第 38 卷第 3 期
2021 年 3 月

控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications

Vol. 38 No. 3
Mar. 2021

多变量周期系统的多模型二阶段自适应控制

王 岩[1], 王 昕[2†], 王振雷[1]

(1. 华东理工大学 化工过程先进控制和优化技术教育部重点实验室, 上海 200237;

2. 上海交通大学 电子信息与电气工程学院 电工电子实验教学中心, 上海 200240)

摘要: 对于一类参数未知的多变量周期系统, 传统自适应控制方法存在参数收敛慢的问题, 导致系统暂态响应差、控制效果不理想. 因此, 本文针对多变量周期系统设计了多模型二阶段自适应控制器. 首先根据先验知识, 确定不确定区域范围, 并在不确定区域内建立多个自适应模型. 然后根据李雅普诺夫理论得到第一阶段辨识方程; 在第二阶段中, 充分考虑辨识误差并确定了权值自适应律, 以此获取虚拟模型以提高参数的收敛速度. 接着, 利用得到的虚拟模型参数设计了二阶段自适应控制器, 在保证了系统稳定性的基础上, 提高了系统的暂态性能. 最后, 给出的仿真结果表明多模型二阶段自适应控制器提高了参数的收敛速度, 改善了系统的暂态性能.

关键词: 多变量; 周期系统; 多模型; 二阶段自适应

引用格式: 王岩, 王昕, 王振雷. 多变量周期系统的多模型二阶段自适应控制. 控制理论与应用, 2021, 38(3): 391 – 397

DOI: 10.7641/CTA.2020.00240

Multiple models second level adaptive control of multivariable periodic systems

WANG Yan[1], WANG Xin[2†], WANG Zhen-lei[1]

(1. Key Laboratory of Advanced Control and Optimization for Chemical Processes,
East China University of Science and Technology, Shanghai 200237, China;
2. Electrical and Electronic Experimental Teaching Center, School of Electronic Information and Electrical Engineering,
Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China)

Abstract: For a class of multivariable periodic systems with unknown parameters, the traditional adaptive control method has the problem of slow parameter convergence, which leads to poor transient response of the system and unsatisfactory control effect. Therefore, a multiple models second level adaptive controller is designed for multivariable periodic systems. Firstly, according to the prior knowledge, the range of the uncertain region is determined, and multiple adaptive models are built in the uncertain region. Secondly, the first level identification equation is obtained according to Lyapunov theory. In the second level, the identification error is fully considered and the weight adaptive law is determined to obtain the virtual model for improving the convergence rate of parameters. Then, a second level adaptive controller is designed by using the parameters of virtual model, which improves the transient performance of the system on the basis of ensuring the stability of the system. Finally, the simulation results show that the multiple model second level adaptive controller improves the convergence rate of parameters and the transient performance of the system.

Key words: multivariate; periodic system; multiple models; second level adaptive

Citation: WANG Yan, WANG Xin, WANG Zhenlei. Multiple models second level adaptive control of multivariable periodic systems. *Control Theory & Applications*, 2021, 38(3): 391 – 397

1 引言

线性周期时变系统的建立可以追溯到19世纪, 在小扰动或者无扰动的假设下, 将在周期性状态下运行的实际系统归结为线性周期系统, 譬如通讯系统、卫星系统、旋翼飞机系统以及工业过程中的实际系统[1]. 因而, 在控制领域, 诸多学者针对线性周期系统做了

收稿日期: 2020−05−04; 录用日期: 2020−10−13.
†通信作者. E-mail: wangxin26@sjtu.edu.cn; Tel.: +86 13818668292.
本文责任编委: 侯忠生.

国家重点研发计划项目(2018YFB1701103), 国家自然科学基金项目(61673268), 国家自然科学基金重大项目(61890930–3, 61590922), 上海市自然科学基金项目(17ZR1406800)资助.

Supported by the National Key Research and Development Program (2018YFB1701103), the National Natural Science Foundation of China (61673268), the Key Program of National Natural Science Foundation of China (61890930–3, 61590922) and the Shanghai Natural Science Foundation of China (17ZR1406800).

广泛的研究, 并且设计了多种控制方法[2]. 因此, 如何更好地提高对线性周期系统的控制效率、提升系统的控制性能成为了研究的重要问题.

