

## 基于高斯混合聚类的切换系统的辨识

柴秀俊<sup>1</sup>, 王宏伟<sup>1,2†</sup>, 王 林<sup>1</sup>, 嵇薪儒<sup>1</sup>

(1. 新疆大学 电气工程学院, 新疆 乌鲁木齐 830047; 2. 大连理工大学 控制科学与工程学院, 辽宁 大连 110024)

**摘要:** 针对具有未知切换规则与未知子系统数量的切换系统的辨识问题, 提出一种两阶段辨识方法, 包括模式检测与参数辨识. 在模式检测阶段, 首先建立高斯混合模型表示采样数据的分布, 并通过轮盘法选择合适的初始模型参数. 其次, 计算采样数据属于每个子系统的后验概率, 通过极大似然估计算法迭代更新模型参数, 使高斯混合模型最大化地拟合采样数据的分布. 在此基础上, 通过贝叶斯信息准则确定子系统的数量, 并根据最大后验概率准则估计切换规则. 在参数辨识阶段, 通过递推增广最小二乘法估计每个子系统的参数向量. 最后, 通过仿真结果验证了所提方法的有效性.

**关键词:** 切换系统; 模式检测; 高斯混合聚类; 递推增广最小二乘法; 贝叶斯信息准则

**引用格式:** 柴秀俊, 王宏伟, 王林, 等. 基于高斯混合聚类的切换系统的辨识. 控制理论与应用, 2021, 38(5): 634 – 640

DOI: 10.7641/CTA.2020.00194

## Identification of switched systems based on Gaussian mixture clustering

CHAI Xiu-jun<sup>1</sup>, WANG Hong-wei<sup>1,2†</sup>, WANG Lin<sup>1</sup>, JI Xin-ru<sup>1</sup>

(1. School of Electrical Engineering, Xinjiang University, Urumqi Xinjiang 830047, China;

2. School of Control Science and Engineering, Dalian University of Technology, Dalian Liaoning 110024, China)

**Abstract:** In order to solve the identification problem of switched systems with unknown switched rules and unknown number of subsystems, a two-stage identification method is proposed, including mode detection and parameter identification. In the mode detection stage, the Gaussian mixture model is first established to represent the distribution of sampled data, and appropriate initial model parameters are selected according to the roulette method. Secondly, the posterior probability of the sampled data belong to each subsystem is calculated, and the maximum likelihood estimation algorithm is used to iteratively update the model parameters to make the Gaussian mixture model maximum fit the distribution of the sampled data. On this basis, the number of subsystems is determined by the Bayesian information criterion, and the switched rule is estimated according to the maximum a posteriori criterion. In the parameter identification stage, the parameter vector of each subsystem is estimated by the recursive extended least square method. Finally, the effectiveness of the proposed method is verified according to simulation results.

**Key words:** switched systems; mode detection; Gaussian mixture clustering; recursive extended least square method; Bayesian information criterion

**Citation:** CHAI Xiujun, WANG Hongwei, WANG Lin, et al. Identification of switched systems based on Gaussian mixture clustering. *Control Theory & Applications*, 2021, 38(5): 634 – 640

### 1 引言

混杂系统是一类复杂系统, 包含相互影响并相互作用的连续动力学和离散动力学<sup>[1]</sup>. 切换系统是一类典型的混杂系统, 它在通讯、电力系统和机器人控制等领域中有广泛的应用<sup>[2-3]</sup>. 目前, 在研究切换系统的结构特性上已经获得了许多重要的研究成果, 比如在切换系统的控制器设计<sup>[4-6]</sup>与稳定性分析<sup>[7-9]</sup>等方面. 而在切换系统的辨识领域, 还存在很多问题需要解决.

切换系统一般由若干个子系统和决定它们之间切换的规则组成, 这就导致了从切换系统收集的输入输出数据来自于不同的子系统. 因此对于切换系统的辨识, 通常需要通过模式检测计算每个采样数据的运行模式号以确定切换系统的切换时间与子系统的驻留时间, 然后再对采样数据进行参数辨识.

对于切换系统的辨识方法, 一般分为子空间方法和基于输入输出(input and output, IO)模型的方法. 文

收稿日期: 2020-04-12; 录用日期: 2020-11-26.

†通信作者. E-mail: 1195201627@qq.com; Tel.: +86 15542368764.

本文责任编辑: 吴立刚.

国家自然科学基金项目(61863034)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (61863034).

献[10]首先引入子空间方法用于分段线性系统的辨识,文中假设切换规则已知,主要研究局部模式的辨识.对于未知切换规则的切换系统辨识,文献[11]在子空间框架中使用变化检测技术对切换系统进行辨识,但是这种方法需要假设系统只在稳态下进行切换.其它的子空间方法还包括投影子空间方法[12],结构化子空间方法[13]等.对于子空间方法,最大的问题就是要求两个连续的系统切换之间存在一个最小停顿时间[10].基于IO模型的方法是另一种简单而有效的切换系统辨识方法,比如自组织模型法[14]、变分贝叶斯法[15]、聚类方法[16-17]、随机迭代法[18]和椭圆法[19]等.基于IO模型的方法适用于具有任意切换规则的切换系统,很好的解决了子空间方法中要求最小停顿时间问题.

上述文献提出的辨识方法中大都假设子系统的数量是先验已知的,而一般情况下具有未知规则的切换系统,只有输入数据与输出数据是可以采样的,子系统的数量、切换时间、子系统的驻留时间往往是未知的.在此基础上,本文提出一种将高斯混合聚类与递推增广最小二乘法结合的两阶段辨识方法对切换系统进行辨识.本文将具有未知切换规则与未知子系统数量的切换系统作为研究对象,在模式检测阶段,首先建立高斯混合模型表示采样数据的分布,并使用轮盘法选择较为合适的初始模型参数.其次,分别计算采样数据属于各个子系统的后验概率,同时通过极大似然估计算法迭代更新高斯混合模型中的模型参数,使高斯混合模型最大化地拟合所有采样数据的分布.在此基础上,通过贝叶斯信息准则(Bayesian information criterion, BIC)确定切换系统中子系统的数量,同时根据最大后验概率准则计算采样数据的运行模式号,从而估计切换系统的切换规则.在参数辨识阶段,通过递推增广最小二乘法估计每个子系统的参数向量.最后,利用含有有色噪声的切换系统来验证所提辨识方法的有效性.

