

奇异Lur'e网络的自适应牵制聚类同步控制

汤 泽^{1,2†}, 轩德利¹, 王 艳^{1,2}, 纪志成^{1,2}

(1. 江南大学 物联网工程学院, 江苏 无锡 214122; 2. 江南大学 物联网应用技术教育部工程研究中心, 江苏 无锡 214122)

摘要: 本文分别研究了由奇异和非奇异Lur'e系统组成的具有多种耦合方式时滞复杂动态网络的聚类同步问题. 通过设计一类牵制反馈控制器, 仅控制当前聚类中与其他聚类有直接连接的Lur'e系统, 从而有效减少控制器个数同时降低控制成本. 考虑到网络具有多种耦合方式, 本文合理构造Lyapunov泛函, 并有效利用扇形条件、非线性函数类概念、S-过程以及Lyapunov稳定性定理等方法, 分别给出奇异和非奇异Lur'e动态网络实现聚类同步的判定条件. 此外, 为有效节省控制成本, 针对控制强度设计一类自适应更新定律, 从而得到网络实现聚类同步的最优控制强度. 最后, 为了验证所得聚类同步判定条件和控制器的有效性, 对一类典型Lur'e网络聚类同步问题进行了数值仿真.

关键词: 复杂网络; 聚类同步; Lur'e系统; S-过程; 自适应控制; 牵制控制

引用格式: 汤泽, 轩德利, 王艳, 等. 奇异Lur'e网络的自适应牵制聚类同步控制. 控制理论与应用, 2020, 37(10): 2107–2114

DOI: 10.7641/CTA.2020.00242

Cluster synchronization of heterogeneous Lur'e networks via pinning adaptive control

TANG Ze^{1,2†}, XUAN De-li¹, WANG Yan^{1,2}, JI Zhi-cheng^{1,2}

(1. School of Internet of Things Engineering, Jiangnan University, Wuxi Jiangsu 214122 China;
2. Engineering Research Center of Internet of Things Technology Applications (Ministry of Education),
Jiangnan University, Wuxi Jiangsu 214122 China)

Abstract: In this paper, the cluster synchronization problem for a kind of delayed complex dynamical networks with multiple couplings composed of heterogeneous and homogeneous Lur'e systems is investigated. By designing a kind of pinning negative feedback controllers, only the Lur'e systems in current clusters which have direct connections with the Lur'e systems in the other clusters are controlled. Considering different types of coupling patterns in the Lur'e networks, an effective Lyapunov functional is constructed and then sufficient conditions for the cluster synchronization of the heterogeneous and homogeneous Lur'e dynamical networks are obtained respectively, according to the sector conditions, the NCF function class, S-procedure and the Lyapunov stability theorem. Furthermore, to decrease the control costs, an adaptive updating law for the pinning feedback control strength is designed. Finally, the effectiveness of the proposed cluster synchronization conditions and the control schemes are verified by a numerical simulation.

Key words: complex networks; cluster synchronization; Lur'e system; S-procedure; adaptive control; pinning control

Citation: TANG Ze, XUAN Deli, WANG Yan, et al. Cluster synchronization of heterogeneous Lur'e networks via pinning adaptive control. *Control Theory & Applications*, 2020, 37(10): 2107–2114

1 引言

近20年来, 复杂系统和复杂动态网络已成为生态学、工程学和社会学等诸多学科领域广泛关注和研究的热点^[1–3]. 现实世界和人类社会中存在大量与人们日常生活密切相关的复杂网络, 如通信网、社交网和互联网等. 网络上传播、扩散和同步等动力学行为

是复杂动态网络研究的基本问题, 尤其是同步这一集群行为更是受到了广泛关注. 在文献[4–6]中, 许多重要的同步现象和模型已经得到了深入的研究, 如全局同步^[4]、相同步^[5]和聚类同步^[6]等.

一般来说, 聚类同步是指每一聚类中的任意动态节点相互同步而不同聚类之间没有要求. 在现有大多

收稿日期: 2020–05–04; 录用日期: 2020–08–27.

†通信作者. E-mail: tangze0124@jiangnan.edu.cn; Tel.: +86 13905630171.

本文责任编辑: 邓飞其.

国家自然科学基金项目(61803180, 61973138), 江苏省自然科学基金项目(BK20180599), 国家重点研发计划项目(2018YFB1701903)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (61803180, 61973138), the National Natural Science Foundation of Jiangsu Province (BK20180599) and the National Key R&D Program of China (2018YFB1701903).

数聚类同步工作^[7]中,考虑的都是具有非奇异节点的一般网络的聚类同步问题,即所有节点的局部动力学行为都是相同的.显然,假设所有节点都是具有相同的动力学行为很不现实,例如在新陈代谢、神经或者社交网络中,不同聚类中任意一对节点按照其功能划分是不相同的.

事实上,大部分复杂网络是无法通过调节系统自身参数实现同步,因此设计合适的控制器就变得至关重要.现如今已经出现了许多有效的控制策略^[3,8-9],如牵制控制^[3]、脉冲控制^[8]和自适应控制^[9]等.由于复杂网络具有规模巨大这一特点,从而为每一个节点施加控制器在现实中变得异常困难.而牵制控制作为一种仅控制一小部分节点的控制方式,受到广泛关注.另一方面,为了实现网络的同步,针对网络控制器一般需要非常大的控制器强度,这样不仅增加了控制成本同时造成了资源浪费.因此樊等人^[10]提出了一种自适应牵制控制方法来实现复杂网络的同步.

众所周知,Lur'e系统是一类典型的非线性系统,而由Lur'e系统耦合而成复杂动态网络的同步与控制问题已经成为研究热点^[11-13].文献[11]中,郑等人采用牵制控制策略研究了一类具有耦合时滞Lur'e动态网络的同步问题;文献[13]中,丰等人研究了一类非线性耦合Lur'e复杂网络的同步问题.但上述文献都没有考虑Lur'e系统之间还可能存在着导数耦合的形式.对于一个复杂网络而言,状态向量是用来表示当前系统的空间位置,而状态导数向量则可以看作是不同的系统之间的信息交换速率.所以针对导数型耦合复杂网络,当前系统的变化率是由当前系统的动力学性态和与之相邻系统的变化率共同决定的.

