

垂直三连杆欠驱动机械臂通用控制策略设计

王乐君, 孟庆鑫, 赖旭芝[†], 吴 敏

(中国地质大学(武汉) 自动化学院, 湖北 武汉 430074; 复杂系统先进控制与智能自动化湖北省重点实验室, 湖北 武汉 430074)

摘要: 本文针对一类含单一欠驱动关节的垂直三连杆欠驱动机械臂提出一种基于振荡衰减轨迹的通用控制策略。与传统的分区控制策略相比, 本文控制策略无需采用分区方式就能快速地实现将机械臂末端点由垂直向下初始位置开始移动, 并最终稳定在垂直向上目标位置的控制目标。首先, 根据驱动连杆的初始和目标状态, 为驱动连杆规划含可调参数的振荡衰减轨迹。该轨迹能够在一定调节时间内将驱动连杆直接由初始状态移动至目标状态。基于连杆状态间的耦合关系, 利用粒子群优化算法优化轨迹参数使欠驱动连杆在相同调节时间内也运动至目标状态。接着, 利用滑模方法设计跟踪控制器使驱动连杆跟踪优化后的振荡衰减轨迹, 这样, 系统末端点将由初始位置移动至目标位置。进一步利用极点配置方法设计镇定控制器克服重力的作用将末端点稳定在目标位置。最后, 通过仿真实验验证所提控制策略的有效性。

关键词: 垂直三连杆欠驱动机械臂; 轨迹; 粒子群优化; 跟踪控制; 稳定控制

引用格式: 王乐君, 孟庆鑫, 赖旭芝, 等. 垂直三连杆欠驱动机械臂通用控制策略设计. 控制理论与应用, 2020, 37(12): 2493–2500

DOI: 10.7641/CTA.2020.00238

General control strategy design for vertical three-link underactuated manipulators

WANG Le-jun, MENG Qing-xin, LAI Xu-zhi[†], WU Min

(School of Automation, China University of Geosciences, Wuhan Hubei 430074, China;

Hubei Key Laboratory of Advanced Control and Intelligent Automation for Complex Systems, Wuhan Hubei 430074, China)

Abstract: This paper proposes a unified control strategy based on oscillatory attenuation trajectory for a three-link vertical underactuated manipulator with a single underactuated joint. Compared with the traditional partition control strategy, the proposed control strategy realizes the control target, which is to move the end point of the manipulator from the vertical downward initial position and to stabilize it at the vertical upward target position, quickly without using the partition control method. Firstly, according to the initial states and final states of the active links, the oscillation attenuation trajectories with adjustable parameters are planned, along which the active links can move from the initial states to the target states directly within a certain adjustment time. Based on the coupling action among the states of all links, we optimize the trajectory parameters by the particle swarm optimization algorithm so as to ensure the passive link reaches the target states in same adjustment time. Next, we design the tracking controller to track the optimized trajectories of the active links, moving the endpoint to the target position. Further, the pole assignment method is used to design the stabilization controller to overcome gravity and stabilize the endpoint at the target position. Finally, the effectiveness of the proposed method is verified by simulation experiments.

Key words: vertical three-link underactuated manipulator; trajectories; particle swarm optimization (PSO); tracking control; stable control

Citation: WANG Lejun, MENG Qingxin, LAI Xuzhi, et al. General control strategy design for vertical three-link underactuated manipulators. *Control Theory & Applications*, 2020, 37(12): 2493–2500

收稿日期: 2020-05-03; 录用日期: 2020-08-10。

[†]通信作者。E-mail: laixz@cug.edu.cn; Tel.: +86 27-87175051。

本文责任编辑: 方勇纯。

国家自然科学基金项目(61773353), 湖北省自然科学基金创新群体项目(2015CFA010), 高等学校学科创新引智计划项目(B17040)资助。

Supported by the National Natural Science Foundation of China (61773353), the Hubei Provincial Natural Science Foundation of China (2015CFA010) and the “111” Project (B17040).

1 引言

欠驱动系统^[1-2]是一类控制输入维数小于自由度维数的非线性系统, 该类系统在节能、降低成本、减轻重量和增强系统灵活度等方面具有一定优势。然而, 该类系统动力学特性比较复杂, 系统状态间存在强耦合和非线性关系。由于部分驱动关节的缺失, 该类系统的控制存在巨大的挑战。因此, 对欠驱动系统的研究具有重要的实用价值和理论意义。

垂直欠驱动机械臂^[3-4]是一类典型的欠驱动系统, 此类系统的控制目标通常是将机械臂末端点从垂直向下的初始位置开始移动, 并最终将其稳定在垂直向上的目标位置^[5-6]。垂直欠驱动机械臂属于二阶非完整系统^[7], 系统连杆间存在角加速度约束, 不满足Brockett条件^[8], 很难通过一个光滑的控制器实现系统的控制目标。但由于该类系统在垂直向上目标位置附近线性近似模型可控, 因此学者们通常利用分区控制的方法^[9-10]将系统运动空间划分为摇起区和平衡区, 进而实现系统的控制目标。

然而, 分区控制方法存在以下问题: 1) 无法从理论上精确地划分摇起区和平衡区的范围。当平衡区范围划分得较窄时, 会导致切换条件很难满足^[11]; 而当平衡区范围划分得较大时, 在切换点处线性近似模型存在较大误差, 因此切换时会出现力矩突变^[12-13], 从而使平衡控制器很难将系统稳定到目标位置; 2) 摆起运动控制过程中, 由于系统状态之间复杂的耦合关系, 常用的揆起控制易出现奇异现象。尽管部分学者通过调整控制器参数可以规避奇异问题^[14], 但这会增加控制器设计难度。另外, 现有的垂直欠驱动机械臂的各种控制方法只能实现特定结构系统的控制目标^[15-16], 缺少对这类系统通用控制方法的研究。

为解决上述问题, 本文针对含单一欠驱动关节的垂直三连杆欠驱动机械臂, 提出一种基于振荡衰减轨迹的通用控制策略, 该控制策略无需分区即可实现系统的控制目标。首先, 根据驱动连杆的初始和目标状态, 为驱动连杆规划含可调参数的振荡衰减轨迹, 该轨迹能确保驱动连杆在一定时间内由初始状态运动到目标状态。同时, 基于连杆状态间存在的耦合关系, 引入粒子群优化算法优化驱动连杆轨迹的参数, 确保欠驱动连杆和驱动连杆在相同时刻运动至目标状态。设计轨迹跟踪控制器使驱动连杆跟踪优化后的轨迹, 则机械臂末端点由垂直向下初始位置运动至垂直向上目标位置。进而设计镇定控制器将末端点稳定在目标位置。最后, 通过仿真实验证明所提方法的有效性。