近些年来, 通过线性化方法或利用线性时不变系统逼近物理模型来提取线性周期系统的方法不断涌出. Olcer和Prasad等学者[3–5]针对具有转子周期特性的周期系统提出了两步过程获得高阶线性时不变模型的方法. Lopez等[6]利用谐波分解将系统状态表示成多种谐波以创建线性时不变系统近似值, 并制定相应的线性时不变模型. 但此方法由于对原始周期系统二阶公式的依赖等问题使谐波分解等在解释时会出现困难. 为此, 文献[7]提出了使用一阶公式进行谐波分解获取更加通用的线性时不变模型的方法, 以更好地模拟周期系统. 除此之外, Ismail等[8]考虑到线性周期系统可以等效为线性时不变系统的特点, 使用频域子空间辨识方法获取相应的线性时不变系统的估计值以模拟周期系统. 不过上述方法对周期系统建模的过程可能会导致重复模拟, 或由于较复杂的数学分析使建模时间过渡较长甚至无法得到模型, 因此引发了对模型简化的需求. 在这方面, Magruder等[9]开发了一种在H_2哈代空间中分析系统的算法, 利用得到的后验误差界激励优化算法以简化模型, 得到的模型参数量级更低, 参数估计更精准. 通过线性化或者简化后的系统, 需要设计合理的控制器来精准高效的控制周期系统. 文献[10]设计了状态反馈控制器以控制系统. Li等[11]和Liao等[12]设计了一种具有预见作用的预见跟踪控制器, 前者充分考虑了可预见的参考信号和干扰信号, 而后者则利用系数矩阵是周期函数的特性设计了最优预见跟踪控制器. 而Nguyen等[13]则设计了模型预测控制器, 并利用插值控制提高控制性能, 保证了递归的可行性和渐进稳定性. 文献[14]在考虑了模型转换问题后, 将系统转化为增强的线性时不变系统, 然后利用线性二次最优控制以控制系统. 除此之外, 更有学者考虑了执行器故障[15]、鲁棒稳定性[16–17]以及执行器饱和[18]等问题并且给予了合理的解决方法. 不过, 当系统参数未知时, 相比于利用模拟逼近的方法, 采用自适应辨识的方法能得到更精确的结果. 文献[19–20]中利用李雅普诺夫理论构建了李雅普诺夫函数, 在参数周期已知的情况下可以得到精确的辨识结果. 然而, 由于单模型自适应控制对周期系统的控制具有精度低、调节时间长、暂态响应差等不足[21]. 为此Narendra等[22]提出了基于切换的多模型自适应控制以实现更加良好的控制效果, 但对于时变系统却因模型频繁切换产生抖震, 导致系统不稳定. 为避免模型间的频繁切换, 文献[23–24]提出了多模型自适应混合控制, 通过混合信号将各个子控制器输出混合, 保证了系统输出的平滑性. 但随着系统维度的增加, 模型数量会呈指数增加, 为此文献[25]提出了多模型二阶段自适应控制, 这种控制策略既避免了多模型切换控制可能存在的抖震又减少了模型数量, 并且可以有效利用自身信息, 而被广泛应用.

本文针对多变量周期系统, 设计了多模型二阶段自适应控制器. 首先, 根据先验知识确定系统不确定范围, 并在此范围内设定若干个自适应模型. 然后, 基于李雅普诺夫理论设计了第一阶段参数辨识方程以及第二阶段权值自适应律, 获取虚拟模型参数值, 用以加快参数收敛速度. 接着, 利用虚拟模型参数设计二阶段自适应控制器, 以提高系统的暂态性能. 再给出了系统稳定性证明. 最后的数值仿真结果证明了多模型二阶段自适应控制器的有效性.

2 对象描述

考虑下述多变量线性周期系统:

$$\Sigma_{\mathrm{p}}:\begin{cases}\dot{x}(t)=A(t)x(t)+Bu(t),\\ y(t)=Cx(t),\end{cases}\tag{1}$$

式中: $x(t)\in\mathbb{R}^n$, $u(t)\in\mathbb{R}^m$分别为可测的系统状态向量以及输入量; $B\in\mathbb{R}^{n\times m}$, $C\in\mathbb{R}^{l\times n}$分别为系统的控制矩阵和输出矩阵; $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$为参数未知的系统矩阵, 其具体形式如下:

$$A(t)=\begin{bmatrix}a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t)\\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{mn}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\theta_1(t)\\ \theta_2(t)\\ \vdots\\ \theta_n(t)\end{bmatrix}.\tag{2}$$

控制目标是设计控制器$u(t)$使状态向量$x(t)$趋向于参考向量. 因此对系统做出如下假设:

假设 1 系统的控制矩阵B以及输出矩阵C已知, 且当$m=n$时, B为非奇异方阵, $m\neq n$时, B的伪逆存在;

假设 2 系统矩阵呈周期性变化, 即$A(t)=A(t-T)$, 且时间周期T已知;

假设 3 系统矩阵$A(t)$中所有参数的不确定区域S_{A}已知, 且S_{A}为凸集合.

表1中给出了本文中主要变量说明.

3 多模型二阶段自适应控制

3.1 第1阶段自适应

对系统(1)作如下变换:

$$\Sigma_{\mathrm{p}}:\dot{x}(t)=A_{\mathrm{m}}x(t)+[A(t)-A_{\mathrm{m}}]x(t)+Bu(t),\tag{3}$$

式中A_{m}为稳定的参考模型系统矩阵, 且为时不变Hurwitz矩阵, 有

$$A_{\mathrm{m}}=[a_{\mathrm{m}1}\ \ a_{\mathrm{m}2}\ \ \cdots\ \ a_{\mathrm{m}n}]^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^{n\times n}.\tag{4}$$

表 1 文中主要变量说明表

Table 1 Description table of main variables

变量名称	意义
$A(t)$	真实对象系统矩阵
$\hat{A}_i(t)$	系统矩阵辨识值
$\tilde{A}_i(t)$	系统矩阵辨识误差
$A_{\rm v}(t)$	虚拟模型系统矩阵
$A_{\rm m}$	参考模型系统矩阵
$x(t)$	真实系统状态向量
$\hat{x}_i(t)$	辨识模型状态向量
$\hat{x}_{\rm v}(t)$	虚拟模型系统矩阵
$x_{\rm m}(t)$	参考模型状态向量
$e_i(t)$	状态辨识误差
$e(t)$	虚拟模型状态误差
$e_{\rm c}(t)$	系统输出误差
α_i	权值真值
$\hat{\alpha}_i$	虚拟模型系统矩阵

针对系统(3)建立多个状态辨识模型, 即

$$\varSigma_i: \dot{\hat{x}}_i(t)=A_{\rm m}\hat{x}_i(t)+[\hat{A}_i(t)-A_{\rm m}]x(t)+Bu(t), \tag{5}$$