本文在假定复杂网络具有3种耦合形式(非线性耦合、时滞耦合、导数型耦合)的条件下,研究了由奇异和非奇异Lur'e系统耦合而成的有向复杂动态网络聚类同步问题.通过引入自适应牵制控制策略,本文设计了一类只控制聚类中与其他聚类直接相连的一小部分Lur'e系统的负反馈控制器.基于Lyapunov稳定性定理,有效利用扇形条件和非线性函数类概念等方法,给出该复杂Lur'e网络实现全局聚类同步的判定条件.

符号: A^T 表示矩阵 A 的转置; \mathbb{R}^m 表示 m 维Euclid空间; $\mathbb{R}^{m \times m}$ 表示 $m \times m$ 实矩阵集合; I_m 为 m 维单位矩阵; $B \otimes C$ 表示矩阵 B 和 C 的Kronecker积.对于所有非零 x 有 $x^T A x > 0$ (≥ 0),则实对称矩阵 L 是正定(半正定)矩阵表示为 $A > 0$ (≥ 0);符号 $\|\cdot\|$ 表示矩阵或向量的Euclid范数; $\text{diag}\{\cdot\}$ 表示对角矩阵;如无明确说明,矩阵均假设符合代数运算的要求.

2 准备工作

假设考虑的复杂网络含有 M 个节点,并划分为 g

个聚类.定义函数 $\mu_i = j$,它表示节点 i 属于第 j 个聚类.让 U_j 表示第 j 个聚类中所有节点的集合, \hat{U}_j 表示第 j 个聚类中直接与其他聚类相连接节点的集合.

考虑以下由非奇异Lur'e系统耦合而成的具有非线性、时滞和导数型耦合网络模型:

$$\begin{aligned} \dot{y}_i(t) = & H y_i(t) + J f(A y_i(t)) + \\ & c_1 \sum_{j=1}^M b_{ij} \Gamma L(y_j(t)) + c_2 \sum_{j=1}^M q_{ij} \Gamma y_j(t - \tau) + \\ & c_3 \sum_{j=1}^M w_{ij} \Gamma \dot{y}_j(t) + u_i(t), \end{aligned} \quad (1)$$

其中: $y_i(t) = [y_i^1(t) \ y_i^2(t) \ \cdots \ y_i^m(t)]^T \in \mathbb{R}^m$ 为节点的状态向量, $i = 1, 2, \dots, M$; $H \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $J \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ 为常数矩阵; $\tau > 0$ 为耦合时滞;正常数 c_1, c_2, c_3 为网络的耦合强度; $\Gamma = \text{diag}\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m\}$ 表示内部耦合矩阵.为了简单起见,本文假设 Γ 为单位阵, $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为在 \mathbb{R} 上连续可微的非线性函数, $B = (b_{ij})_{M \times M}$ 和 $Q = (q_{ij})_{M \times M}$ 为由网络拓扑结构所决定的耦合矩阵;另外它还满足耗散条件,即

$$b_{ii} = - \sum_{j \neq i}^M b_{ij}, \quad q_{ii} = - \sum_{j \neq i}^M q_{ij},$$

其中如果第 j 个Lur'e系统与第 i 个Lur'e系统有连接,则 $b_{ij} (\neq b_{ji}) > 0$ ($q_{ij} (\neq q_{ji}) > 0$),否则 $b_{ij} = 0$ ($q_{ij} = 0$). $W = (w_{ij})_{M \times M}$ 是导数型耦合矩阵,并假设它是对称阵且满足耗散条件,即当第 j 个Lur'e系统与第 i 个Lur'e系统相连时有 $w_{ij} = w_{ji} > 0$,否则 $w_{ij} = w_{ji} = 0$. $u_i(t)$ 是控制器,它将在之后被设计. $L(\cdot): \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ 是非线性耦合函数且 $L(y_i(t)) = [l_1(y_i^1(t)) \ l_2(y_i^2(t)) \ \cdots \ l_m(y_i^m(t))]^T$. 记

$$\begin{aligned} A y_i(t) = & [a_1 y_i(t) \ a_2 y_i(t) \ \cdots \ a_n y_i(t)]^T, \\ f(A y_i(t)) = & [f_1(a_1 y_i(t)) \ \cdots \ f_n(a_n y_i(t))]^T, \end{aligned}$$

其中: $A = [a_1^T \ a_2^T \ \cdots \ a_n^T]^T$, $a_j \in \mathbb{R}^{1 \times m}$. 假设函数 $f_j(a_j y_i(t))$ ($j = 1, 2, \dots, n$, $i = 1, 2, \dots, M$)满足如下扇形条件:

$$\delta_j \leq \dot{f}_j(a_j y_i(t)) \leq \nu_j. \quad (2)$$

为了解决现实世界中大量存在的奇异Lur'e网络的聚类同步问题,本文还考虑如下具有奇异节点的Lur'e型网络模型:

$$\begin{aligned} \dot{y}_i(t) = & H_{\mu_i} y_i(t) + J_{\mu_i} f_{\mu_i}(A y_i(t)) + \\ & c_1 \sum_{j=1}^M b_{ij} \Gamma L(y_j(t)) + c_2 \sum_{j=1}^M q_{ij} \Gamma y_j(t - \tau) + \\ & c_3 \sum_{j=1}^M w_{ij} \Gamma \dot{y}_j(t) + u_i(t), \end{aligned} \quad (3)$$

其中:

$$f_{\mu_i}(Ay_i(t)) = [f_{\mu_{i1}}(a_1y_i(t)) \cdots f_{\mu_{in}}(a_ny_i(t))]^T, \\ i = 1, 2, \dots, M.$$

如果节点*i*与节点*j*属于不同的聚类, 即 $\mu_i \neq \mu_j$, 则有 $f_{\mu_i} \neq f_{\mu_j}, H_{\mu_i} \neq H_{\mu_j}, J_{\mu_i} \neq J_{\mu_j}$.