本文的创新点如下:

- 1) 所提基于振荡衰减轨迹的控制策略无需对系统运动空间进行划分即可实现系统的控制目标;
- 2) 所提轨迹规划与跟踪控制方法可以有效规避运动过程中控制器的奇异现象, 简化控制器设计;

3) 所提控制策略是一种通用控制策略, 对含单一欠驱动关节的垂直三连杆欠驱动机械臂中的三类系统均有效。

2 系统动力学模型

图1为垂直三连杆全驱动机械臂示意图。其中: m_r , L_r , I_r 分别代表机械臂第 r 连杆的质量、长度和转动惯量; l_r 为第 r 连杆质心到前一关节的长度; u_r 为系统控制力矩; $r = 1, 2, 3$ 。

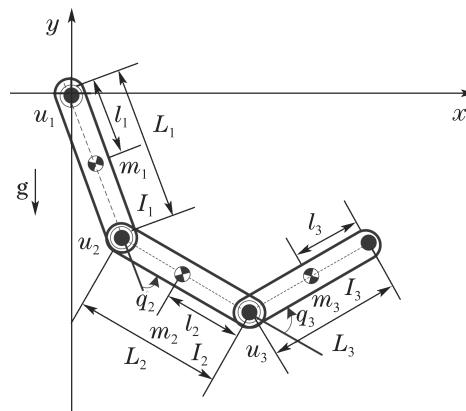


图1 垂直三连杆全驱动机械臂模型

Fig. 1 The model of vertical three-link full-actuated manipulators

由欧拉-拉格朗日方程可得三连杆垂直全驱动机械臂的动力学模型为

$$M(q)\ddot{q} + H(q, \dot{q}) + G(q) = U, \quad (1)$$

其中: $M(q)$ 为惯性矩阵; $H(q, \dot{q})$ 为科里奥利力和离心力的结合项; $G(q)$ 为重力向量; $q = [q_1 \ q_2 \ q_3]^T$, $\dot{q} = [\dot{q}_1 \ \dot{q}_2 \ \dot{q}_3]^T$ 和 $\ddot{q} = [\ddot{q}_1 \ \ddot{q}_2 \ \ddot{q}_3]^T$ 分别为连杆角度、角速度和角加速度向量; $U = [u_1 \ u_2 \ u_3]^T$ 为力矩向量。具体表达式见参考文献[16]。

当第 j ($j \in \{1, 2, 3\}$) 关节缺少驱动装置时, 上述全驱动系统变成欠驱动系统, $u_j = 0$ 。记机械臂第 i 关节为驱动关节, $i \in \{c_1, c_2\} \subseteq \{1, 2, 3\} \setminus \{j\}$ 。由式(1)可得驱动连杆和欠驱动连杆状态量之间的耦合关系为

$$M_j\ddot{q}_j + H_j + G_j = 0, \quad (2)$$

其中 M_j , H_j 和 G_j 分别为 $M(q)$, $H(q, \dot{q})$ 和 $G(q)$ 的第 j 行。

根据欠驱动关节位置的不同, 可将含单一欠驱动关节的垂直三连杆欠驱动机械臂分为3类: 1) PAA系统($j=1$); 2) APA系统($j=2$); 3) AAP系统($j=3$)。其中: A代表驱动关节, P代表欠驱动关节。

记 $x_1 = [q_1 \ q_2 \ q_3]^T$, $x_2 = [\dot{q}_1 \ \dot{q}_2 \ \dot{q}_3]^T$, $x = [x_1^T \ x_2^T]^T$, 式(1)可写为如下状态方程的形式:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = F + BU, \end{cases} \quad (3)$$

其中:

$$F = [f_1(x) \ f_2(x) \ f_3(x)]^T = -M^{-1}(q)[H(q, \dot{q}) + G], \quad (4)$$

$$B = [b_1(x) \ b_2(x) \ b_3(x)]^T = M^{-1}(q). \quad (5)$$

3 轨迹规划

本节针对驱动连杆设计振荡衰减轨迹, 该轨迹能够保证驱动连杆在一定时间运动到目标状态。然后, 基于连杆状态间的耦合关系, 通过粒子群优化算法优化驱动连杆轨迹参数, 使欠驱动连杆在相同时间内运动至目标状态。

3.1 驱动连杆振荡衰减轨迹设计

记 $[q_{c_1} \ q_{c_2} \ \dot{q}_{c_1} \ \dot{q}_{c_2}]$ 为系统驱动连杆的状态。根据系统控制目标, 可得驱动连杆的初始状态和目标状态分别为 $[q_{c_1s} \ q_{c_2s} \ 0 \ 0]$ 和 $[q_{c_1f} \ q_{c_2f} \ 0 \ 0]$ 。基于此, 为第 i 根驱动连杆设计如下振荡衰减轨迹:

$$\bar{q}_i = (q_{if} - q_{is})(1 - \frac{e^{-k_{i1}k_{i2}t}}{\sqrt{1-k_{i1}^2}} \sin(k_{i2}t \times \sqrt{1-k_{i1}^2} + \arccos k_{i1})) + q_{is}, \quad (6)$$

其中: q_{is} 和 q_{if} 分别为驱动连杆的初始角度和目标角度; k_{i1} 和 k_{i2} 为可调节的轨迹参数且 $0 < k_{i1} < 1, k_{i2} > 0$ 。

对式(6)求导可得

$$\dot{\bar{q}}_i = -(q_{if} - q_{is}) \frac{k_{i2} e^{-k_{i1}k_{i2}t}}{\sqrt{1-k_{i1}^2}} \cos(\sqrt{1-k_{i1}^2} k_{i2} t + \arccos k_{i1}) - \frac{k_{i1} k_{i2} e^{-k_{i1}k_{i2}t}}{\sqrt{1-k_{i1}^2}} \sin(k_{i2} t \sqrt{1-k_{i1}^2} + \arccos k_{i1}). \quad (7)$$