式中$\hat{A}_i(i=1,2,\cdots,N)$为各个模型的参数辨识值. 定义状态辨识误差以及参数辨识误差分别为

$$e_i(t)=\hat{x}_i(t)-x(t),\ \tilde{A}_i(t)=\hat{A}_i(t)-A(t),$$

由此可以得到系统的误差方程为

$$\dot{e}_i(t)=A_{\rm m}e_i(t)+\tilde{A}_i(t)x(t). \tag{6}$$

由 Lyapunov 理论, 建立合适的 Lyapunov 函数, 用以保证状态辨识误差以及参数辨识误差均收敛于0. 因此, 针对式(6)设计如下Lyapunov函数(以下省略$e_i(t)$为e_i, $\tilde{A}_i(t)$为$\tilde{A}_i$),

$$V_i(e_i,\tilde{A}_i)=e_i^{\rm T}Pe_i+{\rm tr}\int_{t-T}^{t}\tilde{A}_i^{\rm T}(\tau)\tilde{A}_i(\tau){\rm d}\tau, \tag{7}$$

式中P是式(8)所示的Lyapunov方程唯一对称正定解,

$$A_{\rm m}^{\rm T}P+PA_{\rm m}=-Q,\ Q=Q^{\rm T}>0. \tag{8}$$

对式(7)求导可得

$$\begin{aligned}\dot{V}_i=&e_i^{\rm T}(A_{\rm m}^{\rm T}P+PA_{\rm m})e_i+2e_i^{\rm T}P\tilde{A}_ix(t)+\\&{\rm tr}(\tilde{A}_i^{\rm T}(t)\tilde{A}_i(t)-\tilde{A}_i^{\rm T}(t-T)\tilde{A}_i(t-T))=\\&-e_i^{\rm T}Qe_i+2e_i^{\rm T}P\tilde{A}_ix(t)+\\&{\rm tr}([\tilde{A}_i(t)+\tilde{A}_i(t-T)]^{\rm T}[\tilde{A}_i(t)-\tilde{A}_i(t-T)]).\end{aligned} \tag{9}$$

令

$$\varPhi_i(t)=\hat{A}_i(t-T)-\hat{A}_i(t), \tag{10}$$

可得$\hat{A}_i(t)=\hat{A}_i(t-T)-\varPhi_i(t)$. 由式(9)–(10)有

$$\begin{aligned}&{\rm tr}([\tilde{A}_i(t)+\tilde{A}_i(t-T)]^{\rm T}[\hat{A}_i(t)-\tilde{A}_i(t-T)])=\\&{\rm tr}([2\tilde{A}_i(t)+\varPhi_i(t)]^{\rm T}[-\varPhi_i(t)]).\end{aligned} \tag{11}$$

因此式(9)可表述为

$$\begin{aligned}\dot{V}_i=&-e_i^{\rm T}Qe_i+2e_i^{\rm T}P\tilde{A}_ix(t)-\\&2{\rm tr}[\tilde{A}_i^{\rm T}(t)\varPhi_i(t)]-2{\rm tr}[\varPhi_i^{\rm T}(t)\varPhi_i(t)].\end{aligned} \tag{12}$$

此时, 应当选择合适$\varPhi_i$保证式(12)小于0. 即

$$\varPhi_i(t)=Pe_ix^{\rm T}(t). \tag{13}$$

将式(13)代入式(12)中有

$$\begin{aligned}\dot{V}_i=&-e_i^{\rm T}Qe_i-2{\rm tr}[x(t)e_i^{\rm T}PPe_ix^{\rm T}(t)]=\\&-e_i^{\rm T}Qe_i-2e_i^{\rm T}P^2e_i[x^{\rm T}(t)x(t)]<0.\end{aligned} \tag{14}$$

此时, 根据Lyapunov理论可知$\lim\limits_{t\to+\infty}e_i\to0$. 并且在$u(t)$持续激励下$\tilde{A}_i\to0$, 即$\hat{A}(t)\to A(t)$. 参数辨识式为

$$\hat{A}_i(t)=\hat{A}_i(t-T)-Pe_ix^{\rm T}(t). \tag{15}$$

3.2 第2阶段自适应

第2阶段自适应的设计过程需建立在以下引理的基础上.

引理 1 对于参数$A\in S_{\rm A}$, 如果$S_{\rm A}$为凸集合, 对于集合$S_{\rm A}$内的任意一点, 都可以用集合$S_{\rm A}$内至多$N=n^2+1$个点的线性组合来表征, 即

$$\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{N}\alpha_iA_i=A,\\\sum\limits_{i=1}^{N}\alpha_i=1,\ \alpha_i\geqslant0.\end{cases} \tag{16}$$

引理 2 若任意n^2个辨识模型的初值是线性无关的, 且$N=n^2+1$个参数构成的凸集合可以构成参数A的不确定区域$S_{\rm A}$, 即满足

$$\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{n^2}k_i\hat{A}_i(t_0)=A,\ k_i\text{不全为}0,\\\sum\limits_{i=1}^{N}\alpha_i\hat{A}_i(t_0)=A,\\\sum\limits_{i=1}^{N}\alpha_i=1,\ \alpha_i\geqslant0,\end{cases} \tag{17}$$

则对于任意时刻$t\geqslant t_0$, 有

$$A=\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\hat{A}_i(t). \tag{18}$$

引理 3 如果系统参数A在初始时刻位于辨识模型初始值$\hat{A}_i(t_0)$构成的凸集合$S_{\rm A}$内, 则对任意$t\geqslant t_0$, 参数A始终位于$S_{\rm A}$内.

基于上述引理以及多模型二阶段自适应控制理论, 需要设计第一阶段的$N=n^2+1$个自适应模型, n^2为系统未知参数的数量. 利用第1阶段的N个自适应模型构成虚拟模型, N个自适应模型的初值应形成凸组合且包含系统的不确定区域, 得到的虚拟模型如下:

$$A_{\rm v}(t)=\sum_{i=1}^{N}\hat{\alpha}_i\hat{A}_i(t),\tag{19}$$

其初值为$A_{\rm v}(t_0)=\sum_{i=1}^{N}\hat{\alpha}_i\hat{A}_i(t_0)$, $\hat{\alpha}_i$为α_i的估计值.