为了给出聚类同步的判定条件, 下面本文首先给出一些相关的定义, 假设和引理.

定义 1^[14] 若对于任意初值, 只有当 $\mu_i = \mu_j$ 时, 才有 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|y_i(t) - y_j(t)\| = 0 (i, j = 1, 2, \dots, M)$; 而当 $\mu_i \neq \mu_j$ 时, $\lim_{t \rightarrow \infty} \|y_i(t) - y_j(t)\| \neq 0 (i, j = 1, 2, \dots, M)$, 则称有*g*个聚类的复杂动态网络是聚类同步的.

假设 1 对于非线性函数 $l_k(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 假设它属于可接受非线性耦合函数类(acceptable nonlinear coupling function class, NCF)^[3], $l_k(\cdot) \in \text{NCF}(\xi, \sigma)$, 即存在两个正常数 ξ 和 σ 使得

$$|(l_k(a_1) - \xi a_1) - (l_k(a_2) - \xi a_2)| \leq \sigma |a_1 - a_2|$$

对任意 $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ 成立.

引理 1^[4] 假设对称矩阵 $K = (k_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 满足行和为零, 则对于任意的两个列向量*a*和*b*, 下面不等式成立:

$$a^T K b = -\sum_{j>i} k_{ij} (a_j - a_i)(b_j - b_i).$$

引理 2^[15] 假设对于单位列向量 $1_m \in \mathbb{R}^m$ 和单位矩阵 $I \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 有 $T = I - \frac{1}{m} 1_m 1_m^T$, 则对所有满足行和为零的矩阵 $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 且 $\eta > 0$, 对任意向量*a*, *b* $\in \mathbb{R}^m$ 有

$$a^T R b = a^T R T b \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\eta} a^T R R^T a + \eta b^T T b \right).$$

3 非奇异Lur'e网络的聚类同步

本节主要考虑由非奇异Lur'e系统经非线性、时滞和导数方式耦合而成的复杂动态网络(1)的聚类同步问题.

定义误差向量 $e_i(t) = y_i(t) - s_{\mu_i}(t)$, 其中 $s_{\mu_i}(t) = [s_{\mu_i}^1(t) \ s_{\mu_i}^2(t) \ \cdots \ s_{\mu_i}^m(t)]^T \in \mathbb{R}^m (i = 1, 2, \dots, g)$ 是每个聚类的同步目标, 且满足

$$\dot{s}_{\mu_i}(t) = H s_{\mu_i}(t) + J f(As_{\mu_i}(t)), \quad (4)$$

则误差动态Lur'e网络可描述为

$$\dot{e}_i(t) = H e_i(t) + J (f(Ay_i(t)) - f(As_{\mu_i}(t))) + \\ c_1 \sum_{j=1}^M b_{ij} (L(y_j(t)) - L(s_{\mu_j}(t))) + \\ c_2 \sum_{j=1}^M q_{ij} (y_j(t - \tau) - s_{\mu_j}(t - \tau)) -$$

$$\epsilon_i(t) (L(y_i(t)) - L(s_{\mu_i}(t))) + \\ c_3 \sum_{j=1}^M w_{ij} \dot{e}_j(t), \quad i = 1, 2, \dots, M. \quad (5)$$

由于矩阵*B*满足耗散条件, 则对于所有 $i \in U_{\mu_i} \setminus \hat{U}_{\mu_i}$ 有 $\sum_{j=1}^M b_{ij} L(s_{\mu_j}(t)) = 0$. 因此, 针对 $i \in \hat{U}_{\mu_i}$, 设计牵制负反馈控制器 $u_i(t)$ 为

$$u_i(t) = -\epsilon_i(t) (L(y_i(t)) - L(s_{\mu_i}(t))) - \\ c_1 \sum_{j=1}^M b_{ij} L(s_{\mu_j}(t)) - c_2 \sum_{j=1}^M q_{ij} s_{\mu_j}(t - \tau) - \\ c_3 \sum_{j=1}^M w_{ij} \dot{s}_{\mu_j}(t); \quad (6)$$

否则, 当 $i \in U_{\mu_i} \setminus \hat{U}_{\mu_i}$, 设计 $u_i(t) = 0$. 其中 $\epsilon_i(t) > 0 (i = 1, 2, \dots, M)$ 是时变负反馈控制增益.

注 1 控制器(6)中第1项用于同步同一聚类中的所有Lur'e系统, 而其余几项则用于削弱不同聚类之间由于Lur'e系统连接造成的相互影响.

为了简化分析, 定义下列函数:

$$\psi(Ae_i(t)) = f(Ay_i(t)) - f(As_{\mu_i}(t)), \\ \psi = [\psi_1(a_1e_i(t)) \ \psi_2(a_2e_i(t)) \ \cdots \ \psi_n(a_n e_i(t))]^T.$$