容易验证, 当 $t = 0$ 时, $\bar{q}_i = q_{is}$, $\dot{\bar{q}}_i = 0$; 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $\bar{q}_i = q_{if}$, $\dot{\bar{q}}_i = 0$ 。

对式(7)进一步求导可得

$$\ddot{\bar{q}}_i = (q_{if} - q_{is})(2k_{i1}k_{i2}^2 e^{-k_{i1}k_{i2}t} \cos(\sqrt{1-k_{i1}^2} k_{i2} t + \arccos k_{i1}) + \frac{k_{i2}^2 e^{-k_{i1}k_{i2}t}}{\sqrt{1-k_{i1}^2}} \sin(k_{i2} t \sqrt{1-k_{i1}^2} + \arccos k_{i1}) - \frac{k_{i1}^2 k_{i2}^2 e^{-k_{i1}k_{i2}t}}{\sqrt{1-k_{i1}^2}} \times \sin(\sqrt{1-k_{i1}^2} k_{i2} t + \arccos k_{i1})). \quad (8)$$

由式(8)可知, $\ddot{\bar{q}}_i$ 有界, 这也就意味着 \bar{q}_i 和 $\dot{\bar{q}}_i$ 一致连续。所设计的轨迹能够使驱动连杆从初始状态 $[q_{c_1s} \ q_{c_2s} \ 0 \ 0]$ 开始移动, 并最终收敛于目标状态 $[q_{c_1f} \ q_{c_2f} \ 0 \ 0]$ 。

图2为轨迹 \bar{q}_i 的示意图, 其中, δ 为距离目标角度的误差值(δ 为很小的正数)。记 t_s 为轨迹进入到距离目标角度允许误差范围 $\pm \delta$ 之内的时间, 则

$$|\bar{q}_i(t) - \bar{q}_i(\infty)| \leq \delta |\bar{q}_i(\infty)|, \quad t \geq t_s. \quad (9)$$

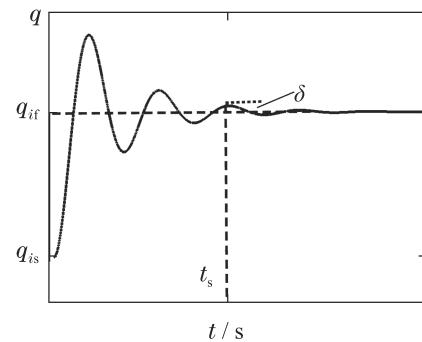


图 2 轨迹 \bar{q}_i 的示意图

Fig. 2 Schematic diagram of the trajectory \bar{q}_i

结合式(6), 可得

$$\begin{aligned} & \left| \frac{e^{-k_{i1}k_{i2}t}}{\sqrt{1-k_{i1}^2}} \sin(\sqrt{1-k_{i1}^2} k_{i2} t + \arccos k_{i1}) \right| \times \\ & (q_{if} - q_{is}) \leq \left| \frac{e^{-k_{i1}k_{i2}t}}{\sqrt{1-k_{i1}^2}} \right| (q_{if} - q_{is}) \leq \\ & \delta |q_{if}|, \quad t \geq t_s. \end{aligned} \quad (10)$$

当 $q_{is} \neq q_{if}$ 且两者中有一项为0时, 总有

$$\frac{e^{-k_{i1}k_{i2}t}}{\sqrt{1-k_{i1}^2}} \leq \delta, \quad t \geq t_s. \quad (11)$$

根据式(11)可以估算 t_s 。由式(11)可得

$$\delta \sqrt{1-k_{i1}^2} = e^{-k_{i1}k_{i2}t}, \quad t = t_s. \quad (12)$$

将上式两边取对数, 可得

$$t_s = \frac{-\ln \delta - \ln \sqrt{1-k_{i1}^2}}{k_{i1}k_{i2}}. \quad (13)$$

当 $0 < k_{i1} < 1$ 时, $-\ln \delta \gg -\ln \sqrt{1-k_{i1}^2}$ 。因此, 相较于 $-\ln \delta$, $-\ln \sqrt{1-k_{i1}^2}$ 可以忽略, 所以

$$t_s \approx -\frac{\ln \delta}{k_{i1}k_{i2}}. \quad (14)$$

当 $\delta = 0.01$ 时, $t_s \approx \frac{5}{k_{i1}k_{i2}}$ 。为两个驱动连杆分别设计了振荡衰减轨迹。当 $i = c_1$ 时, 存在调节时间 $t_{s1} \approx \frac{5}{k_{c_11}k_{c_12}}$, 则在 $t \geq t_{s1}$ 时, 第 c_1 根驱动连杆运动至目标状态。当 $i = c_2$ 时, 存在调节时间

$$t_{s2} \approx \frac{5}{k_{c_21}k_{c_22}},$$

则在 $t \geq t_{s2}$ 时, 第 c_2 根驱动连杆运动至目标状态。为保证在相同时间内两根驱动连杆均运动至目标状态, 将最终调节时间 t_s 取为

$$t_s = \max\{t_{s1}, t_{s2}\}. \quad (15)$$

此时, 驱动连杆运动至目标状态, 即

$$[\bar{q}_i, \dot{\bar{q}}_i]|_{t=t_s} \rightarrow [q_{if}, 0]. \quad (16)$$

式(2)为连杆状态间的耦合关系。根据这一耦合关系,本文发现,当驱动连杆的运动状态改变时,欠驱动连杆的运动状态也随之改变。由式(7)–(8)可知,驱动连杆的运动状态随轨迹参数 k_{i1} 和 k_{i2} 而变化。因此,通过改变 k_{i1} 和 k_{i2} 可以间接调节欠驱动连杆在 t_s 时刻的状态量。接下来需选择合适 k_{i1} 和 k_{i2} 使欠驱动连杆在 t_s 时刻也运动至其目标状态,即

$$[\bar{q}_j, \dot{\bar{q}}_j]|_{t=t_s} \rightarrow [q_{jf}, 0], \quad (17)$$

其中: \bar{q}_j 和 $\dot{\bar{q}}_j$ 为欠驱动连杆的角度和角速度, q_{jf} 为欠驱动连杆的目标角度。

下一小节中,引入粒子群优化算法优化轨迹参数,从而使欠驱动连杆在相同调节时间内运动至目标状态,即保证式(17)成立。

3.2 轨迹参数优化

为保证式(17)成立,本节通过粒子群优化算法优化轨迹参数 k_{i1} 和 k_{i2} 。结合欠驱动连杆目标状态和 t_s 时刻欠驱动连杆状态量,定义评价函数为

$$ht = |\bar{q}_j|_{t=t_s} - q_{jf}| + |\dot{\bar{q}}_j|_{t=t_s}. \quad (18)$$

粒子群算法流程如下:

算法 1 轨迹参数优化.