## 2 问题描述

在存在有色噪声的情况下,切换系统可以表示为

$$\begin{cases} A^{w(k)}(z^{-1})y(k) = B^{w(k)}(z^{-1})u(k) + C(z^{-1})v(k), \\ w(k) \in i = \{1, 2, \dots, N\}, \end{cases} \quad (1)$$

其中:  $u(k)$ 和 $y(k)$ 分别代表第 $k$ 次均匀采样的切换系统的输入和输出;  $v(k)$ 表示均值为零、方差为 $\delta^2$ 的高斯白噪声;  $w(k)$ 为与时间相关的分段切换函数;  $N$ 代表子系统的数量;  $z^{-1}$ 代表单位延迟算子,  $z^{-1}y(k) = y(k-1)$ ;  $A^i(z^{-1})$ ,  $B^i(z^{-1})$ 和 $C^i(z^{-1})$ 分别表示对应的系统多项式,具体形式为

$$\begin{aligned} A^i(z^{-1}) &= 1 + a_1^i z^{-1} + \dots + a_{n_a^i}^i z^{-n_a^i}, \\ B^i(z^{-1}) &= b_1^i z^{-1} + \dots + b_{n_b^i}^i z^{-n_b^i}, \end{aligned}$$

$$C(z^{-1}) = 1 + c_1 z^{-1} + \dots + c_{n_c} z^{-n_c}.$$

在 $k$ 次采样时,切换系统被切换至第 $i$ 个子系统,式(1)可以转换成以下线性回归模型:

$$y(k) = (\varphi^i(k))^T \theta^i + v(k), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (2)$$

其中:

$$\begin{aligned} \theta^i &= [(\theta_s^i)^T \quad (\theta_v^i)^T]^T \in \mathbb{R}^{(n_a^i + n_b^i + n_c) \times 1}, \\ \theta_s^i &= [a_1^i \quad \dots \quad a_{n_a^i}^i \quad b_1^i \quad \dots \quad b_{n_b^i}^i]^T \in \mathbb{R}^{(n_a^i + n_b^i) \times 1}, \\ \theta_v^i &= [c_1 \quad \dots \quad c_{n_c}]^T \in \mathbb{R}^{n_c \times 1}, \\ \varphi^i(k) &= [-y(k-1) \quad \dots \quad -y(k-n_a^i) \\ &\quad u(k-1) \quad \dots \quad u(k-n_b^i) \quad v(k-1) \\ &\quad \dots \quad v(k-n_c)]^T \in \mathbb{R}^{(n_a^i + n_b^i + n_c) \times 1}, \end{aligned}$$

其中 $\theta^i$ 和 $\varphi^i$ 分别表示第 $i$ 个子系统的参数向量和信息向量.

由于切换系统不提供任何的切换信息,所以必须在辨识子系统参数之前对切换系统进行模式检测,以确认切换信息[20].因此切换系统的辨识可以分为两个阶段:1)在模式检测阶段,通过检测技术估计切换规则,并通过目标函数法确定切换模式总数;2)在参数辨识阶段,通过辨识算法获得每个子系统的参数估计值.本文将在第3节中讨论模式检测问题,在第4节中讨论参数辨识问题.

## 3 基于高斯混合聚类的模式检测

聚类分析的算法可以分为划分法、层次法、基于密度的方法、基于网格的方法以及基于模型的方法[21].其中,基于模型的方法就是给每一个聚类假定一个模型,然后去寻找能够很好的满足这个模型的数据集.高斯混合聚类就是借助高斯混合模型来表示数据分布的一种基于统计模型的聚类方法.本文将通过高斯混合聚类对切换系统进行模式检测.

由于只有输入数据与输出数据是可以采样的,所以将输入数据与输出数据定义为IO向量 $\psi(k)$ :

$$\psi(k) = [-y(k-1) \quad \dots \quad -y(k-n_a^i) \quad u(k-1) \quad \dots \quad u(k-n_b^i)]^T \in \mathbb{R}^{(n_a^i + n_b^i) \times 1}.$$

假设对切换系统进行采样共得到 $m$ 组IO向量,构成IO向量集 $\Psi = \{\psi(1), \psi(2), \dots, \psi(m)\}$ ,则 $\Psi$ 的分布可由高斯混合模型表示:

$$p_\zeta(\Psi(k)) = \sum_{i=1}^N \alpha^i p(\psi^i(k) | \mu^i, \Sigma^i), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (3)$$

其中:  $N$ 代表子系统的数量;  $\alpha^i$ 代表第 $i$ 个子系统对应簇类的混合系数,满足条件 $\sum_{i=1}^N \alpha^i = 1, \alpha^i > 0$ ;  $\psi^i(k)$ 代表切换系统在第 $k$ 次采样得到的第 $i$ 个子系统的IO向量;  $p_\zeta(\Psi(k))$ 代表根据 $\Psi$ 的分布建立的高斯混合模

型. 由于系统的输入信号为具有零均值, 单位方差的不相关随机序列信号, 输出信号与输入信号呈线性关系, 所以 $\boldsymbol{\psi}^i(k)$ 的分布由概率密度函数 $p(\boldsymbol{\psi}^i(k)|\boldsymbol{\mu}^i, \boldsymbol{\Sigma}^i)$ 表示:

$$p(\boldsymbol{\psi}^i(k)|\boldsymbol{\mu}^i, \boldsymbol{\Sigma}^i) = \frac{\exp(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\psi}^i(k) - \boldsymbol{\mu}^i)^T (\boldsymbol{\Sigma}^i)^{-1} (\boldsymbol{\psi}^i(k) - \boldsymbol{\mu}^i))}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |\boldsymbol{\Sigma}^i|^{\frac{1}{2}}}, \quad (4)$$

其中:  $n = n_a^i + n_b^i$  代表IO向量 $\boldsymbol{\psi}^i(k)$ 的维度;  $\boldsymbol{\mu}^i$  代表第*i*个子系统对应簇类的均值向量;  $\boldsymbol{\Sigma}^i$  代表第*i*个子系统对应簇类的协方差矩阵.