虚拟模型的状态估计模型如下:

$$\begin{aligned}\Sigma_{\rm v}:\dot{\hat{x}}_{\rm v}=&A_{\rm m}\hat{x}_{\rm v}+[A_{\rm v}(t)-A_{\rm m}]x+Bu(t)=\\&A_{\rm m}\hat{x}_{\rm v}+[\sum_{i=1}^{N}\hat{\alpha}_i\hat{A}_i(t)-A_{\rm m}]x+Bu(t),\end{aligned}\tag{20}$$

式中$\hat{A}$可表示为

$$\hat{A}_i(t)=[\hat{\theta}_{i1}(t)\ \ \hat{\theta}_{i2}(t)\ \ \cdots\ \ \hat{\theta}_{in}(t)]^{\rm T}=\sum_{j=1}^{n}b_j\hat{\theta}_{ij}^{\rm T}(t),\tag{21}$$

$$b_j=[q_1\ \ q_2\ \ \cdots\ \ q_n]^{\rm T},\tag{22}$$

式中: $q_i=1, i=j$, 否则$q_i=0$.

同理,

$$A_{\rm m}=\sum_{j=1}^{n}b_ja_{{\rm m}j}^{\rm T}.\tag{23}$$

因此式(3)与(20)可改写为

$$\begin{aligned}\Sigma_{\rm p}:\dot{x}(t)=&A_{\rm m}x(t)+Bu(t)+\\&[\sum_{j=1}^{n}b_j(\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\theta_{ij}^{\rm T}-a_{{\rm m}j}^{\rm T})]x(t),\end{aligned}\tag{24}$$

$$\begin{aligned}\Sigma_{\rm v}:\dot{\hat{x}}_{\rm v}(t)=&A_{\rm m}\hat{x}_{\rm v}(t)+Bu(t)+\\&[\sum_{j=1}^{n}b_j(\sum_{i=1}^{N}\hat{\alpha}_i\hat{\theta}_{ij}^{\rm T}-a_{nj}^{\rm T})]x(t),\end{aligned}\tag{25}$$

得到误差方程为

$$\dot{e}=A_{\rm m}e+[\sum_{j=1}^{n}b_j\sum_{i=1}^{N}\tilde{\alpha}_i\hat{\theta}_{ij}^{\rm T}]x(t),\tag{26}$$

式中$\tilde{\alpha}_i=\hat{\alpha}_i-\alpha_i$. $\sum_{i=1}^{N}\tilde{\alpha}_i\hat{\theta}_{ij}^{\rm T}$可写作

$$\sum_{i=1}^{N}\tilde{\alpha}_i\hat{\theta}_{ij}^{\rm T}=\sum_{i=1}^{N}\hat{\alpha}_i\hat{\theta}_{ij}^{\rm T}-\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\hat{\theta}_{ij}^{\rm T},\tag{27}$$

式中:

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{N}\hat{\alpha}_i\hat{\theta}_{ij}^{\rm T}=\sum_{i=1}^{N-1}\hat{\alpha}_i\hat{\theta}_{ij}^{\rm T}+\hat{\alpha}_N\hat{\theta}_{Nj}^{\rm T}=\\&\sum_{i=1}^{N-1}\hat{\alpha}_i\hat{\theta}_{ij}^{\rm T}+[1-\sum_{i=1}^{N-1}\hat{\alpha}_i]\hat{\theta}_N^{\rm T}=\\&\hat{\alpha}_1(\hat{\theta}_{1j}-\hat{\theta}_{Nj})^{\rm T}+\hat{\alpha}_2(\hat{\theta}_{2j}-\hat{\theta}_{Nj})^{\rm T}+\cdots+\\&\hat{\alpha}_{N-1,j}(\hat{\theta}_{N-1,j}-\hat{\theta}_{Nj})^{\rm T}+\hat{\theta}_{Nj}^{\rm T}=\\&[\Theta_j\hat{\bar{\alpha}}]^{\rm T}+\hat{\theta}_{Nj}^{\rm T},\end{aligned}\tag{28}$$

式中:

$$\Theta_j=[\hat{\theta}_{1j}-\hat{\theta}_{Nj}\ \ \hat{\theta}_{2j}-\hat{\theta}_{Nj}\ \ \cdots\ \ \hat{\theta}_{N-1,j}-\hat{\theta}_{Nj}],$$
$$\bar{\alpha}=[\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \cdots\ \ \alpha_{N-1}]^{\rm T},$$
$$\hat{\bar{\alpha}}=[\hat{\alpha}_1\ \ \hat{\alpha}_2\ \ \cdots\ \ \hat{\alpha}_{N-1}]^{\rm T}.$$

同理,

$$\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\hat{\theta}_{ij}^{\rm T}=[\Theta_j\bar{\alpha}]^{\rm T}+\hat{\theta}_{Nj}^{\rm T}.\tag{29}$$

因此

$$\sum_{i=1}^{N}\tilde{\alpha}_i\hat{\theta}_{ij}^{\rm T}=[\Theta_j\tilde{\bar{\alpha}}]^{\rm T}.\tag{30}$$

由此, 式(25)可改写为

$$\dot{e}=A_{\rm m}e+[\sum_{j=1}^{n}b_j\,[\Theta_j\tilde{\bar{\alpha}}]^{\rm T}]\,x(t).\tag{31}$$