参数初始化: $gen = 0$, 随机初始化粒子群;

循环程序:

for $gen = 0 : G_{\max}$ do

将粒子分别赋值给 k_{i1} , k_{i2} ; 将 k_{i1} , k_{i2} 代入式(6), 并结合耦合关系(2), 计算 t_s 时刻欠驱动连杆的状态 $[\bar{q}_j, \dot{\bar{q}}_j]$; 将 $[\bar{q}_j, \dot{\bar{q}}_j]|_{t=t_s}$ 代入式(18)中, 计算 ht ;

if $ht < \varepsilon$ (ε 为很小的正数) then

输出 k_{i1} , k_{i2} ;

算法结束;

end

更新粒子, 跳回循环程序。

end

通过粒子群算法得到一组优化参数 k_{i1} 和 k_{i2} , 将其代入到式(6)中, 即可得到优化后的驱动连杆轨迹。当 $t = t_s$ 时, 驱动连杆沿优化后的轨迹运动至目标状态, 同时欠驱动连杆也运动至目标状态, 即

$$[\bar{q}_i \ \bar{q}_j \ \dot{\bar{q}}_i \ \dot{\bar{q}}_j]|_{t=t_s} \rightarrow [q_{if} \ q_{jf} \ 0 \ 0]. \quad (19)$$

此时, 根据驱动连杆和欠驱动连杆状态量的变化, 系统末端点由垂直向下初始位置运动至垂直向上的目标位置。

4 控制器设计

基于优化后的振荡衰减轨迹, 利用滑模方法设计跟踪控制器使系统末端点从垂直向下初始位置移动到垂直向上目标位置; 同时, 利用极点配置方法设计

镇定控制器克服重力作用将末端点稳定在垂直向上目标位置。

4.1 跟踪控制器设计

利用滑模方法设计跟踪控制器。设计滑模面 S_i :

$$S_i = \eta_0(q_i - \bar{q}_i) + (\dot{q}_i - \dot{\bar{q}}_i), \quad (20)$$

其中: $\eta_0 > 0$, \bar{q}_i 和 $\dot{\bar{q}}_i$ 见式(6)–(7)。

求 S_i 关于时间的导数, 得到

$$\dot{S}_i = (f_i + b_i u_i - \ddot{\bar{q}}_i) + \eta_0(\dot{q}_i - \dot{\bar{q}}_i), \quad (21)$$

其中 $\ddot{\bar{q}}_i$ 见式(8)。

根据滑模面 S_i 构造李雅普诺夫函数 Ψ_1 :

$$\Psi_1 = \frac{1}{2} S_i^2. \quad (22)$$

设计跟踪控制器 u_{it} 为

$$u_{it} = -\frac{1}{b_i}(f_i - \ddot{\bar{q}}_i + \eta_0(\dot{q}_i - \dot{\bar{q}}_i) + \eta_1 S_i + \eta_1 \operatorname{sgn} S_i), \quad (23)$$

其中: $\eta_1 > 0$, $\ddot{\bar{q}}_i$ 如式(8)所示。

因此, 结合式(23), 对 Ψ_1 求导可得

$$\dot{\Psi}_1 = S_i \dot{S}_i = S_i(-\eta_1 S_i - \eta_1 \operatorname{sgn} S_i) = -\eta_1 S_i^2 - \eta_1 |S_i| \leq 0. \quad (24)$$

根据LaSalle不变集原理, 当 $\dot{\Psi}_1 = 0$, $S_i \equiv 0$, 则 $q_i \equiv \bar{q}_i$, $\dot{q}_i \equiv \dot{\bar{q}}_i$ 。驱动连杆沿着优化后的振荡衰减轨迹运动至目标状态。此时, 机械臂末端点由垂直向下初始位置运动至垂直向上目标位置。

然而, 机械臂末端点受重力作用很难稳定在垂直向上目标位置。因此, 本文进一步设计镇定控制器实现系统的稳定控制。

4.2 镇定控制器设计

本节利用极点配置方法设计镇定控制器克服重力作用, 将末端点稳定在垂直向上目标位置。

在目标位置处对式(3)进行近似线性化, 得到

$$\dot{x} = Ax + C\bar{U}, \quad (25)$$

其中: $\bar{U} = [U_{c1} \ U_{c2}]^T$, A 和 C 的表达式见附录。

根据 A 和 C 的表达式, 可以计算出

$$\operatorname{rank}[C \ AC \ \cdots \ A^5C] = 6, \quad (26)$$

说明线性近似模型(25)是可控的。

设计镇定控制器 u_{is} 为

$$u_{is} = -Kx, \quad (27)$$

其中 K 为增益矩阵。

将式(27)代入式(25)中, 可得

$$\dot{x} = (A - CK)x. \quad (28)$$

通过极点配置方法, 并借助MATLAB中PLACE命令求得 K , 使 $(A - CK)$ 的特征根位于坐标轴虚轴左半

平面, 从而保证系统末端点稳定在垂直向上目标位置.

综上所述, 本文将控制器切换条件设计为 $t \geq t_s$. 基于此, 将控制过程分为轨迹跟踪控制和镇定控制两个阶段. 当 $0 \leq t < t_s$ 时, $u_i = u_{it}$, 通过轨迹跟踪控制, 系统末端点运动至目标位置; 当 $t \geq t_s$ 时, $u_i = u_{is}$, 末端点在镇定控制器作用下稳定在垂直向上目标位置.