根据上述定义以及扇形条件(2), 得到如下条件:

$$\delta_j \leq \frac{\psi_j(a_j e_i(t))}{a_j e_i(t)} \leq v_j.$$

显然, 上式等价于

$$[\psi_j - \delta_j a_j e_i(t)] [\psi_j - v_j a_j e_i(t)] \leq 0, \quad (7)$$

其中 $a_j e_i(t) \neq 0, i = 1, 2, \dots, M, j = 1, 2, \dots, n$ 和 $t \in \mathbb{R}^+$. 为了后续理论分析方便, 记

$$\tilde{e}^k(t) = [e_1^k(t) \ e_2^k(t) \ \cdots \ e_M^k(t)]^T, \\ \tilde{e}^k(t - \tau) = [e_1^k(t - \tau) \ e_2^k(t - \tau) \ \cdots \ e_M^k(t - \tau)]^T, \\ \tilde{l}_k(y^k(t)) = [l_k(y_1^k(t)) \ l_k(y_2^k(t)) \ \cdots \ l_k(y_M^k(t))]^T, \\ \tilde{l}_k(s^k(t)) = [l_k(s_{\mu_1}^k(t)) \ l_k(s_{\mu_2}^k(t)) \ \cdots \ l_k(s_{\mu_M}^k(t))]^T, \\ \tilde{x}_k(y^k(t)) = [x_k(y_1^k(t)) \ x_k(y_2^k(t)) \ \cdots \ x_k(y_M^k(t))]^T, \\ \tilde{x}_k(s^k(t)) = [x_k(s_{\mu_1}^k(t)) \ x_k(s_{\mu_2}^k(t)) \ \cdots \ x_k(s_{\mu_M}^k(t))]^T,$$

其中 $k = 1, 2, \dots, m$.

定理 1 若假设1成立, 并存在正常数 $\eta, \epsilon_i (i \in \hat{U}_{\mu_i})$ 和正定矩阵 $Z = \text{diag}\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ 使得

i) 矩阵不等式:

$$\begin{bmatrix} H + H^T - A^T \Delta Z \Upsilon A & J + \frac{1}{2} A^T (\Delta + \Upsilon) Z \\ J^T + \frac{1}{2} Z^T (\Delta + \Upsilon) A & -Z \end{bmatrix} < 0, \quad (8)$$

ii) 对于一个正定对角矩阵 C , 有

$$\begin{bmatrix} c_1\xi(B+B^T)+c_1\Theta-2(\xi-\sigma)P+C & c_2Q \\ c_2Q^T & -C \end{bmatrix} < 0, \tag{9}$$

则被控误差Lur'e网络(5)是全局稳定的, 即在控制强度自适应法则

$$\dot{\epsilon}_i(t) = \rho e_i^T(t)e_i(t) \tag{10}$$

和牵制反馈控制器(6)作用下, 非奇异Lur'e动态网络(1)与Lur'e系统(4)可实现聚类同步, 其中:

$$\begin{aligned} \rho > 0, \Theta &= \frac{1}{\eta}BB^T + 2\sigma^2\eta(1 - \frac{1}{M})I_M, \\ P &= \text{diag}\{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_M\}, \\ \Delta &= \text{diag}\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n\}, \\ \Upsilon &= \text{diag}\{v_1, v_2, \dots, v_n\}. \end{aligned}$$

证 构造如下Lyapunov函数:

$$\begin{aligned} V(t) &= e^T(t)((I_M - c_3W) \otimes I_m)e(t) + \\ &\sum_{i=1}^M \frac{\xi - \sigma}{\rho} \times (\epsilon_i(t) - \epsilon_i)^2 + \\ &\sum_{k=1}^m \int_{t-\tau}^t \tilde{e}^k(\theta)^T C \tilde{e}^k(\theta) d\theta, \end{aligned}$$

则 $V(t)$ 沿误差Lur'e网络(5)关于时间 t 的导数为

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \\ &2e^T(t)\dot{e}(t) - 2c_3e^T(t)(W \otimes I_m)\dot{e}(t) + \\ &2\sum_{i=1}^M \frac{\xi - \sigma}{\rho} \dot{\epsilon}_i(t)(\epsilon_i(t) - \epsilon_i) + \\ &\sum_{k=1}^m (\tilde{e}^k(t)^T C \tilde{e}^k(t) - \tilde{e}^k(t-\tau)^T C \tilde{e}^k(t-\tau)) = \\ &2\sum_{i=1}^M e_i^T(t)(He_i(t) + J\psi(Ae_i(t))) + \\ &2c_1 \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M b_{ij} e_i^T(t)(L(y_j(t)) - L(s_{\mu_j}(t))) + \\ &2\sum_{i=1}^M e_i^T(t)(-\epsilon_i(t)(L(y_i(t)) - L(s_{\mu_i}(t))) + \\ &(\xi - \sigma)(\epsilon_i(t) - \epsilon_i)e_i(t)) + \\ &2c_2 \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M q_{ij} e_i^T(t)e_j(t-\tau) + \\ &\sum_{k=1}^m (\tilde{e}^k(t)^T C \tilde{e}^k(t) - \tilde{e}^k(t-\tau)^T C \tilde{e}^k(t-\tau)) = \\ &V_1(t) + V_2(t) + V_3(t) + V_4(t). \end{aligned} \tag{11}$$

分别考虑 $V_1(t), V_2(t), V_3(t), V_4(t)$ 四部分, 记

$$V_1(t) = 2\sum_{i=1}^M e_i^T(t)(He_i(t) + J\psi(Ae_i(t))).$$

首先, 本文将通过条件(7)和S-Procedure^[16]来证明 $V_1(t) < 0$. 根据定理1的条件i), 存在正常数 $z_{ij}(i = 1, 2, \dots, M, j = 1, 2, \dots, n)$, 针对

$$G = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^n z_{ij}(\psi_j - \delta_j a_j e_i(t))(\psi_j - v_j a_j e_i(t)),$$

有如下不等式成立:

$$\begin{aligned} V_1(t) - G &= \\ &\sum_{i=1}^M (2e_i^T(t)He_i(t) + 2e_i^T(t)J\psi(Ae_i(t))) - \\ &(\psi - \Delta Ae_i(t))^T Z(\psi - \Upsilon Ae_i(t)) = \\ &\sum_{i=1}^M (e_i^T(t), \psi^T) \Xi (e_i^T(t), \psi^T)^T < 0, \end{aligned} \tag{12}$$

其中:

$$\Xi = \begin{bmatrix} H+H^T-A^T\Delta Z\Upsilon A & J+\frac{1}{2}A^T(\Delta+\Upsilon)Z \\ J^T+\frac{1}{2}Z^T(\Delta+\Upsilon)A & -Z \end{bmatrix}.$$

因此, 由 $V_1(t) - G < 0$ 与 $G \leq 0$ 可知 $V_1(t) < 0$.