### 3.1 高斯混合模型初始模型参数的选择

由式(3)-(4)可以看出高斯混合模型由混合系数, 均值向量与协方差矩阵所决定. 对于高斯混合聚类, 其聚类的效果十分依靠高斯混合模型中初始均值向量的选择, 本文将通过轮盘法寻找一组合适的初始均值向量.

从IO向量集 $\boldsymbol{\psi}$ 中随机选取一组IO向量作为第一个初始聚类中心, 分别计算其它的IO向量与当前聚类中心的IO向量之间的距离:

$$d_{ef} = \sqrt{\sum_f^m (\boldsymbol{\psi}_e - \boldsymbol{\psi}_f)^\lambda}, \quad f \in (1, 2, \dots, m), \quad (5)$$

其中:  $\boldsymbol{\psi}_e$  为当前聚类中心的IO向量,  $\boldsymbol{\psi}_f$  为其它的IO向量,  $\lambda$  为距离系数.

在聚类算法中, 为了保证聚类的准确性, 通常选择相互距离较大的一组初始聚类中心, 但在 $\boldsymbol{\psi}$ 中存在异常IO向量的情况下, 如果直接通过式(5)选择相互距离最大的一组初始聚类中心, 将导致收敛速度慢或者局部收敛. 为了解决这个问题, 本文通过计算IO向量的选择概率来选择初始聚类中心, IO向量之间的距离越大, 越有可能被选为下一个聚类中心. 在式(5)的基础上, IO向量的选择概率为

$$p(\boldsymbol{\psi}_f) = \frac{d_{ef}}{\sum_f d_{ef}}, \quad f \in (1, 2, \dots, m), \quad (6)$$

其中 $p(\boldsymbol{\psi}_f)$ 满足条件 $0 < p(\boldsymbol{\psi}_f) < 1$ , 且 $\sum_f^m p(\boldsymbol{\psi}_f) = 1$ .

在每一轮聚类中心的选择中随机生成一个大于0且逼近于0的数 $\tau$ , 按顺序分别令选择概率 $p(\boldsymbol{\psi}_f)$ 减去 $\tau$ , 直到满足条件 $p(\boldsymbol{\psi}_f) - \tau > 0$ 时选择该组IO向量作为下一个初始聚类中心. 当存在两个或两个以上的聚类中心时, 式(5)中选取其它的IO向量与当前所有聚类中心的IO向量之间最大的距离. 之后重复计算式(5)-(6), 直到找到*N*个聚类中心, 并将其构建为高斯混合模型中的初始均值向量.

### 3.2 运行模式号的计算

通过上式构建的高斯混合模型, 用于计算IO向量

集 $\boldsymbol{\psi}$ 中*m*组IO向量的运行模式号. 假设 $\boldsymbol{\psi}^j(k)$ 是 $\boldsymbol{\psi}$ 中的一组IO向量, 其中 $j = 1, 2, \dots, N$ 代表需要计算的运行模式号. 由贝叶斯定理可知,  $\boldsymbol{\psi}^j(k)$ 属于第*i*个子系统的后验概率为

$$p_\zeta(i|\boldsymbol{\psi}^j(k)) = \frac{p(i) \cdot p_\zeta(\boldsymbol{\psi}^j(k)|i)}{p_\zeta(\boldsymbol{\psi}^j(k))} = \frac{\alpha^i \cdot p(\boldsymbol{\psi}^j(k)|\boldsymbol{\mu}^i, \boldsymbol{\Sigma}^i)}{\sum_{l=1}^N \alpha^l p(\boldsymbol{\psi}^j(k)|\boldsymbol{\mu}^l, \boldsymbol{\Sigma}^l)}. \quad (7)$$

为了使高斯混合模型最大化的拟合样本集 $\boldsymbol{\psi}$ , 需要迭代更新模型参数 $\alpha^i$ ,  $\boldsymbol{\mu}^i$  和  $\boldsymbol{\Sigma}^i$ . 由式(3)可得样本集 $\boldsymbol{\psi}$ 的极大似然函数:

$$L(\boldsymbol{\psi}) = \ln\left(\prod_{k=1}^m p_\zeta(\boldsymbol{\psi}(k))\right) = \sum_{k=1}^m \ln\left(\sum_{i=1}^N \alpha^i \cdot p(\boldsymbol{\psi}^j(k)|\boldsymbol{\mu}^i, \boldsymbol{\Sigma}^i)\right). \quad (8)$$

由于模型参数在每一轮迭代更新过程中, 需要重复使用后验概率 $p_\zeta(i|\boldsymbol{\psi}^j(k))$ , 为了减小算法复杂度, 对 $p_\zeta(i|\boldsymbol{\psi}^j(k))$ 进行0-1离散化处理, 若

$$p_\zeta(i|\boldsymbol{\psi}^j(k)) = \max p_\zeta(i|\boldsymbol{\psi}^j(k)), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (9)$$

则令 $p_\zeta(i|\boldsymbol{\psi}^j(k)) = 1$ , 表示将第*k*个IO向量 $\boldsymbol{\psi}^j(k)$ 归为第*i*个子系统; 否则令 $p_\zeta(i|\boldsymbol{\psi}^j(k)) = 0$ . 至此, 将样本集 $\boldsymbol{\psi}$ 化分为*N*个数据集 $C_1, C_2, \dots, C_N$ .