5 仿真实验及分析

本节通过3组仿真实验验证所提控制策略的有效性. 选择如下3连杆垂直欠驱动机械臂模型参数进行仿真:

$$\begin{cases} m_1 = 1.258 \text{ kg}, m_2 = 5.686 \text{ kg}, m_3 = 2.162 \text{ kg}, \\ L_1 = 0.34 \text{ m}, L_2 = 0.29 \text{ m}, L_3 = 0.52 \text{ m}, \\ J_1 = 0.0121 \text{ kg/m}^2, J_2 = 0.0398 \text{ kg/m}^2, \\ J_3 = 0.0487 \text{ kg/m}^2. \end{cases} \quad (29)$$

将控制器(23)(27)及粒子群算法中参数取为

$$\begin{cases} \eta_0 = 1.2, \eta_1 = 1, N = 100, N_v = 5, \delta = 0.01, \\ G_{\max} = 100, p_1 = 0.6, p_2 = p_3 = 2. \end{cases} \quad (30)$$

5.1 PAA系统仿真

将驱动连杆初始角度和目标角度分别取为

$$\begin{cases} q_{2s} = 0 \text{ rad}, q_{3s} = 0 \text{ rad}, \\ q_{2f} = 2\pi \text{ rad}, q_{3f} = 2\pi \text{ rad}. \end{cases} \quad (31)$$

控制器(23)(27)及粒子群算法中各参数如式(30). 根据式(29)–(31), 通过粒子群算法可求得

$$\begin{cases} k_{21} = 0.3600, k_{22} = 4.2895, \\ k_{31} = 0.5000, k_{32} = 3.2000. \end{cases} \quad (32)$$

因此 $t_s = 3.2379 \text{ s}$.

将期望的极点选择为 $-2, -3, -4, -4, -5, -6$. 利用MATLAB中PLACE命令求得 K 为

$$K = \begin{bmatrix} -168.6812 & -59.1237 & -16.8965 \\ -42.5541 & -18.9903 & -5.9494 \\ -173.7729 & -70.0473 & -15.7109 \\ -44.0747 & -19.8706 & -6.1017 \end{bmatrix}. \quad (33)$$

仿真结果如图3. 当 $t \leq t_s = 3.2379 \text{ s}$ 时, 在跟踪控制器(23)作用下, $[q_1 \ q_2 \ q_3 \ \dot{q}_1 \ \dot{q}_2 \ \dot{q}_3]$ 收敛到 $[2\pi \ 2\pi \ 2\pi \ 0 \ 0 \ 0]$, 系统末端点从垂直向下初始位置运动到垂直向上目标位置. 同时力矩收敛为零. 当 $t > 3.2379 \text{ s}$ 时, 控制器由跟踪控制器(23)切换至镇定控制器(27), 末端点在控制器(27)作用下稳定在垂直向上目标位置, 从而实现控制目标. 控制力矩保持在 $[-58.8035, 76.3107] \text{ N}\cdot\text{m}$ 范围内, 整个控制过程中未出现力矩突变. 与文献[16]中方法和控制效果进行比较, 本文方法设计简单, 计算量小, 而且控制时间显著缩短, 整个控

制过程更加平滑.

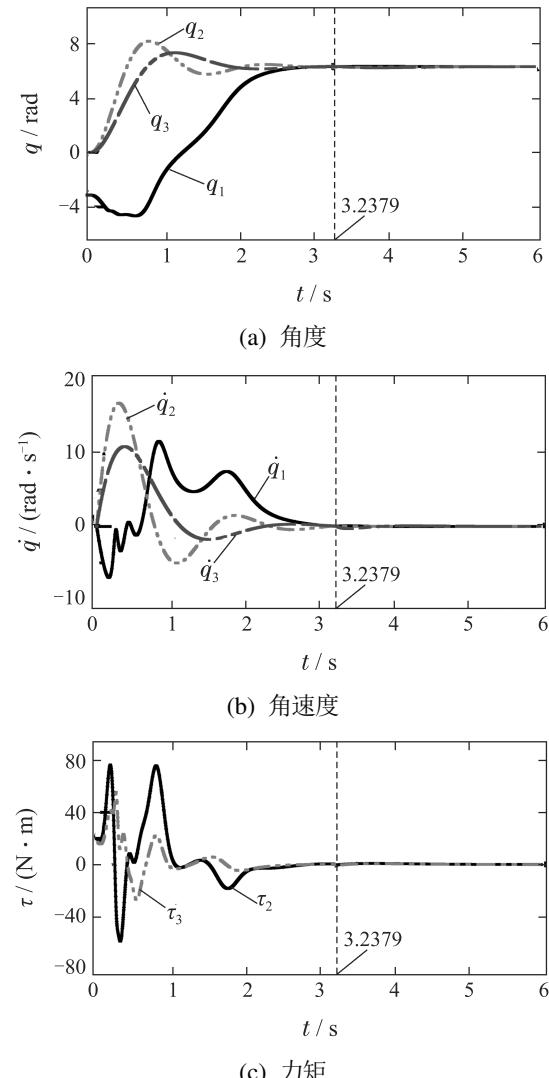


图 3 PAA系统仿真结果

Fig. 3 The simulation results for the PAA

5.2 APA系统仿真

将驱动连杆初始角度和目标角度取为

$$\begin{cases} q_{1s} = -\pi \text{ rad}, q_{3s} = 0 \text{ rad}, \\ q_{1f} = 0 \text{ rad}, q_{3f} = 2\pi \text{ rad}. \end{cases} \quad (34)$$

控制器(23)(27)及粒子群算法中各参数如式(30). 根据式(29)–(30)和式(34). 通过粒子群算法可求得

$$\begin{cases} k_{11} = 0.5956, k_{12} = 3.4469, \\ k_{31} = 0.5471, k_{32} = 5.9262. \end{cases} \quad (35)$$

因此 $t_s = 2.4355 \text{ s}$.

选择相同极点, 求得增益矩阵 K 为

$$K = \begin{bmatrix} -87.1554 & -108.2027 & -34.8795 \\ -26.4874 & -19.3381 & -8.1372 \\ 25.7838 & 23.4988 & 12.1963 \\ 7.6519 & 5.4702 & 2.4680 \end{bmatrix}. \quad (36)$$

图4为仿真结果: 当 $t \leq t_s = 2.4355 \text{ s}$ 时, 通过跟踪

控制, $[q_1 \ q_2 \ q_3 \ \dot{q}_1 \ \dot{q}_2 \ \dot{q}_3] \rightarrow [0 \ 0 \ 2\pi \ 0 \ 0 \ 0]$, 系统末端点运动到垂直向上目标位置。当 $t > 2.4355$ s 时, 在控制器(27)作用下实现末端点在目标位置的稳定控制。本文方法在 $t = t_s$ 时各连杆状态量均收敛至目标状态, 力矩收敛到零。因此, 在控制器切换时没有产生力矩突变。

