1144.
- [5] RUDRA S, BARAI R K, MAITRA M. Nonlinear state feedback controller design for underactuated mechanical system: a modified block backstepping approach. *ISA Transactions*, 2014, 53(2): 317–326.
- [6] FANTONI I, LOZANO R. *Nonlinear Control for Underactuated Mechanical Systems*. London: Springer-Verlag, 2002: 173–194.
- [7] MARTON L, HODEL A S, LANTOS B, et al. Underactuated robot control: comparing LQR, subspace stabilization, and combined error metric approaches. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2008, 55(10): 3724–3730.
- [8] LEE K, COVERSTONE-CARROLL V. Control algorithms for stabilizing underactuated robots. *Journal of Robotic Systems*, 1998, 15(12): 681–697.

- [9] SUN Z, ZHANG G, LU Y, et al. Leader-follower formation control of underactuated surface vehicles based on sliding mode control and parameter estimation. *ISA Transactions*, 2018, 72: 15 – 24.
- [10] XU R, OZGUNER U. Sliding mode control of a class of underactuated systems. *Automatica*, 2008, 44(1): 233 – 241.
- [11] XU J X, GUO Z Q, LEE T H. Synthesized design of a fuzzy logic controller for an underactuated unicycle. *Fuzzy Sets and Systems*, 2012, 207: 77 – 93.
- [12] XU J X, GUO Z Q, LEE T H. Design and implementation of a Takagi-Sugeno-type fuzzy logic controller on a two-wheeled mobile robot. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2012, 60(12): 5717 – 5728.
- [13] YU C, XIANG X, LAPIERRE L, et al. Nonlinear guidance and fuzzy control for three-dimensional path following of an underactuated autonomous underwater vehicle. *Ocean Engineering*, 2017, 146: 457 – 467.
- [14] PAN Yongping, HUANG Daoping, SUN Zonghai. Backstepping adaptive fuzzy control for track-keeping of underactuated surface vessels. *Control Theory & Applications*, 2011, 28(7): 907 – 914.  
(潘永平, 黄道平, 孙宗海. 欠驱动船舶航迹Backstepping自适应模糊控制. 控制理论与应用, 2011, 28(7): 907 – 914.)
- [15] RUDRA S, BARAI R K, MAITRA M. Nonlinear state feedback controller design for underactuated mechanical system: a modified block backstepping approach. *ISA Transactions*, 2014, 53(2): 317 – 326.
- [16] BULLO F, LEONARD N E, LEWIS A D. Controllability and motion algorithms for underactuated Lagrangian systems on Lie groups. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, 45(8): 1437 – 1454.
- [17] PALIOTTA C, LEFEBER E, PETERSEN K Y, et al. Trajectory tracking and path following for underactuated marine vehicles. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2018, 27(4): 1423 – 1437.
- [18] WIIG M S, PETERSEN K Y, KROGSTAD T R. Collision avoidance for underactuated marine vehicles using the constant avoidance angle algorithm. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2020, 28(3): 951 – 966.
- [19] BORLAUG I L G, GRAVDAHL J T, SVERDRUP-THYGESON J, et al. Trajectory tracking for underwater swimming manipulators using a super twisting algorithm. *Asian Journal of Control*, 2019, 21(1): 208 – 223.
- [20] SANS-MUNTADAS A, KELASIDI E, PETERSEN K Y, et al. Path planning and guidance for underactuated vehicles with limited field-of-view. *Ocean Engineering*, 2019, 174: 84 – 95.
- [21] AZELOGLU C O, SAGIRLI A, EDINCLILER A. Vibration mitigation of nonlinear crane system against earthquake excitations with the self-tuning fuzzy logic PID controller. *Nonlinear Dynamics*, 2016, 84(4): 1915 – 1928.
- [22] SMOCZEK J, SZPYTKO J. Particle swarm optimization-based multivariable generalized predictive control for an overhead crane. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 2016, 22(1): 258 – 268.
- [23] SUN N, FANG Y, CHEN H, et al. Nonlinear stabilizing control for ship-mounted cranes with ship roll and heave movements: design, analysis, and experiments. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2017, 48(10): 1781 – 1793.
- [24] SUN N, WU Y, FANG Y, et al. Nonlinear antiswing control for crane systems with double-pendulum swing effects and uncertain parameters: design and experiments. *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, 2017, 15(3): 1413 – 1422.
- [25] UDWADIA F E, KALABA R E. On the foundations of analytical dynamics. *International Journal of Nonlinear Mechanics*, 2002, 37(6): 1079 – 1090.
- [26] KALABA R, UDWADIA F. Analytical dynamics with constraint forces that do work in virtual displacements. *Applied Mathematics and Computation*, 2001, 121(2/3): 211 – 217.
- [27] CHEN Y H. Constraint-following servo control design for mechanical systems. *Journal of Vibration and Control*, 2009, 15(3): 369 – 389.
- [28] CHEN Y H, ZHANG X. Adaptive robust approximate constraint-following control for mechanical systems. *Journal of the Franklin Institute*, 2010, 347(1): 69 – 86.
- [29] ZHAO R, CHEN Y H, WU L, et al. Robust trajectory tracking control for uncertain mechanical systems: servo constraint-following and adaptation mechanism. *International Journal of Control*, 2020, 93(7): 1696 – 1709.
- [30] YIN H, CHEN Y H, YU D. Controlling an underactuated two-wheeled mobile robot: a constraint-following approach. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 2019, 141(7): 071002.
- [31] HAUSER J, SASTRY S, MEYER G. Nonlinear control design for slightly non-minimum phase systems: Application to V/STOL aircraft. *Automatica*, 1992, 28(4): 665 – 679.
- [32] AGUILAR-TBANEZ C. Stabilization of the PVTOL aircraft based on a sliding mode and a saturation function. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2017, 27(5): 843 – 859.
- [33] AGUILAR-TBANEZ C, SOSSA-AZUELA J H, SUAREZ-CASTANON M S. A backstepping-based procedure with saturation functions to control the PVTOL system. *Nonlinear Dynamics*, 2016, 83(3): 1247 – 1257.
- [34] KAYACAN E, MASLIM R. Type-2 fuzzy logic trajectory tracking control of quadrotor VTOL aircraft with elliptic membership functions. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 2016, 22(1): 339 – 348.
- [35] TEEL A R. A nonlinear small gain theorem for the analysis of control systems with saturation. *IEEE transactions on Automatic Control*, 1996, 41(9): 1256 – 1270.
- [36] ESCOBAR J C, LOZANO R, BONILLA E M. PVTOL control using feedback linearisation with dynamic extension. *International Journal of Control*, 2019, DOI: 10.1080/00207179.2019.1676468.
- [37] HUANG C S, YUAN K. Output tracking of a non-linear non-minimum phase PVTOL aircraft based on non-linear state feedback control. *International Journal of Control*, 2002, 75(6): 466 – 473.
- [38] MARTIN P, DEVASIA S, PADEN B. A different look at output tracking: control of a VTOL aircraft. *Automatica*, 1996, 32(1): 101 – 107.
- [39] HE Yuebang, PEI Hailong, ZHOU Hongbo, et al. Adaptive backstepping-based robust tracking control of unmanned helicopters with disturbances. *Control Theory & Applications*, 2013, 30(7): 834 – 843.  
(贺跃帮, 裴海龙, 周洪波, 等. 干扰下的无人直升机自适应反步鲁棒跟踪控制(英文). 控制理论与应用, 2013, 30(7): 834 – 843.)
- [40] YE Huawen, GUI Weihua, YANG Chunhua, et al. Stabilization of the PVTOL via saturation technique. *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, 2007, 33(9): 989 – 992.  
(叶华文, 桂卫华, 阳春华, 等. 基于饱和方法的直升机镇定设计. 自动化学报, 2007, 33(9): 989 – 992.)
- [41] SUN Xiuyun, FANG Yongchun, SUN Ning. Backstepping-based adaptive attitude and height control of a small-scale unmanned helicopter. *Control Theory & Applications*, 2012, 29(3): 381 – 388.  
(孙秀云, 方勇纯, 孙宁. 小型无人直升机的姿态与高度自适应反步控制. 控制理论与应用, 2012, 29(3): 381 – 388.)
- [42] NOBLE B, DANIEL J W. *Applied Linear Algebra*. New Jersey: Prentice-Hall, 1988.