对于极大似然函数 $L(\boldsymbol{\psi})$ , 分别令

$$\frac{\partial L(\boldsymbol{\psi})}{\partial \boldsymbol{\mu}^i} = 0, \quad \frac{\partial L(\boldsymbol{\psi})}{\partial \boldsymbol{\Sigma}^i} = 0,$$

可以得到 $\boldsymbol{\mu}^i$ 与 $\boldsymbol{\Sigma}^i$ 的更新公式:

$$\boldsymbol{\mu}^i = \frac{\sum_{k=1}^{m^i} \boldsymbol{\psi}^{ij}(k)}{m^i}, \quad (10)$$

$$\boldsymbol{\Sigma}^i = \frac{\sum_{k=1}^{m^i} (\boldsymbol{\psi}^{ij}(k) - \boldsymbol{\mu}^i)(\boldsymbol{\psi}^{ij}(k) - \boldsymbol{\mu}^i)^T}{m^i}, \quad (11)$$

其中:  $\boldsymbol{\psi}^{ij}(k)$  表示属于第*i*类数据集 $C_i$ 的IO向量;  $m^i$  表示数据集 $C_i$ 中IO向量的总数, 满足条件 $m^1 + m^2 + \dots + m^N = m$ .

对于 $\alpha^i$ 的更新公式, 由上述推论可知

$$\alpha^i = \frac{m^i}{m}. \quad (12)$$

在迭代更新模型参数的过程中, 当 $L(\boldsymbol{\psi})$ 的增长小于给定阈值 $\gamma$  ( $\gamma > 0$ )时, 模型参数 $\alpha^i$ ,  $\boldsymbol{\mu}^i$  与  $\boldsymbol{\Sigma}^i$  停止更新. 此时根据式(7), 由最大后验概率原则计算出每个IO向量 $\boldsymbol{\psi}^j(k)$ 的运行模式号:

$$j = \arg \max_{i \in N} p_\zeta(i|\boldsymbol{\psi}^j(k)), \quad (13)$$

由式(13)计算可得 $j = i$ , 表示IO向量 $\boldsymbol{\psi}^j(k)$ 属于第*i*个

子系统.

### 3.3 切换模式总数的确定

在上述的计算过程中, 切换模式总数或者子系统的数量 $N$ 是未知的, 本文通过比较模型拟合采样数据的优良性估计切换模式的总数.

赤池信息准则(Akaike information criterion, AIC)是衡量统计模型拟合优良性的一种标准, 它提供了权衡估计模型复杂度和拟合数据优良性的标准<sup>[22]</sup>. 通常情况下, AIC 准则定义为

$$AIC = -2 \ln(L^N(\boldsymbol{\psi})) + 2m, \quad (14)$$

其中:  $L^N(\boldsymbol{\psi})$ 表示子系统数量分别为 $N(N = 1, 2, \dots, Q, Q$ 为设置的最大子系统数量)时IO向量集 $\boldsymbol{\psi}$ 的极大似然函数,  $m$ 代表IO向量的总数.

BIC准则是在AIC准则的基础上, 增大了惩罚项, 在样本数量过多时, 可有效的防止模型精度过高造成的模型复杂度过高<sup>[22]</sup>. 假设子系统的数量分别为 $N = 1, 2, \dots, Q$ , 根据贝叶斯信息准则, 可以得到IO向量集 $\boldsymbol{\psi}$ 的BIC值:

$$BIC = -2 \ln(L^N(\boldsymbol{\psi})) + m \ln(N). \quad (15)$$

一般而言, 式(15)中模型复杂度 $m \ln(N)$ 与似然函数项 $L^N(\boldsymbol{\psi})$ 会随着子系统数量 $N$ 的增加而增加, 当 $N$ 较小时, 似然函数项的增速大于模型复杂度的增速, 从而导致BIC变小. 当 $N$ 过大时, 模型过于复杂会出现过拟合的现象, 似然函数项 $L^N(\boldsymbol{\psi})$ 增速减缓, 导致BIC增大. 所以从 $N = 1, 2, \dots, Q$ 中选择使BIC值最小的 $N$ , 故有

$$N = \arg \min_{N=1,2,\dots,Q} (-2 \ln(L^N(\boldsymbol{\psi})) + m \ln(N)). \quad (16)$$

通过式(16)可以计算出子系统的数量 $N$ .

为了便于理解, 上述的建模及计算过程, 可以总结为图1.

### 4 基于递推增广最小二乘法的参数辨识

通过第3节中的高斯混合聚类方法, 可以计算出IO向量的运行模式号, 在此之后, 本文使用递推增广最小二乘法<sup>[23-24]</sup>获得式(2)中参数向量的估计值. 由于信息向量 $\boldsymbol{\varphi}^i(k)$ 中的 $v(k)$ 不可测, 所以通过其估计值 $\hat{v}(k)$ 代替, 即

$$\hat{v}(k) = y(k) - \hat{y}(k) = y(k) - (\hat{\boldsymbol{\varphi}}^i(k))^T \hat{\boldsymbol{\theta}}, \quad (17)$$

其中:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}^i = [(\hat{\boldsymbol{\theta}}_s^i)^T (\hat{\boldsymbol{\theta}}_v^i)^T]^T \in \mathbb{R}^{(n_a^i+n_b^i+n_c) \times 1},$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_s^i = [\hat{a}_1^i \ \dots \ \hat{a}_{n_a^i}^i \ \hat{b}_1^i \ \dots \ \hat{b}_{n_b^i}^i]^T \in \mathbb{R}^{(n_a^i+n_b^i) \times 1},$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_v^i = [\hat{c}_1 \ \dots \ \hat{c}_{n_c}]^T \in \mathbb{R}^{n_c \times 1},$$

$$\hat{\boldsymbol{\varphi}}^i(k) = [-y(k-1) \ \dots \ -y(k-n_a^i)$$

$$u(k-1) \ \dots \ u(k-n_b^i) \ \hat{v}(k-1)$$

$$\dots \ \hat{v}(k-n_c)^T] \in \mathbb{R}^{(n_a^i+n_b^i+n_c) \times 1},$$

其中 $\hat{\boldsymbol{\theta}}^i$ 代表 $\boldsymbol{\theta}^i$ 的估计值.