同理, 为求得合适的权值$\hat{\alpha}=[\hat{\alpha}_1\ \ \hat{\alpha}_2\ \ \cdots\ \ \hat{\alpha}_N]^{\rm T}$自适应律使$\hat{\alpha}\to\alpha$, 利用Lyapunov理论建立合适的Lyapunov函数,

$$V(e,\tilde{\bar{\alpha}})=e^{\rm T}Pe+{\rm tr}\int_{t-T}^{t}\tilde{\bar{\alpha}}^{\rm T}(\tau)\tilde{\bar{\alpha}}(\tau){\rm d}\tau,\tag{32}$$

式中$\tilde{\bar{\alpha}}=\hat{\bar{\alpha}}-\bar{\alpha}$. 求导可得

$$\begin{aligned}\dot{V}(e,\tilde{\bar{\alpha}})=&-e^{\rm T}Qe+2x^{\rm T}[\sum_{j=1}^{n}\Theta_j\tilde{\bar{\alpha}}b_j^{\rm T}]Pe-\\&2\,{\rm tr}[\tilde{\alpha}^{\rm T}(t)\Psi(t)]-{\rm tr}[\Psi^{\rm T}(t)\Psi(t)],\end{aligned}\tag{33}$$

式中$\Psi(t)=\tilde{\bar{\alpha}}(t-T)-\tilde{\bar{\alpha}}(t)$.

根据李雅普诺夫理论, 为了保证参数收敛, 需要使导数小于0. 即式(32)小于0. 因此, 设计权值自适应律

$$\hat{\bar{\alpha}}(t)=\hat{\bar{\alpha}}(t-T)-\sum_{j=1}^{n}\Theta_jxe^{\rm T}Pb_j,\tag{34}$$

因此$\Psi(t)=\tilde{\bar{\alpha}}(t-T)-\tilde{\bar{\alpha}}(t)=\sum_{j=1}^{n}\Theta_jxe^{\rm T}Pb_j$. 此时,

$$\dot{V}(e,\tilde{\bar{\alpha}})=-e^{\rm T}Qe-{\rm tr}[\Psi^{\rm T}(t)\Psi(t)]<0.\tag{35}$$

因此$\tilde{\bar{\alpha}}\to0$, 保证了第2阶段权值收敛.

3.3 控制器设计

基于上述得到的虚拟参数, 设计基于模型参考自适应理论的控制器, 保证系统渐进跟踪参考模型.

已知稳定的参考模型

$$\Sigma_{\rm m}:\dot{x}_{\rm m}=A_{\rm m}x_{\rm m}+B_{\rm m}r(t),\tag{36}$$

式中: $x_{\rm m}\in\mathbb{R}^n$为参考状态向量, $A_{\rm m}$形如式(4), $B_{\rm m}\in\mathbb{R}^{n\times m}$为已知的控制矩阵, $r(t)\in\mathbb{R}^m$为已知的参考输入.

控制器采用模型跟随控制器, 其结构为

$$\begin{aligned}u(t)=&-K_{\rm p}x(t)+K_{\rm u}r(t)=\\&B^{\dagger}(A_{\rm m}-A_{\rm v})x(t)+B^{\dagger}B_{\rm m}r(t),\end{aligned}\tag{37}$$

式中: $B^{\dagger}$为B的伪逆, 若B为非奇异矩阵, 则$B^{\dagger}=B^{-1}$.

设系统误差$e_{\rm c}(t)=x(t)-x_{\rm m}(t)$, 根据式(3)(35)和式(36)得

$$\dot{e}_{\rm c}(t)=A_{\rm m}e_{\rm c}(t)+\tilde{M}(t)x(t),\tag{38}$$

式中:

$$\tilde{M}(t) = M(t) - M^*(t),\ M(t) = A_{\mathrm{m}} - A_{\mathrm{v}},$$
$$M^*(t) = A_{\mathrm{m}} - A(t).$$

同理, 根据李雅普诺夫理论, 设李雅普诺夫函数为

$$V(e_{\mathrm{c}}, \tilde{M}) = e_{\mathrm{c}}^{\mathrm{T}} P e_{\mathrm{c}} + \mathrm{tr}\int_{t-T}^{t} [\tilde{M}^{\mathrm{T}}(\tau)\tilde{M}(\tau)]\mathrm{d}\tau. \tag{39}$$

设$M(t) = M(t-T) - Pe_{\mathrm{c}}(t)x^{\mathrm{T}}(t)$, 则$\dot{V}(e_{\mathrm{c}}, \tilde{M}) \leqslant 0$, 保证了系统误差$e_{\mathrm{c}}(t)$和$M(t)$的有界性.

引理 4 (Barbalat引理[26])　对于函数$g(t): \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, 如果$g(t)$一致连续且$\lim\limits_{t\to\infty}\int_0^t g(\tau)\mathrm{d}\tau$存在且有界, 那么$\lim\limits_{t\to\infty} g(t) = 0$.

令

$$g(t) = \dot{V}(t) = -e_{\mathrm{c}}^{\mathrm{T}}(t)Qe_{\mathrm{c}}(t) - 2\mathrm{tr}[e_{\mathrm{c}}(t)x^{\mathrm{T}}(t)PPx(t)e_{\mathrm{c}}^{\mathrm{T}}(t)], \tag{40}$$

则

$$\dot{g}(t) = \ddot{V}(t) = -2e_{\mathrm{c}}^{\mathrm{T}}(t)Q\dot{e}_{\mathrm{c}}(t) - 2\mathrm{tr}[e_{\mathrm{c}}(t)x^{\mathrm{T}}(t)PPx(t)\dot{e}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{T}}(t)]. \tag{41}$$

由于参考模型 Σ_{m} 稳定, $x_{\mathrm{m}}(t)$ 有界, 因此 $x(t) = x_{\mathrm{m}}(t) + e_{\mathrm{c}}(t)$ 有界, 因此由式(37)知 $\dot{e}_{\mathrm{c}}(t)$ 有界, 因此 $\dot{g}(t)$一致有界, 即$g(t)$对时间t一致连续. 由于$V(t) \geqslant 0$, 且$\dot{V}(t) \leqslant 0$, 因此$V(\infty)$存在. 所以

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t g(\tau)\mathrm{d}\tau = \lim_{t\to\infty}\int_0^t \dot{V}(\tau)\mathrm{d}\tau = V(\infty) - V(0) \tag{42}$$

有界.