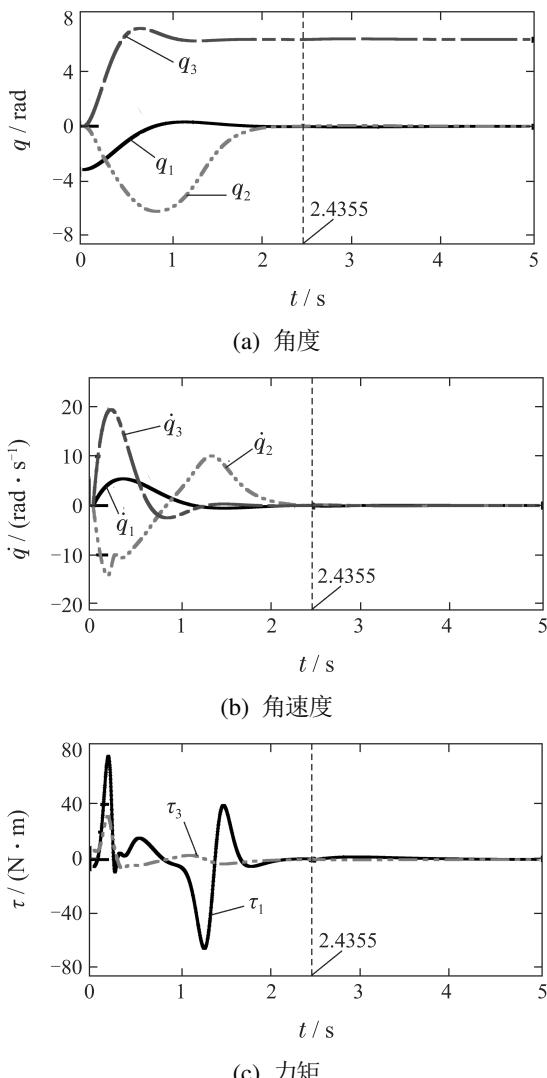


图 4 APA 系统仿真结果

Fig. 4 The simulation results for the APA

5.3 AAP系统仿真

将驱动连杆初始角度和目标角度取为

$$\begin{cases} q_{1s} = -\pi \text{ rad}, \ q_{2s} = 0 \text{ rad}, \\ q_{1f} = 0 \text{ rad}, \ q_{2f} = 2\pi \text{ rad}. \end{cases} \quad (37)$$

控制器(23)(27)及粒子群优化算法中各参数如式(30)。根据式(29)–(30)和式(37), 通过粒子群优化算法可求得

$$\begin{cases} k_{11} = 0.3400, \ k_{12} = 1.4252, \\ k_{21} = 0.8690, \ k_{22} = 1.0295. \end{cases} \quad (38)$$

因此 $t_s = 10.3185$ s。

用相同方法求得增益矩阵 K 为

$$K = \begin{bmatrix} -64.3448 & -93.3974 & -101.0578 \\ -25.3559 & -22.7603 & -17.1277 \\ -23.7377 & -23.2346 & -35.7400 \\ -8.8203 & -7.5680 & -5.8585 \end{bmatrix}. \quad (39)$$

仿真结果如图5所示。当 $t \leq t_s = 10.3185$ s 时, 在跟踪控制器(23)作用下,

$[q_1 \ q_2 \ q_3 \ \dot{q}_1 \ \dot{q}_2 \ \dot{q}_3] \rightarrow [0 \ 2\pi - 2\pi \ 0 \ 0 \ 0]$, 系统末端点运动到垂直向上目标位置。当 $t > 10.3185$ s 时, 在镇定控制器(27)作用下, 末端点稳定在垂直向上目标位置, 实现控制目标。同样地, 整个控制过程快速而且平滑。

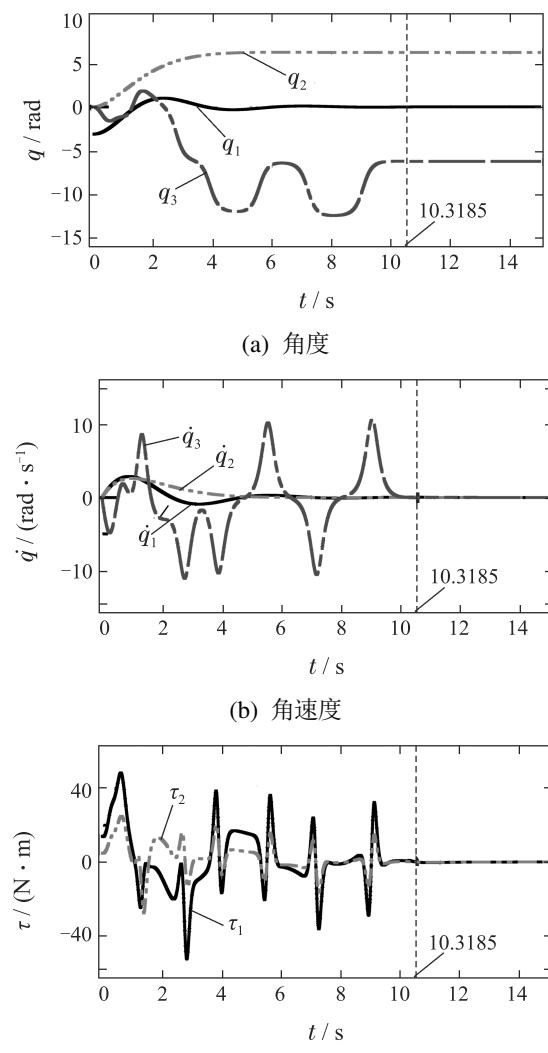


图 5 AAP 系统仿真结果

Fig. 5 The simulation results for the AAP

6 结论

本文针对含单一欠驱动关节的垂直三连杆欠驱动机械臂提出一种基于振荡衰减轨迹规划的通用控制策略, 通过不分区的方式快速且平滑地实现系统控制

目标。根据驱动连杆的初始和目标状态, 为驱动连杆规划一条含可调参数的振荡衰减轨迹。所设计的轨迹可在一定调节时间内将驱动连杆由初始状态直接移动至目标状态。基于连杆状态间的耦合关系, 通过粒子群优化算法优化轨迹参数使欠驱动连杆在相同调节时间内也运动至目标状态。接着通过设计跟踪控制器和镇定控制器实现系统的控制目标。最后, 仿真实验验证所提控制策略的有效性。值得一提的是, 本文方法能够有效规避运动过程中控制器的奇异问题, 极大地简化控制器设计。另外, 本文方法还可以推广至含单一欠驱动关节的 n 连杆 ($n \geq 3$) 垂直欠驱动机械臂控制策略设计中。