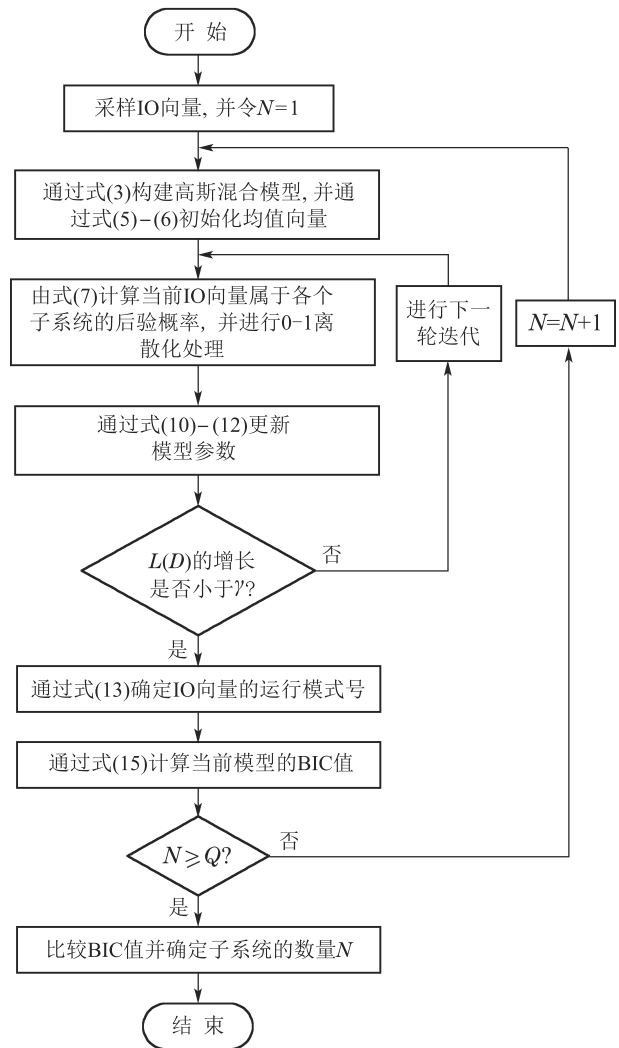


图1 模式检测流程图

Fig. 1 Flow chart of mode detection

则递推增广最小二乘法的公式如下:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}^i(k) = \hat{\boldsymbol{\theta}}^i(k-1) + \mathbf{L}(k)(y(k) - (\hat{\boldsymbol{\varphi}}^i(k))^T \hat{\boldsymbol{\theta}}^i(k-1)), \quad (18)$$

$$\mathbf{L}(k) = \mathbf{P}^i(k-1) \hat{\boldsymbol{\varphi}}^i(k) (1 + (\hat{\boldsymbol{\varphi}}^i(k))^T \times \mathbf{P}^i(k-1) \hat{\boldsymbol{\varphi}}^i(k))^{-1}, \quad (19)$$

$$\mathbf{P}^i(k) = \mathbf{P}^i(k-1) - \mathbf{L}(k) (\hat{\boldsymbol{\varphi}}^i(k))^T \mathbf{P}^i(k-1), \quad (20)$$

$$\hat{\boldsymbol{\varphi}}^i(k) = [-y(k-1) \ \dots \ -y(k-n_a^i) \ u(k-1) \ \dots \ u(k-n_b^i) \ \hat{v}(k-1) \ \dots \ \hat{v}(k-n_c)]^T, \quad (21)$$

$$\hat{v}(k) = y(k) - (\hat{\boldsymbol{\varphi}}^i(k))^T \hat{\boldsymbol{\theta}}, \quad (22)$$

其中:  $\mathbf{P}^i$ 的初始值设置为 $\mathbf{P}^i(0) = 10^6 \mathbf{I}$ ,  $\mathbf{I}$ 为单位矩阵,  $\hat{\boldsymbol{\theta}}^i$ 的初始值设置为 $\hat{\boldsymbol{\theta}}^i(0) = 0$ , 则递推增广最小二乘法的步骤可以总结为

**步骤 1** 初始化参数  $P^i(0), \hat{\theta}^i(0), k=1$ , 其中  $i=1, 2, \dots, N$ ;

**步骤 2** 采集数据  $y(k)$  和  $u(k)$ , 通过式(21)构造信息向量  $\hat{\varphi}^i(k)$ ;

**步骤 3** 依次计算式(18)–(19)和式(20), 获得参数向量  $\theta^i$  的估计值  $\hat{\theta}^i$ , 并通过式(22)计算  $\hat{v}(k)$ ;

**步骤 4** 判断  $k > m$ ? 若是则完成参数辨识过程, 若否则进入下一步骤, 其中  $m$  为信息向量的总数;

**步骤 5**  $k = k + 1$ , 返回步骤2进行新一轮的迭代.

### 5 仿真结果

为了验证所提方法的有效性, 本文以如下包含3个子系统的切换系统作为研究对象:

$$A^{w(k)}(z^{-1})y(k) = B^{w(k)}(z^{-1})u(k) + C(z^{-1})v(k),$$

$$w(k) \in i = \{1, 2, \dots, N\},$$

其中:

$$\text{子系统1: } \begin{cases} A^1(z^{-1}) = 1 - 1.2z^{-1} + z^{-2}, \\ B^1(z^{-1}) = 1.4z^{-1} + 2.5z^{-2}, \end{cases}$$

$$\text{子系统2: } \begin{cases} A^2(z^{-1}) = 1 - 1.56z^{-1} + 0.59z^{-2}, \\ B^2(z^{-1}) = -3.3z^{-1} + 1.95z^{-2}, \end{cases}$$

$$\text{子系统3: } \begin{cases} A^3(z^{-1}) = 1 + 0.4z^{-1} - 0.25z^{-2}, \\ B^3(z^{-1}) = -0.15z^{-1} + 0.08z^{-2}, \end{cases}$$

有色噪声多项式:  $C(z^{-1}) = 1 + 0.1z^{-1} + 0.3z^{-2}$ .