由引理4有

$$\lim_{t\to\infty} g(t) = \lim_{t\to\infty}\dot{V}(t) = -\lim_{t\to\infty}\{e_{\mathrm{c}}^{\mathrm{T}}(t)Qe_{\mathrm{c}}(t) + \mathrm{tr}[e_{\mathrm{c}}(t)x^{\mathrm{T}}(t)PPx(t)e_{\mathrm{c}}^{\mathrm{T}}]. \tag{43}$$

因此$\lim\limits_{t\to\infty}\|e_{\mathrm{c}}(t)\| = 0$, 即状态$x(t)$渐进地与参考状态$x_{\mathrm{m}}(t)$保持一致, 系统稳定.

4　仿真研究

考虑如下两输入两输出线性周期系统:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + BU(t), \\ y(t) = Cx(t), \end{cases} \tag{44}$$

式中:

$$A(t) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} =$$
$$\begin{bmatrix} -7-0.5\sin(0.5\pi t) & 6+0.5\cos(0.5\pi t) \\ -8-0.5\cos(0.5\pi t) & -11-0.5\sin(0.5\pi t) \end{bmatrix},$$
$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

根据先验知识得知, θ_2 已知, 而 $\theta_1 = [a_{11}\ \ a_{12}]$ 未知. 参考模型为

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R(t). \tag{45}$$

参考输入$R(t) = [2\sin(1.4\pi t)\ \ 2\cos(1.4\pi t)]^{\mathrm{T}}$.

现针对单模型自适应与多模型二阶段自适应两种方法进行对比研究. 单模型自适应初值设定为$\theta_2(0) = [-7\ \ 6.8]$. 多模型二阶段自适应模型数量为3, 模型参数初始值分别为$\theta_{21}(0) = [-8\ \ 7]$, $\theta_{22}(0) = [-7\ \ 4.5]$, $\theta_{23}(0) = [-6\ \ 7]$. 为使虚拟模型初始参数和单模型自适应初始参数一致, 因此$\alpha = [0.46\ \ 0.08\ \ 0.46]^{\mathrm{T}}$.

单模型自适应控制参数辨识如图1–2所示. 由曲线可知, 单模型自适应控制虽然辨识参数可以逐渐追踪到真实参数, 但参数收敛时间过长, 因此造成系统暂态误差大, 调节时间过长. 单模型自适应控制曲线图3–4所示.

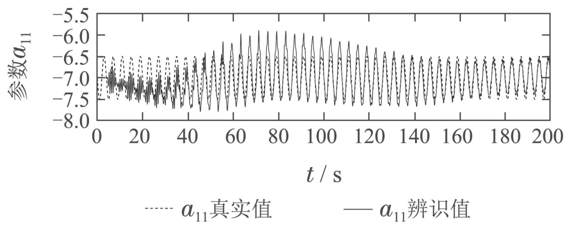

图 1　单模型自适应控制参数1辨识

Fig. 1　Parameter 1 identification

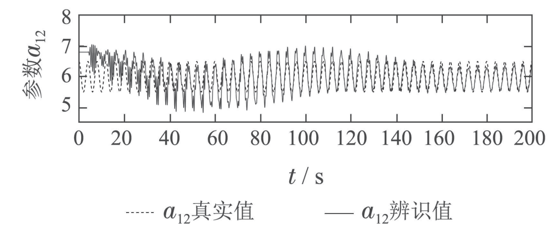

图 2　单模型自适应控制参数2辨识

Fig. 2　Parameter 2 identification

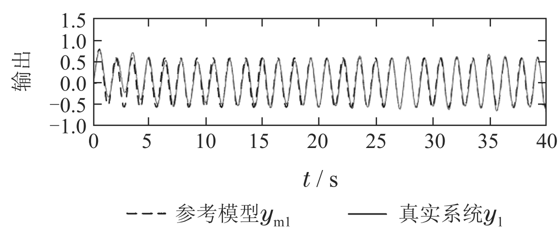

图 3　单模型自适应控制曲线1

Fig. 3　Output 1 of single model adaptive control

多模型二阶段自适应控制参数辨识如图5–6所示. 从图中可知, 辨识参数可较快地跟踪到真实值, 参数收敛速度较快. 图7–8为参数辨识误差曲线, 可知多模型二阶段自适应控制比起单模型自适应控制, 参数收敛速度更快, 参数误差更小.