记 $x_k(a) = l_k(a) - \xi a$, 又有 $l_k(\cdot) \in \text{NCF}(\xi, \sigma)$, 则可以推导出

$$\begin{aligned} V_2(t) &= \\ &2c_1 \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M b_{ij} e_i^T(t)(L(y_j(t)) - L(s_{\mu_j}(t))) = \\ &2c_1 \sum_{k=1}^m \tilde{e}^k(t)^T B(\tilde{l}_k(y^k(t)) - \tilde{l}_k(s^k(t))) = \\ &2c_1 \xi \sum_{k=1}^m \tilde{e}^k(t)^T B \tilde{e}^k(t) + 2c_1 \sum_{k=1}^m \tilde{e}^k(t)^T B \times \\ &(\tilde{x}_k(y^k(t)) - \tilde{x}_k(s^k(t))). \end{aligned} \tag{13}$$

定义

$$\Theta = \frac{1}{\eta}BB^T + 2\sigma^2\eta(1 - \frac{1}{M})I_M,$$

并由引理1和引理2可以得到

$$\begin{aligned} &2c_1 \sum_{k=1}^m \tilde{e}^k(t)^T B(\tilde{x}_k(y^k(t)) - \tilde{x}_k(s^k(t))) \leq \\ &c_1 \sum_{k=1}^m \frac{1}{\eta} \tilde{e}^k(t)^T BB^T \tilde{e}^k(t) + \\ &c_1 \sum_{k=1}^m \eta(\tilde{x}_k(y^k(t)) - \tilde{x}_k(s^k(t)))^T \times \\ &T(\tilde{x}_k(y^k(t)) - \tilde{x}_k(s^k(t))) = \\ &c_1 \sum_{k=1}^m \frac{1}{\eta} \tilde{e}^k(t)^T BB^T \tilde{e}^k(t) - \\ &c_1 \eta \sum_{k=1}^m \sum_{i>j} t_{ij}((x_k(y_i^k(t)) - x_k(s_{\mu_i}^k(t))) - \\ &(x_k(y_j^k(t)) - x_k(s_{\mu_j}^k(t))))^2 \leq \\ &c_1 \sum_{k=1}^m \frac{1}{\eta} \tilde{e}^k(t)^T BB^T \tilde{e}^k(t) - \\ &2c_1 \eta \sum_{k=1}^m \sum_{i>j} t_{ij}((x_k(y_i^k(t)) - x_k(s_{\mu_i}^k(t)))^2 + \\ &((x_k(y_j^k(t)) - x_k(s_{\mu_j}^k(t))))^2) \leq \\ &c_1 \sum_{k=1}^m \frac{1}{\eta} \tilde{e}^k(t)^T BB^T \tilde{e}^k(t) - \end{aligned}$$

$$2c_1\sigma^2\eta \sum_{k=1}^m \sum_{i>j} t_{ij}(e_i^k(t)^2 + e_j^k(t)^2) = c_1 \sum_{k=1}^m \tilde{e}^k(t)^T \Theta \tilde{e}^k(t). \tag{14}$$

对于 $V_3(t)$, 通过假设1可以知道

$$\begin{aligned} V_3(t) = & 2 \sum_{i=1}^M e_i^T(t) (-\epsilon_i(t)(L(y_i(t)) - L(s_{\mu_i}(t))) + \\ & (\xi - \sigma)(\epsilon_i(t) - \epsilon_i)e_i(t)) \leq \\ & 2(\sigma - \xi) \sum_{i=1}^M \sum_{k=1}^m \epsilon_i(t)(e_i^k(t))^2 + \\ & 2(\xi - \sigma) \sum_{i=1}^M e_i^T(t)(\epsilon_i(t) - \epsilon_i)e_i(t) = \\ & -2(\xi - \sigma) \sum_{k=1}^m \tilde{e}^k(t)^T P \tilde{e}^k(t). \end{aligned} \tag{15}$$

令 $\beta^k(t) = (\tilde{e}^k(t)^T \tilde{e}^k(t - \tau)^T)^T$, 结合式(11)(13)-(15)有

$$\begin{aligned} V_2(t) + V_3(t) + V_4(t) = & \sum_{k=1}^m \tilde{e}^k(t)^T (2c_1\xi B + c_1\Theta - 2(\xi - \sigma)P + C) \tilde{e}^k(t) + \\ & 2c_2 \sum_{k=1}^m \tilde{e}^k(t)^T Q \tilde{e}^k(t - \tau) - \\ & \sum_{k=1}^m \tilde{e}^k(t - \tau)^T C \tilde{e}^k(t - \tau) = \\ & \sum_{k=1}^m \beta^k(t)^T \Pi \beta^k(t), \end{aligned} \tag{16}$$

其中:

$$\Pi = \begin{bmatrix} c_1\xi(B+B^T) + c_1\Theta - 2(\xi - \sigma)P + C & c_2Q \\ c_2Q^T & -C \end{bmatrix}.$$

根据定理1中条件ii), 可以得到 $V_2(t) + V_3(t) + V_4(t) < 0$.

综上可知 $\dot{V}(t) < 0$, 由Lyapunov稳定性定理和定义1知被控Lur'e动态网络(1)可实现聚类同步, 即 $e_i(t) \rightarrow 0, \epsilon_i(t) \rightarrow \epsilon_i(t \rightarrow \infty)$. 也就是说, 节点在每个聚类(第 μ_i 聚类同步到目标状态 s_{μ_i})中完全同步到相应聚类的目标状态. 因此, 聚类同步流 $N = (s_{\mu_1}, \dots, s_{\mu_M})$ 是全局稳定的. 证毕.