在仿真中, 将具有零均值, 单位方差不相关随机序列信号作为输入  $u(k)$ ; 将均值为零, 方差为  $\delta^2 = 0.1$  的高斯白噪声作为噪声信号  $v(k)$ . 设置距离系数  $\lambda = 2$ , 最大子系统数量  $Q = 10$ , 似然函数增长阈值  $\gamma = 10^{-5}$ , 初始协方差矩阵  $\Sigma^i = I$  (其中  $i=1, \dots, N, \dots, Q, I$  为  $n$  阶单位矩阵), 初始混合系数  $\alpha^i = \frac{1}{N}$ .

本文采用周期性随机切换信号, 每50个样本为一个周期, 对1000组样本进行了仿真. 图2展示了在一次独立实验中得到的BIC曲线, 由图可以看出当  $N = 3$  时, BIC为最小值, 表明切换系统由3个子系统构成. 图3为模式检测过程中IO向量对应于每个子系统的后验概率与实际切换过程的比较图, 为了更加直观表示, 图中令所有小于  $10^{-9}$  的后验概率都以  $10^{-9}$  表示, 对于IO向量, 使其后验概率最大的子系统即为此IO向量所属的子系统. 图4为实际的切换信号与通过模式检测重建的估计切换信号的对比图, 图中两者的匹配率为93.7%.

图5为通过50次重复实验统计, 将本文所提的方法与投影子空间法<sup>[12]</sup>和聚类方法<sup>[16]</sup>进行对比得到的分类错误率箱式图, 从图中可以看出本文所提方法的分类错误率主要集中在7%到11%之间, 低于其它两种算法. 表1为通过递推增广最小二乘法的参数辨识的统计

结果, 其中第1列和第2列的项分别是平均值和方差. 可以看出, 递推增广最小二乘法可以较为准确地估计切换系统的参数向量.

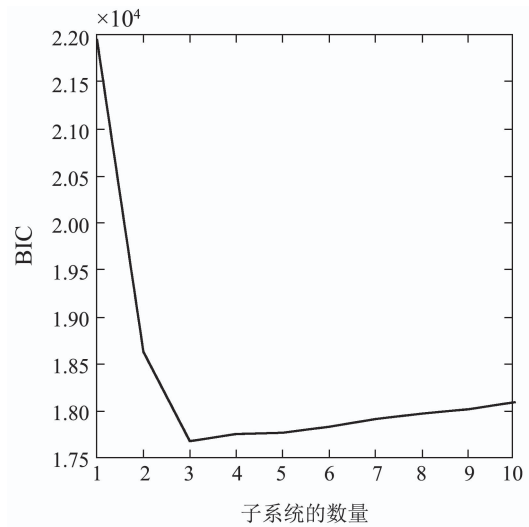


图2 不同子系统数量对应的BIC值

Fig. 2 The BIC value corresponds to the number of different subsystems

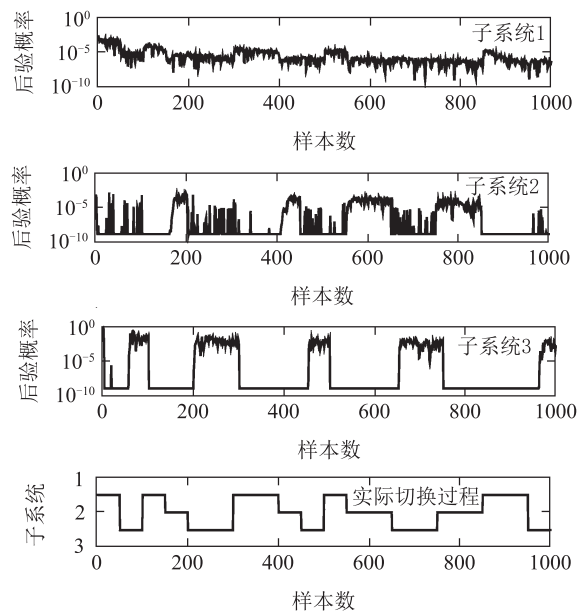
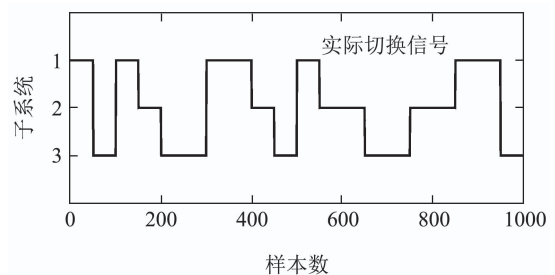
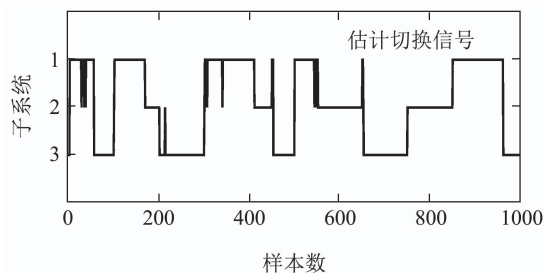


图3 IO向量对应于每个子系统的后验概率与实际切换过程  
Fig. 3 The IO vector corresponds to the posterior probabilities of each subsystems and the actual switched process