参考文献:

- [1] SUN Ning, FANG Yongchun. A review for the control of a class of underactuated systems. *CAAI Transactions on Intelligent Systems*, 2011, 6(3): 200 – 207.
(孙宁, 方勇纯. 一类欠驱动系统的控制方法综述. 智能系统学报, 2011, 6(3): 200 – 207.)
- [2] HE B, LIU Y J. Underactuated robotics: A review. *International Journal of Advanced Robotic Systems*, 2019, 16(4): 1 – 29.
- [3] XIN X, LIU Y. Reduced-order stable controllers for two-link underactuated planar robots. *Automatica*, 2013, 49(7): 2176 – 2183.
- [4] IZUMI K, KAMADA Y, ICHIDA K, et al. A switching control of underactuated manipulators by introducing a definition of monotonically decreasing energy. *IEEE International Conference on Industrial Informatics*. Daejeon, Korea: IEEE, 2008: 383 – 388.
- [5] EOM M, CHWA D. Robust swing-up and balancing control using a nonlinear disturbance observer for the pendubot system with dynamic friction. *IEEE Transactions on Robotics*, 2015, 31(2): 331 – 343.
- [6] HORIBE T, SAKAMOTO N. Nonlinear optimal control for swing up and stabilization of the acrobot via stable manifold approach: Theory and experiment. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2019, 27(6): 2374 – 2387.
- [7] ZHANG Pengfei, GUO Ge. Global asymptotic stabilization control with variable periods for underactuated surface vessels. *Control Theory & Applications*, 2019, 36(5): 746 – 752.
(张鹏飞, 郭戈. 欠驱动水面机器人变周期全局渐近镇定控制. 控制理论与应用, 2019, 36(5): 746 – 752.)
- [8] BROCKETT W. Asymptotic stability and feedback stabilization. *Differential Geometric Control Theory*, 1983, 27(1): 181 – 191.
- [9] QI R, KHAJEPOUR A, MELEK W W. Modeling, tracking, vibration and balance control of an underactuated mobile manipulator (UMM). *Control Engineering Practice*, 2019, 93: 104159.
- [10] ENDO K, YABUNO H. Swing-up control of a three-link underactuated manipulator by high-frequency horizontal excitation. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 2013, 8(1): 011002.
- [11] NIU Ruiyan, XU Wuxiao, LIU Jinkun. Sliding mode control and experiment study for underactuated manipulator. *Chinese Journal of Scientific Instrument*, 2016, 37(2): 348 – 355.
(牛瑞燕, 许午啸, 刘金琨. 欠驱动机械臂滑模控制与实验研究. 仪器仪表学报, 2016, 37(2): 348 – 355.)
- [12] MOBAYEN S. Design of LMI-based sliding mode controller with an exponential policy for a class of underactuated systems. *Complexity*, 2016, 21(5): 117 – 124.
- [13] LAI X Z, SHE J H, YANG S X, et al. Comprehensive unified control strategy for underactuated two-link manipulators. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 2008, 39(2): 389 – 398.
- [14] LAI X Z, ZHANG A C, WU M, et al. Singularity-avoiding swing-up control for underactuated three-link gymnast robot using virtual coupling between control torques. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2015, 25(2): 207 – 221.
- [15] LAI X Z, ZHANG Z, WU M. Hybrid control strategy for an underactuated three-link manipulator. *Scientia Sinica*, 2013, 43(2): 287 – 302.
- [16] ZHANG A C, SHE J H, QIU J L, et al. Motion trajectory design for underactuated three-link gymnast robot. *Proceedings of the 11th Asian Control Conference*. Gold Coast, Australia: IEEE Computer Society, 2017: 1258 – 1263.

附录

A 的具体表达式为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\lambda_{41}}{\Delta} & \frac{\lambda_{42}}{\Delta} & \frac{\lambda_{43}}{\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\lambda_{51}}{\Delta} & \frac{\lambda_{52}}{\Delta} & \frac{\lambda_{53}}{\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\lambda_{61}}{\Delta} & \frac{\lambda_{62}}{\Delta} & \frac{\lambda_{63}}{\Delta} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{A1})$$

其中:

$$\begin{aligned} \Delta &= \alpha_4\alpha_3^2 - 2\alpha_3\alpha_5\alpha_6 + \alpha_2\alpha_5^2 + \alpha_1\alpha_6^2 - \alpha_1\alpha_2\alpha_4, \\ \lambda_{41} &= \alpha_3\alpha_4\beta_2 + \alpha_2\alpha_5\beta_3 - \alpha_3\alpha_6\beta_3 - \alpha_5\alpha_6\beta_2 + \beta_1\alpha_6^2 - \beta_1\alpha_2\alpha_4, \\ \lambda_{42} &= \alpha_3\alpha_4\beta_2 + \alpha_2\alpha_5\beta_3 - \alpha_3\alpha_6\beta_3 - \alpha_5\alpha_6\beta_2, \\ \lambda_{43} &= \alpha_2\alpha_5\beta_3 - \alpha_3\alpha_6\beta_3, \\ \lambda_{51} &= \alpha_5^2\beta_2 - \alpha_6^2\beta_1 + \alpha_2\alpha_4\beta_1 + \alpha_3\alpha_4\beta_1 - \alpha_3\alpha_4\beta_2 + \alpha_1\alpha_6\beta_3 - \alpha_2\alpha_5\beta_3 - \alpha_3\alpha_5\beta_3 + \alpha_3\alpha_6\beta_3 + \alpha_5\alpha_6\beta_2, \\ \lambda_{52} &= \alpha_5^2\beta_2 - \alpha_1\alpha_4\beta_2 - \alpha_3\alpha_4\beta_2 + \alpha_1\alpha_6\beta_3 - \alpha_2\alpha_5\beta_3 - \alpha_3\alpha_5\beta_3 + \alpha_3\alpha_6\beta_3 + \alpha_5\alpha_6\beta_2, \\ \lambda_{53} &= \alpha_1\alpha_6\beta_3 - \alpha_2\alpha_5\beta_3 - \alpha_3\alpha_5\beta_3 + \alpha_3\alpha_6\beta_3, \\ \lambda_{61} &= \alpha_3^2\beta_3 - \alpha_5^2\beta_2 - \alpha_1\alpha_2\beta_3 + \alpha_1\alpha_4\beta_2 - \alpha_2\alpha_5\beta_1 - \alpha_3\alpha_4\beta_1 + \alpha_1\alpha_6\beta_2 - \alpha_1\alpha_6\beta_3 - \alpha_3\alpha_5\beta_2 - \alpha_3\alpha_6\beta_1 + \alpha_3\alpha_5\beta_3 + \alpha_5\alpha_6\beta_1, \\ \lambda_{62} &= \alpha_3^2\beta_3 - \alpha_5^2\beta_2 - \alpha_1\alpha_2\beta_3 + \alpha_1\alpha_4\beta_2 + \alpha_1\alpha_6\beta_2 - \alpha_1\alpha_6\beta_3 - \alpha_3\alpha_5\beta_2 + \alpha_3\alpha_5\beta_3, \\ \lambda_{63} &= \alpha_3^2\beta_3 + \alpha_3\alpha_5\beta_3 - \alpha_1\alpha_2\beta_3 - \alpha_1\alpha_6\beta_3, \end{aligned} \quad (\text{A2})$$