注 2 由于非线性耦合函数 $l_k(\cdot)$ 是属于可接受类函数(NCF), 利用投影方法可将其分解为线性部分 ξa 和振荡部分 $x_k(a) = l_k(a) - \xi a$.

4 奇异Lur'e网络的聚类同步

本节主要考虑由奇异Lur'e系统经非线性、时滞和导数方式耦合而成的复杂动态网络(3)的聚类同步问题.

针对已定义的误差向量 $e_i(t) = y_i(t) - s_{\mu_i}(t)$ 且

各聚类的同步目标 $s_{\mu_i}(t)$ 满足

$$\dot{s}_{\mu_i}(t) = H_{\mu_i} s_{\mu_i}(t) + J_{\mu_i} f_{\mu_i}(A s_{\mu_i}(t)), \tag{17}$$

其中 $i = 1, 2, \dots, M$. 由于矩阵 B 满足耗散条件, 对于所有 $i \in U_{\mu_i} \setminus \hat{U}_{\mu_i}$ 有 $\sum_{j=1}^M b_{ij} L(s_{\mu_j}(t)) = 0$. 因此, 针对所设计的自适应牵制反馈控制器(6), 可以得到如下误差动态Lur'e网络:

$$\begin{aligned} \dot{e}_i(t) = & H_{\mu_i} e_i(t) + J_{\mu_i} \psi_{\mu_i}(A e_i(t)) + \\ & c_1 \sum_{j=1}^M b_{ij} (L(y_j(t)) - L(s_{\mu_j}(t))) + \\ & c_2 \sum_{j=1}^M q_{ij} (y_j(t - \tau) - s_{\mu_j}(t - \tau)) - \\ & \epsilon_i(t) (L(y_i(t)) - L(s_{\mu_i}(t))) + \\ & c_3 \sum_{j=1}^M w_{ij} \dot{e}_j(t), \quad i = 1, 2, \dots, M, \end{aligned} \tag{18}$$

其中 $\psi_{\mu_i}(A e_i(t)) = f_{\mu_i}(A y_i(t)) - f_{\mu_i}(A s_{\mu_i}(t))$. 定义 $\psi_{\mu_i} = [\psi_{\mu_i 1}(a_1 e_i(t)) \dots \psi_{\mu_i n}(a_n e_i(t))]^T$, 则对应于Lur'e系统的扇形条件(2)可得出 ψ_{μ_i} 满足

$$\delta_{\mu_{ij}} \leq \frac{\psi_{\mu_{ij}}(a_j e_i(t))}{a_j e_i(t)} \leq v_{\mu_{ij}}.$$

显然, 上式等价于

$$[\psi_{\mu_{ij}} - \delta_{\mu_{ij}} a_j e_i(t)] [\psi_{\mu_{ij}} - v_{\mu_{ij}} a_j e_i(t)] \leq 0, \tag{19}$$

其中 $a_j e_i(t) \neq 0$ 和 $t \in \mathbb{R}^+$.

定理 2 若假设1成立, 并存在正常数 $\eta, \epsilon_i, i \in \hat{U}_{\mu_i}$ 和正定对角矩阵 $Z_{\mu_i} = \text{diag}\{z_{\mu_i 1}, \dots, z_{\mu_i n}\}$ 使得

i) 矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} \tilde{H} + \tilde{H}^T - \tilde{A}^T \tilde{\Delta} \tilde{Z} \tilde{\Upsilon} \tilde{A} & \tilde{J} + \frac{1}{2} \tilde{A}^T (\tilde{\Delta} + \tilde{\Upsilon}) \tilde{Z} \\ \tilde{J}^T + \frac{1}{2} \tilde{Z}^T (\tilde{\Delta} + \tilde{\Upsilon}) \tilde{A} & -\tilde{Z} \end{bmatrix} < 0; \tag{20}$$

ii) 对于一个正定对角矩阵 C , 有

$$\begin{bmatrix} c_1\xi(B+B^T) + c_1\Theta - 2(\xi - \sigma)P + C & c_2Q \\ c_2Q^T & -C \end{bmatrix} < 0, \tag{21}$$

则被控误差Lur'e网络(18)是全局稳定的, 即在牵制反馈控制器(6)和控制强度自适应法则(10)作用下, 奇异Lur'e动态网络(3)与Lur'e系统(17)可实现聚类同步, 其中:

$$\begin{aligned} \Theta = & \frac{1}{\eta} B B^T + 2\sigma^2 \eta (1 - \frac{1}{M}) I_M, \\ P = & \text{diag}\{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_M\}, \\ \Delta_{\mu_i} = & \text{diag}\{\delta_{\mu_i 1}, \delta_{\mu_i 2}, \dots, \delta_{\mu_i n}\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Upsilon_{\mu_i} &= \text{diag}\{v_{\mu_i1}, v_{\mu_i2}, \dots, v_{\mu_in}\}, \\ \tilde{H} &= I_M \otimes H_{\mu_i}, \tilde{J} = I_M \otimes J_{\mu_i}, \tilde{A} = I_M \otimes A_{\mu_i}, \\ \tilde{\Upsilon} &= I_M \otimes \Upsilon_{\mu_i}, \tilde{\Delta} = I_M \otimes \Delta_{\mu_i}, \tilde{Z} = I_M \otimes Z_{\mu_i}. \end{aligned}$$

证 选取如下Lyapunov函数:

$$\begin{aligned} V(t) &= \\ &e^T(t)((I_M - c_3W) \otimes I_m)e(t) + \sum_{i=1}^M \frac{\xi - \sigma}{\rho} \times \\ &(\epsilon_i(t) - \epsilon_i)^2 + \sum_{k=1}^m \int_{t-\tau}^t \tilde{e}^k(\theta)^T C \tilde{e}^k(\theta) d\theta, \end{aligned}$$