(a) 实际切换过程



(b) 通过模型检测重构的切换过程

图 4 实际切换信号及其估计

Fig. 4 Actual switched signal and its estimation

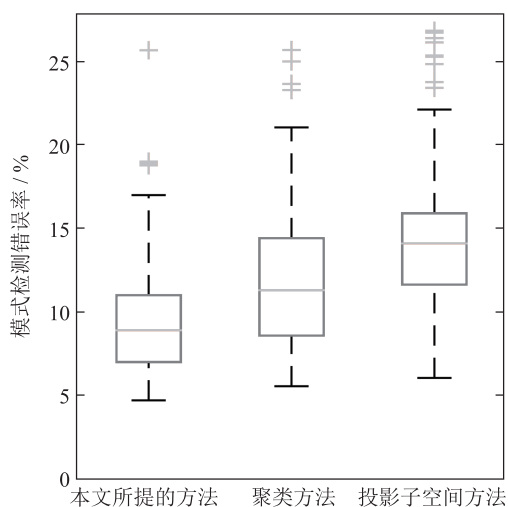


图 5 不同方法分类错误率的箱式图

Fig. 5 Box plot of classification error rate of different algorithms

表 1 估计参数统计结果

Table 1 Statistical results of estimated parameters

| 子系统号    | 参数估计值   |
|---------|---|
| 子系统1    | $\hat{\theta}_s^1 = \begin{bmatrix} -1.1948 \pm 0.0153 \\ 0.9982 \pm 0.0053 \\ 1.4248 \pm 0.0257 \\ 2.5073 \pm 0.0141 \end{bmatrix}$  |
| 参数真实值   | $\theta_s^1 = [-1.2 \ 1 \ 1.4 \ 2.5]^T$   |
| 子系统2    | $\hat{\theta}_s^2 = \begin{bmatrix} -1.5721 \pm 0.0342 \\ 0.5985 \pm 0.0118 \\ -3.2732 \pm 0.1337 \\ 1.9402 \pm 0.0094 \end{bmatrix}$ |
| 参数真实值   | $\theta_s^2 = [-1.56 \ 0.59 \ -3.3 \ 1.95]^T$   |
| 子系统3    | $\hat{\theta}_s^3 = \begin{bmatrix} 0.3859 \pm 0.0393 \\ -0.2458 \pm 0.0093 \\ -0.1639 \pm 0.0331 \\ 0.0793 \pm 0.0042 \end{bmatrix}$ |
| 参数真实值   | $\theta_s^3 = [0.4 \ -0.25 \ -0.15 \ 0.08]^T$   |
| 噪声      | $\hat{\theta}_v = \begin{bmatrix} 0.1109 \pm 0.0254 \\ 0.2721 \pm 0.0612 \end{bmatrix}$   |
| 噪声参数真实值 | $\theta_v = [0.1 \ 0.3]^T$  |

图6展示了在噪声信号的方差 $\delta^2$ 分别为 $\{0.1, 0.2, \dots, 1\}$ 时, 切换系统的噪信比和模式检测的平均分类错误率. 从图中可以看出分类错误率会随着噪信比的增大而增大, 当噪声信号的方差为0.1时, 分类错误率大致为8.75%, 当噪声信号的方差增大到为1时, 分类错误率增大到26.7%. 结果表明该方法在噪信比较低的情况下表现良好, 随着噪信比的增加, 分类错误率也会略微增加.

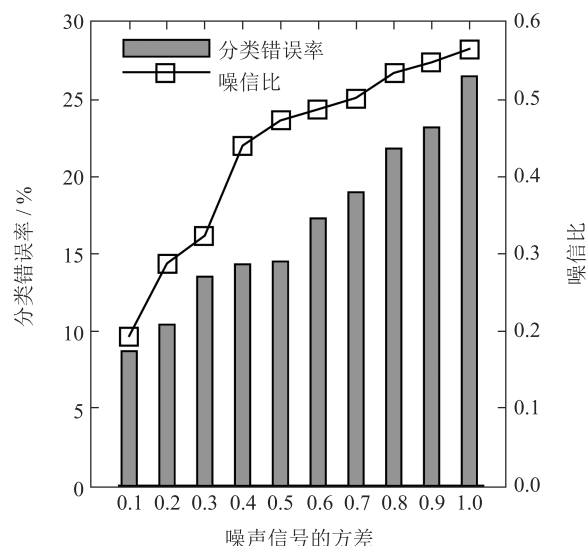


图 6 噪声信号方差不同时的分类错误率与噪信比的统计图  
Fig. 6 Statistical chart of classification error rate and noise signal ratio when the variance of noise signal is different

从上面的仿真中可以得出以下结论: 1) 对于具有未知切换规则的切换系统的辨识, 本文所提的方法不仅能够确定切换系统中子系统的数量, 还能较为准确地计算出采样数据的模式运行号, 获得整个切换规则运行情况; 2) 在对切换系统进行模式检测之后, 利用递推增广最小二乘法能够准确地得到各个子系统与噪声项的估计参数, 也反应出模式检测过程的有效性.

### 6 结论

针对具有未知切换规则与未知子系统数量的切换系统, 提出一种基于高斯混合聚类与递推增广最小二乘法的二阶段辨识方法. 本文借助高斯混合模型表示采样数据的分布, 并根据最大后验概率原则计算采样数据的运行模式号, 以确定切换系统的切换时间与子系统的驻留时间. 由于在高斯混合聚类的过程中初始均值向量对聚类效果影响较大, 所以利用轮盘法选择一组较为合适的聚类中心作为高斯混合模型的初始均值向量. 同时借助采样数据的极大似然函数, 根据BIC准则确定切换子系统的数量. 最后通过递推增广最小二乘法获得了较为准确的参数估计值.

切换系统的辨识在工业炼铁中硅含量的预测<sup>[14]</sup>, 配水网络的故障检测<sup>[25]</sup>等场景具有广泛应用. 然而, 对于切换系统的辨识依然还存在很多问题, 比如在切

换系统中含有非稳定子系统,但可以通过平均驻留时间理论来保证全局稳定的情况下的参数辨识,以及非线性切换系统的辨识问题与收敛性分析.这些问题依然值得思考,接下来我们将进行更深入的研究.