式中 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_6, \beta_1, \dots, \beta_3$ 的表达式见文献 [14].

C 的具体表达式为

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{d_{41}}{\Delta} & \frac{d_{42}}{\Delta} \\ \frac{d_{51}}{\Delta} & \frac{d_{52}}{\Delta} \\ \frac{d_{61}}{\Delta} & \frac{d_{62}}{\Delta} \end{bmatrix}. \quad (\text{A3})$$

随着欠驱动关节位置的不同, C 中元素的取值也不相同.

当系统为PAA系统时,

$$\left\{ \begin{array}{l} d_{41} = \alpha_2\alpha_4 + \alpha_3\alpha_4 - \alpha_5\alpha_6 - \alpha_6^2, \\ d_{42} = \alpha_2\alpha_5 - \alpha_3\alpha_4 - \alpha_3\alpha_6 + \alpha_5\alpha_6, \\ d_{51} = \alpha_5^2 + 2\alpha_5\alpha_6 + \alpha_6^2 - \alpha_1\alpha_4 - \alpha_2\alpha_4 - 2\alpha_3\alpha_4, \\ d_{52} = \alpha_1\alpha_4 + \alpha_1\alpha_6 - \alpha_2\alpha_5 + \alpha_3\alpha_4 - \alpha_3\alpha_5 + \\ \quad \alpha_3\alpha_6 - \alpha_5\alpha_6 - \alpha_5^2, \\ d_{61} = \alpha_1\alpha_4 + \alpha_1\alpha_6 - \alpha_2\alpha_5 + \alpha_3\alpha_4 - \alpha_3\alpha_5 + \\ \quad \alpha_3\alpha_6 - \alpha_5\alpha_6 - \alpha_5^2, \\ d_{62} = \alpha_3^2 + 2\alpha_3\alpha_5 + \alpha_5^2 - \alpha_1\alpha_2 - \alpha_1\alpha_4 - 2\alpha_1\alpha_6. \end{array} \right. \quad (A4)$$

当系统为AAP系统时,

$$d_{41} = \alpha_6^2 - \alpha_2\alpha_4, \quad (A6a)$$

$$d_{42} = \alpha_2\alpha_4 + \alpha_3\alpha_4 - \alpha_5\alpha_6 - \alpha_6^2, \quad (A6b)$$

$$d_{51} = \alpha_2\alpha_4 + \alpha_3\alpha_4 - \alpha_5\alpha_6 - \alpha_6^2, \quad (A6c)$$

$$d_{52} = \alpha_5^2 + 2\alpha_5\alpha_6 + \alpha_6^2 - \alpha_1\alpha_4 - \alpha_2\alpha_4 - 2\alpha_3\alpha_4, \quad (A6d)$$

$$d_{61} = \alpha_2\alpha_5 - \alpha_3\alpha_4 - \alpha_3\alpha_6 + \alpha_5\alpha_6, \quad (A6e)$$

$$d_{62} = \alpha_1\alpha_4 + \alpha_1\alpha_6 - \alpha_2\alpha_5 + \alpha_3\alpha_4 - \alpha_3\alpha_5 + \alpha_3\alpha_6 - \alpha_5\alpha_6 - \alpha_5^2. \quad (A6f)$$

当系统为APA系统时,

$$\left\{ \begin{array}{l} d_{41} = \alpha_6^2 - \alpha_2\alpha_4, \\ d_{42} = \alpha_2\alpha_5 - \alpha_3\alpha_4 - \alpha_3\alpha_6 + \alpha_5\alpha_6, \\ d_{51} = \alpha_2\alpha_4 + \alpha_3\alpha_4 - \alpha_6^2 - \alpha_5\alpha_6, \\ d_{52} = \alpha_1\alpha_4 + \alpha_1\alpha_6 - \alpha_2\alpha_5 + \alpha_3\alpha_4 - \alpha_3\alpha_5 + \\ \quad \alpha_3\alpha_6 - \alpha_5\alpha_6 - \alpha_5^2, \\ d_{61} = \alpha_2\alpha_5 - \alpha_3\alpha_4 - \alpha_3\alpha_6 + \alpha_5\alpha_6, \\ d_{62} = \alpha_3^2 + 2\alpha_3\alpha_5 + \alpha_5^2 - \alpha_1\alpha_2 - \alpha_1\alpha_4 - 2\alpha_1\alpha_6. \end{array} \right. \quad (A5)$$

作者简介:

王乐君 博士研究生, 主要研究方向为智能机器人控制, E-mail: wanglejun@cug.edu.cn;

孟庆鑫 博士研究生, 主要研究方向为欠驱动机械系统、柔性机械臂系统控制, E-mail: mengqx@cug.edu.cn;

赖旭芝 教授, 主要研究方向为智能控制、机器人控制和非线性系统, E-mail: laixz@cug.edu.cn;

吴敏 教授, IEEE Fellow, 主要研究方向为鲁棒控制、智能控制和过程控制, E-mail: wumin@cug.edu.cn.