则 $V(t)$ 沿误差网络(18)关于时间 t 的导数为

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \\ &2 \sum_{i=1}^M e_i^T(t)(H_{\mu_i} e_i(t) + J_{\mu_i} \psi_{\mu_i}(Ae_i(t))) + \\ &2c_1 \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M b_{ij} e_i^T(t)(L(y_j(t)) - L(s_{\mu_j}(t))) + \\ &2 \sum_{i=1}^M e_i^T(t)(-\epsilon_i(t)(L(y_i(t)) - L(s_{\mu_i}(t)))) + \\ &(\xi - \sigma)(\epsilon_i(t) - \epsilon_i)e_i(t) + \\ &2c_2 \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M q_{ij} e_i^T(t)e_j(t - \tau) + \\ &\sum_{k=1}^m (\tilde{e}^k(t)^T C \tilde{e}^k(t) - \tilde{e}^k(t - \tau)^T C \tilde{e}^k(t - \tau)) = \\ &V_1'(t) + V_2'(t) + V_3'(t) + V_4'(t), \end{aligned} \tag{22}$$

其中: $V_1'(t) = 2 \sum_{i=1}^M e_i^T(t)(H_{\mu_i} e_i(t) + J_{\mu_i} \psi_{\mu_i}(Ae_i(t)))$, $V_2(t), V_3(t), V_4(t)$ 分别如第3部分所定义.

为了后文分析方便, 记

$$\begin{aligned} e(t) &= [e_1^T(t) \ e_2^T(t) \ \dots \ e_M^T(t)]^T, \\ \tilde{\Psi}_{\mu_i}(\tilde{A}e(t)) &= \\ &[\psi_{\mu_i}^T(Ae_1(t)) \ \psi_{\mu_i}^T(Ae_2(t)) \ \dots \ \psi_{\mu_i}^T(Ae_M(t))]^T. \end{aligned}$$

利用Kronecker乘积将 $V_1'(t)$ 表示为

$$V_1'(t) = 2e^T(t)\tilde{H}e(t) + 2e^T(t)\tilde{J}\tilde{\Psi}_{\mu_i}(\tilde{A}e(t)),$$

其中:

$$\begin{aligned} \tilde{H} &= I_M \otimes H_{\mu_i}, \tilde{J} = I_M \otimes J_{\mu_i}, \\ \tilde{A} &= I_M \otimes A_{\mu_i}, \tilde{\Upsilon} = I_M \otimes \Upsilon_{\mu_i}, \tilde{\Delta} = I_M \otimes \Delta_{\mu_i}. \end{aligned}$$

类似于第3部分, 本文将先通过式(19)和S-Procedure^[16]来证明 $V_1'(t) < 0$. 根据定理2的条件i), 存在正常数 $z_{\mu_{ij}}(i = 1, 2, \dots, M, j = 1, 2, \dots, n)$, 针对

$$\begin{aligned} G' &= \\ &\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^n z_{\mu_{ij}}(\psi_{\mu_{ij}} - \delta_{\mu_{ij}} a_j e_i(t))(\psi_{\mu_{ij}} - v_{\mu_{ij}} a_j e_i(t)), \end{aligned}$$

有如下不等式成立:

$$\begin{aligned} V_1(t) - G' &= \\ &2e^T(t)\tilde{H}e(t) + 2e^T(t)\tilde{J}\tilde{\Psi}_{\mu_i}(\tilde{A}e(t)) - \\ &(\tilde{\Psi}_{\mu_i}(\tilde{A}e(t)) - \tilde{\Delta}\tilde{A}e(t))^T \tilde{Z} \times \\ &(\tilde{\Psi}_{\mu_i}(\tilde{A}e(t)) - \tilde{\Upsilon}\tilde{A}e(t)) = \\ &\begin{bmatrix} e(t) \\ \tilde{\Psi}_{\mu_i}(\tilde{A}e(t)) \end{bmatrix}^T \Lambda \begin{bmatrix} e(t) \\ \tilde{\Psi}_{\mu_i}(\tilde{A}e(t)) \end{bmatrix} < 0, \end{aligned}$$

其中:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \tilde{H} + \tilde{H}^T - \tilde{A}^T \tilde{\Delta} \tilde{Z} \tilde{\Upsilon} \tilde{A} & \tilde{J} + \frac{1}{2} \tilde{A}^T (\tilde{\Delta} + \tilde{\Upsilon}) \tilde{Z} \\ \tilde{J}^T + \frac{1}{2} \tilde{Z}^T (\tilde{\Delta} + \tilde{\Upsilon}) \tilde{A} & -\tilde{Z} \end{bmatrix}.$$

因此, 由 $V_1(t) - G' < 0$ 与 $G' \leq 0$ 可知 $V_1'(t) < 0$. 类似定理1中的证明, 有 $V_2(t) + V_3(t) + V_4(t) < 0$.

综上所述可知 $\dot{V}(t) < 0$. 根据所构造的Lyapunov函数, 可以得到

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \|e_i(t)\| &= \lim_{t \rightarrow \infty} \|y_i(t) - s_{\mu_i}(t)\| = 0, \\ \forall i &= 1, 2, \dots, M. \end{aligned}$$

同时, 本文可以得到 $y_i(t) \rightarrow s_{\mu_i}(t), \epsilon_i(t) \rightarrow \epsilon_i(t \rightarrow \infty)$, 其中 $i = 1, 2, \dots, M$. 由Lyapunov稳定性定理和定义1知被控奇异Lur'e动态网络(3)在自适应牵制反馈控制器(6)和控制强度自适应法则(10)作用下可实现聚类同步. 证毕.

5 数值仿真

为验证本文所提出聚类同步判定方法和控制器设计方案的有效性, 在此仿真中采用奇异蔡氏振荡电路^[17]耦合的复杂动态网络为例进行说明.