### 参考文献:

- [1] WANG H W, XIE L R. Convergence analysis of a least squared algorithm of linear switched identification. *Journal of Control and Decision*, 2019, 6(3): 1 – 12.
- [2] CAI Fenghuang, WANG Wu, LIN Qiongbina, et al.  $H_\infty$  filtering for networked switched systems with random communication time-delays. *Control Theory & Applications*, 2011, 28(3): 309 – 314. (蔡逢煌, 王武, 林琼斌, 等. 具有一步随机通讯时延的网络化切换系统 $H_\infty$ 滤波. 控制理论与应用, 2011, 28(3): 309 – 314.)
- [3] LEE T C, JIANG Z P. Uniform asymptotic stability of nonlinear switched systems with an application to mobile robot. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2008, 53(5): 1235 – 1252.
- [4] MHASKAR P, EL-FARRA N H, CHRISTOFIDES P D. Predictive control of switched nonlinear systems with scheduled mode transitions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, 50(11): 1670 – 1680.
- [5] TONG S, SUI S, LI Y. Observed-based adaptive fuzzy tracking control for switched nonlinear systems with dead-zone. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2015, 45(12): 2816 – 2826.
- [6] LI Rong. Asynchronous  $H_\infty$  state dependent switching control of discrete-time systems with dwell time. *Acta Automatica Sinica*, 2017, 43(8): 1418 – 1424. (李荣. 基于驻留时间切换下离散切换系统的异步 $H_\infty$ 控制器设计. 自动化学报, 2017, 43(8): 1418 – 1424.)
- [7] MA R C, ZHAO J. Backstepping design for global stabilization of switched nonlinear systems in lower triangular form under arbitrary switchings. *Automatica*, 2010, 46(11): 1819 – 1823.
- [8] XIE W X, WEN C Y, LI Z G. Input-to-state stabilization of switched nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2011, 46(7): 1111 – 1116.
- [9] LIU Jiao, LIAN Jie, ZHUANG Yan. Positive stabilization for a class of switched systems with input time-delay. *Control and Decision*, 2017, 32(6): 1001 – 1006. (刘教, 连捷, 庄严. 一类具有输入时滞的切换系统的正性镇定. 控制与决策, 2017, 32(6): 1001 – 1006.)
- [10] VERDULT V, VERHAEGEN M. Subspace identification of piecewise linear systems. *IEEE Conference on Decision & Control*. Nassau, Bahama: IEEE, 2004: 3838 – 3843.
- [11] PEKPE K, MOUROT G, GASSO K, et al. Identification of switching systems using change detection technique in the subspace framework. *IEEE Conference on Decision & Control*. Nassau, Bahama: IEEE, 2004: 3720 – 3725.
- [12] BORGES J, VERDULT V, VERHAEGEN M, et al. A switching detection method based on projected subspace classification. *IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference*. Seville, Spain: IEEE, 2005: 344 – 349.
- [13] BAKO L, MERCRE G, LECOEUCE S. On-line structured subspace identification with application to switched linear systems. *International Journal of Control*, 2009, 82(8): 1496 – 1515.
- [14] SAXEN J E, SAXEN H, TOIVONEN H T. Identification of switching linear systems using self-organizing models with application to silicon prediction in hot metal. *Applied Soft Computing*, 2016, 47: 271 – 280.
- [15] MA J X, HUANG B, DING F. Parameter estimation of Markov-switching Hammerstein systems using the variational Bayesian approach. *IET Control Theory & Applications*, 2019, 13(11): 1646 – 1655.
- [16] WANG H W, XIA H. Identification algorithm of switched systems based on generalized auxiliary model. *Journal of Systems Engineering and Electronics*, 2019, 30(6): 1224 – 1232.
- [17] SEFIDMAZGI M G, KORDMAHALLEH M M, HOMAIFAR A, et al. Switched linear system identification based on bounded-switching clustering. *American Control Conference*. Chicago, USA: IEEE, 2015: 1806 – 1811.
- [18] FEDERICO B, MARIA P, LUIGI P. A randomized two-stage iterative method for switched nonlinear systems identification. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 2020, 35: 1 – 23.
- [19] GOUDJIL A, POULIQUEN M, PIGEON E, et al. Convergence analysis of a real-time identification algorithm for switched linear systems with bounded noise. *IEEE Conference on Decision and Control*. Las Vegas, USA: IEEE, 2016: 2957 – 2962.
- [20] WANG J, CHEN T. Online identification of switched linear output error models. *IEEE Multi-Conference on Systems and Control*. Denver, USA: IEEE, 2011: 1379 – 1384.
- [21] CHEN Hao, JI Minjie, GUO Ziyuan, et al. A dynamic density clustering algorithm for time series data. *Control Theory & Applications*, 2019, 36(8): 1304 – 1314. (陈皓, 冀敏杰, 郭紫园, 等. 一种时间序列数据的动态密度聚类算法. 控制理论与应用, 2019, 36(8): 1304 – 1314.)
- [22] FRIEL N, MCKEONE J P, OATES C J, et al. Investigation of the widely applicable Bayesian information criterion. *Statistics and Computing*, 2017, 27(3): 833 – 844.
- [23] HU Y B, LIU B L, ZHOU Q, et al. Recursive extended least squares parameter estimation for wiener nonlinear systems with moving average noises. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, 2014, 33(2): 655 – 664.
- [24] XIAO Deyun, FANG Chongzhi. *System Identification Theory and Application*. Beijing: Tsinghua University Press, 2014. (萧德云, 方崇智. 系统辨识理论及应用. 北京: 清华大学出版社, 2014.)
- [25] YE Y, YORIE N, CLAIRE J T. On identification of parameterized switched linear systems. *The 35th Chinese Control Conference*. Chengdu, China: IEEE, 2016: 2189 – 2195.

### 作者简介:

柴秀俊 硕士研究生, 目前研究方向为切换系统的辨识, E-mail: 317101556@qq.com;

王宏伟 教授, 博士生导师, 目前研究方向为多采样率系统辨识与控制、切换系统的辨识与控制, E-mail: 1195201627@qq.com;

王林 硕士研究生, 目前研究方向为混杂系统建模与辨识, E-mail: 1164803611@qq.com;

嵇薪儒 硕士研究生, 目前研究方向为机器学习与故障诊断, E-mail: 791378082@qq.com.