- [43] ROSENBERG R. *Analytical Dynamics*. New York: Plenum Press, 1977.
- [44] KHALIL H K. *Nonlinear Systems*. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2002.
- [45] UDWADIA F E, MYLAPILLI H. Constrained motion of mechanical systems and tracking control of nonlinear systems: connections and closed-form results. *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*, 2015, 15(1): 73 – 89.
- [46] KOGANTI P B, UDWADIA F E. Unified approach to modeling and control of rigid multibody systems. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2016, 39(12): 2683 – 2698.
- [47] BLAJER W, KOLODZIEJCZYK K. Control of underactuated mechanical systems with servo-constraints. *Nonlinear Dynamics*, 2007, 50(4): 781 – 791.

#### 作者简介:

**李旻** 副教授, 硕士生导师, 目前研究方向为机械设计及理论、机械系统动力学等, E-mail: limin@scut.edu.cn;

**熊亮** 硕士研究生, 目前研究方向为机械系统的运动控制与优化, E-mail: 501330308@qq.com;

**尹辉** 博士, 目前研究方向为不确定动态系统控制、不确定数值分析方法和振动与噪声控制等, E-mail: yinhui233@126.com;

**上官文斌** 教授, 博士生导师, 目前研究方向为汽车悬架系统、振动噪声分析与控制和橡胶减振系统等, E-mail: sgwb@scut.edu.cn;

**秦武** 博士研究生, 目前研究方向为汽车悬架系统振动控制, E-mail: 1053445585@qq.com.