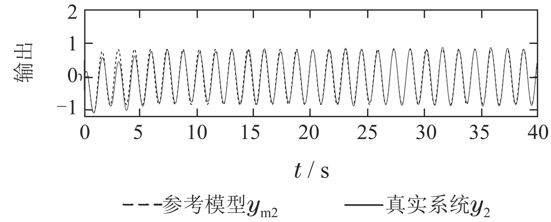

图 4 单模型自适应控制曲线2

Fig. 4 Output 2 of single model adaptive control

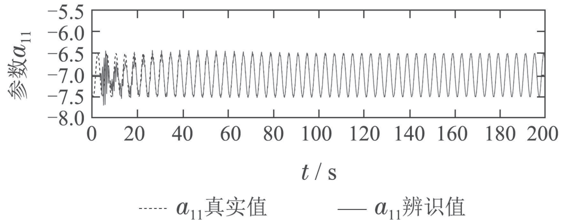

图 5 多模型二阶段自适应控制参数1辨识

Fig. 5 Parameter 1 identification

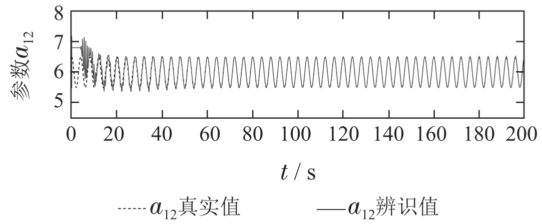

图 6 多模型二阶段自适应控制参数2辨识

Fig. 6 Parameter 2 identification

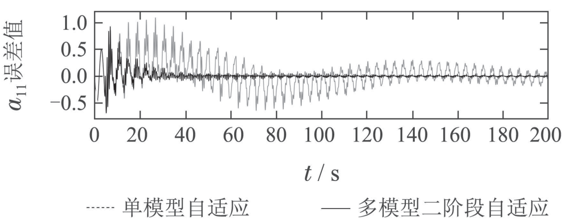

图 7 参数1辨识误差对比

Fig. 7 Parameter 1 identification error comparison

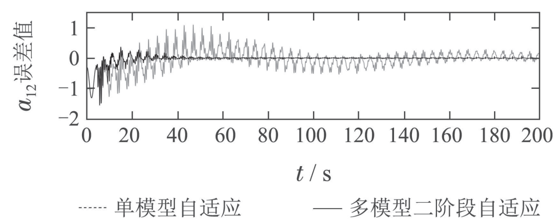

图 8 参数2辨识误差对比

Fig. 8 Parameter 2 identification error comparison

图9为参数辨识误差积分对比图, 纵坐标代表了 $\int_{iT}^{(i+1)T}\|\tilde{\theta}(t)\|\mathrm{d}t$. 因此可再次说明, 二阶段自适应控制在参数收敛速度方面有了较大的提升.

图10–11为多模型二阶段控制曲线, 图12–13为控制误差对比图. 除第1周期由于两方法参数一致导致控制误差相同外, 其他时间多模型二阶段自适应控制方法在暂态性能方面明显优于单模型自适应控制.

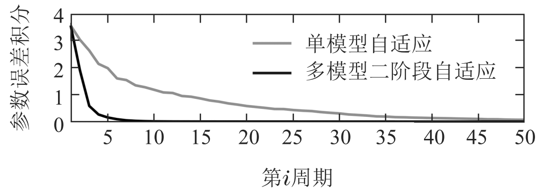

图 9 参数辨识误差积分对比

Fig. 9 Parameter identification error integral comparison

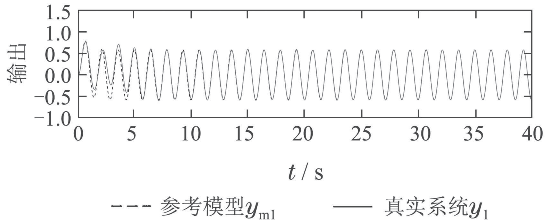

图 10 多模型二阶段自适应控制曲线1

Fig. 10 Output 1 of multiple models second level adaptive control

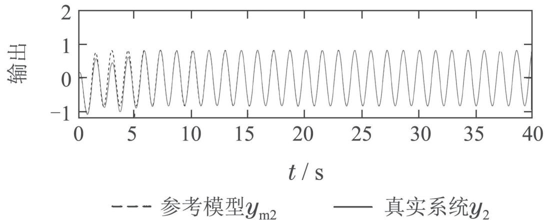

图 11 多模型二阶段自适应控制曲线2

Fig. 11 Output 2 of multiple models second level adaptive control

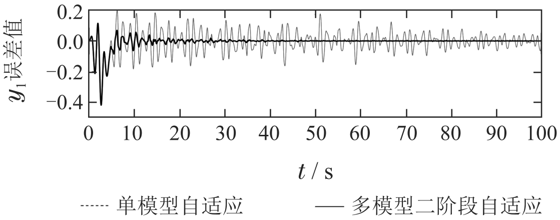

图 12 控制误差对比1

Fig. 12 Control error comparison 1

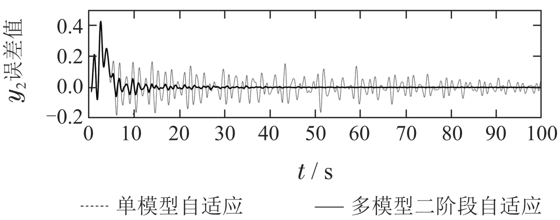

图 13 控制误差对比2

Fig. 13 Control error comparison 2

5 结语

本文针对多变量周期系统设计了多模型二阶段自适应控制器. 利用李雅普诺夫理论得到两个阶段的辨识方程并得到虚拟模型, 根据虚拟模型参数设计二阶段控制器. 接着对系统的稳定性给予了证明. 文末根据数值仿真研究可知多模型二阶段自适应控制提高了参数收敛速度, 参数辨识结果精度更高; 控制系统的响应速度更快, 调节时间更短, 控制精度更高.

参考文献:

[1] SAETTI U, HORN J F, BERGER T. Identification of linear time-periodic systems from rotorcraft flight-test data. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 2019, 42(10): 2288 – 2296.

[2] FRIEDMANN P P, MILLOTT T A. Vibration reduction in rotorcraft using active control: A comparison of various approaches. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 1995, 18(4): 664 – 673.

[3] OLCER F E, PRASAD J V R. A methodology for evaluation of coupled rotor-body stability using reduced order linear time invariant (LTI) models. *The 67th American Helicopter Society International Annual Forum 2011*. Virginia Beach, VA: American Helicopter Society, 2011: 1405 – 1411.

[4] PRASAD J V R, OLCER F E, SANKAR L N, et al. Linear time invariant models for integrated flight and rotor control. *Proceedings of the 35th European Rotorcraft Forum*. Hamburg, Germany: Deutsche Gesellschaft fuer Luft und Raumfahrt (DGLR), 2009: 633 – 647.

[5] PRASAD J V R, OLCER F E, SANKAR L N, et al. Linear models for integrated flight and rotor control. *Proceedings of the 34th European Rotorcraft Forum*. Liverpool, England: Royal Aeronautical Society, 2008: 333 – 359.

[6] LOPEZ, MARK J S, PRASAD J V R. Extensive analysis of a full order time periodic model using reduced order time invariant linear approximations for various integrated flight and rotor control applications. *Proceedings of the 39th European Rotorcraft Forum*. Moscow, Russia: Royal Aeronautical Society, 2013: 189 – 193.

[7] LOPEZ, MARK J S, PRASAD J V R. Linear time invariant approximations of linear time periodic systems. *Journal of the American Helicopter Society*, 2017, 62(1): 1 – 10.

[8] UYANIK I, SARANLI U, ANKARALI M M. Frequency-domain subspace identification of linear time-periodic (LTP) systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2019, 64(6): 2529 – 2536.

[9] MAGRUDER C C, GUGERCIN S, BEATTIE C A. Linear time-periodic dynamical systems: An H_2 analysis and a model reduction framework. *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems*, 2018, 24(2): 119 – 142.

[10] ZHU Can. Elastic control of linear time-varying periodic systems. *Industrial and Science Tribune*, 2016, 15(20): 59 – 60.
(朱灿. 线性时变周期系统的弹性控制. 产业与科技论坛, 2016, 15(20): 59 – 60.)

[11] LI L, LU Y, GU L. Preview control for a class of linear discrete-time periodic systems. *International Journal of Control*, UK: Taylor and Francis Ltd, 2019. https://dx.doi.org/10.1080/00207179.2019.1618497

[12] LIAO F, SUN M, USMAN. Optimal preview control for linear discrete-time periodic systems. *Mathematical Problems in Engineering*, 2019, 2019: 1 – 11.

[13] HOAI-NAM N, BOURDAIS R, GUTMAN P. Fast model predictive control for linear periodic systems with state and control constraints. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2017, 27(17): 3703 – 3726.

[14] YANG Y. An efficient LQR design for discrete-time linear periodic system based on a novel lifting method. *Automatica*, 2018, 87: 383 – 388.

[15] FU Y M, LU Y, ZHANG M R. Model reference tracking control of continuous-time periodic linear systems with actuator jumping fault and its applications in orbit maneuvering. *International Journal of Control Automation and Systems*, 2017, 15(5): 2182 – 2192.

[16] ZHOU Lan, WU Min, SHE Jinhua. Robust repetitive control design of periodically time-varying plants. *Control and Decision*, 2013, 28(1): 61 – 66.
(周兰, 吴敏, 佘锦华. 时变周期系统鲁棒重复控制设计. 控制与决策, 2013, 28(1): 61 – 66.)

[17] BOURLES H, OBERST U. Robust stabilization of discrete-time periodic linear systems for tracking and disturbance rejection. *Mathematics of Control Signals and Systems*, 2016, 28(3): 1 – 29.

[18] ZHOU B. Global stabilization of periodic linear systems by bounded controls with applications to spacecraft magnetic attitude control. *Automatica*, 2015, 60: 145 – 154.

[19] NARENDRA K S, TIAN Z. Adaptive identification and control of linear periodic systems. *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control*. San Diego, CA, USA: IEEE, 2006: 465 – 470.

[20] LU Yang, FU Yanming, ZHANG Mourui. Model reference tracking control of linear continuous periodic system. *Control and Decision*, 2016, 31(7): 1279 – 1284.
(路阳, 付艳明, 张卯瑞. 线性连续周期系统的模型参考跟踪控制. 控制与决策, 2016, 31(7): 1279 – 1284.)

[21] CAO Xufeng, WANG Xin, WANG Zhenlei. Multiple model adaptive mixing control based on switching. *Acta Automatica Sinica*, 2017, 43(1): 94 – 100.
(曹叙风, 王昕, 王振雷. 基于切换机制的多模型自适应混合控制. 自动化学报, 2017, 43(1): 94 – 100.)

[22] NARENDRA K S, BALAKRISHNAN N J. Improving transient response of adaptive control system using multiple models and switching. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1994, 39(9): 1861 – 1866.

[23] KUIPERS M, IOANNOU P A. Multiple model adaptive control with mixing. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, 55(8): 1822 – 1836.

[24] SHI Shanmeng, WANG Xin, WANG Zhenlei. Dynamically optimized multiple model adaptive mixing control of dual estimators. *Control Theory & Applications*, 2019, 36(4): 596 – 604.
(史善孟, 王昕, 王振雷. 动态优化双估计器的多模型自适应混合控制. 控制理论与应用, 2019, 36(4): 596 – 604.)

[25] HAN Z, NARENDRA K S. Second level adaptation using multiple models. *Proceeding of the 2011 American Control Conference*. San Francisco, CA: IEEE, 2011: 2350 – 2355.

[26] CHAI T Y. Direct adaptive decoupling control for general stochastic multivariable systems. *International Journal of Control*, 1990, 51(4): 885 – 909.

作者简介:

王 岩 硕士研究生, 目前研究方向为多模型自适应控制, E-mail: 1019672679@qq.com;

王 昕 副教授, 博士, 目前研究方向为多模型控制与优化, E-mail: wangxin26@sjtu.edu.cn;

王振雷 教授, 博士生导师, 目前研究方向为智能优化与控制策略, E-mail: wangzhen_l@ecust.edu.cn.