作为经典非线性Lur'e系统的代表, 考虑如下蔡氏电路:

$$\begin{bmatrix} \dot{y}^1(t) \\ \dot{y}^2(t) \\ \dot{y}^3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa_i(y^2(t) - \omega_i(y^1(t))) \\ y^1(t) - y^2(t) + y^3(t) \\ -\alpha_i(t)y^2(t) - \beta_i y^3(t) \end{bmatrix}, \tag{23}$$

其中: 非线性函数 $\omega_i(x) = \varsigma_i x + (1/2)(\nu_i - \varsigma_i)(|x + 1| - |x - 1|)$; 系统参数 $\kappa_i, \alpha_i, \beta_i, \varsigma_i, \nu_i, i = 1, 2$.

首先, 选取 $\kappa_1 = 9, \alpha_1 = 14.3, \beta_1 = 0, \varsigma_1 = 2/7, \nu_1 = -1/7$, 则该蔡氏电路可以表述成Lur'e系统(4), 其中:

$$\begin{cases} y(t) = \begin{bmatrix} y^1(t) \\ y^2(t) \\ y^3(t) \end{bmatrix}, H_1 = \begin{bmatrix} -\frac{18}{7} & 9 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\frac{100}{7} & 0 \end{bmatrix}, \\ J_1 = \begin{bmatrix} \frac{27}{7} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, A_1 = [1 \ 0 \ 0], \end{cases} \tag{24}$$

(24)

且非线性函数 $f(A_1 y_1(t)) = \frac{1}{2}(|y^1(t) + 1| - |y^1(t) - 1|)$ 满足扇形条件 $[0, k]$.

其次, 选取

$$\begin{aligned} \kappa_2 &= 10, \alpha_2 = 15, \\ \beta_2 &= 0.0385, \varsigma_2 = 0.32, \nu_2 = -0.27, \end{aligned}$$

则该蔡氏电路可以表述成Lur'e系统(4), 其中:

$$\begin{cases} y(t) = \begin{bmatrix} y^1(t) \\ y^2(t) \\ y^3(t) \end{bmatrix}, \\ H_2 = \begin{bmatrix} -3.2 & 10 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -15 & -0.0385 \end{bmatrix}, \\ J_2 = \begin{bmatrix} 5.9 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, A_2 = [1 \ 0 \ 0], \end{cases} \quad (25)$$

且非线性函数 $f(A_2 y_1(t)) = \frac{1}{2}(|y^1(t) + 1| - |y^1(t) - 1|)$ 满足扇形条件 $[0, 1]$.

为验证本文所设计牵制反馈控制器有效性, 选取由6个蔡氏电路组成的复杂网络, 并将其分为两个聚类 $U_1 = \{1, 2, 3\}$ 和 $U_2 = \{4, 5, 6\}$ (如图1所示), 其中属于聚类 U_1 的Lur'e系统动力学行为如式(24)所示, 而属于聚类 U_2 的所有Lur'e系统动力学行为则服从式(25).

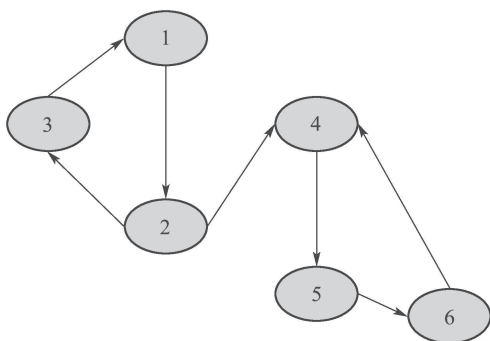


图 1 Lur'e网络的拓扑结构

Fig. 1 Topology of Lur'e network

取非线性耦合函数

$$\begin{aligned} L(y_i(t)) &= \\ &[l_1(y_i^1(t)) \ l_2(y_i^2(t)) \ l_3(y_i^3(t))]^T = \\ &[1.3y_i^1(t) + 0.2\sin(y_i^1(t)) \ 1.3y_i^2(t) + 0.2\sin(y_i^2(t)) \\ &1.3y_i^3(t) + 0.2\sin(y_i^3(t))]^T, \end{aligned}$$

则 $l_k(\cdot) \in \text{NCF}(1.3, 0.2)$, $k = 1, 2, 3$. 令 $\rho = 0.5$, $\Upsilon_1 = 0.1$, $\Delta_1 = 1$, $\Upsilon_2 = 0.1$, $\Delta_2 = 1$, 通过解线性矩阵不等式(20), 得到可行解 $Z_1 = 8.153 > 0$, $Z_2 = 11.834 > 0$. 令 $\tau = 0.1$, $c_1 = 0.95$, $c_2 = 0.5$, $c_3 = 0.1$ 时考虑条件(21), 得到可行解 $\eta = 1$ 及正定对角阵

$C =$

$$\text{diag}\{0.5741, 0.5741, 0.033, 0.2447, 0.439, 0.1339\}.$$

定义该网络的聚类同步误差为

$$E_j(t) = \sqrt{\frac{1}{h} \sum_{i=1}^h (\|y_i(t) - s_{\mu_i}(t)\|)^2},$$

其中: $j = 1, 2$; h 是每个聚类中的节点数, 这里 $h = 3$. 运用类似方式, 本文进一步定义

$$E_{12}(t) = \sqrt{\sum_{i,j=1}^3 (\|y_i(t) - y_{j+3}(t)\|)^2}$$

表示两个聚类之间的误差, 其中: $i \in U_1, j + 3 \in U_2$. 图2表示聚类 U_1 和聚类 U_2 的同步误差随着时间 t 的演化曲线, 当 $t \rightarrow \infty$ 时 $E_j(t) \rightarrow 0$, 即两个聚类达到同步. 从图2和图3可以看出, 同一聚类同步误差趋近于0而不同聚类间的误差曲线则发生不规则的振荡. 最后, 根据自适应更新定律(10), 图4给出自适应控制强度随时间演化曲线, 其中控制矩阵 $P = \text{diag}\{0, 2.085, 0, 2.361, 0, 0\}$. 从上面的分析可知此数值仿真实验很好的说明了所得结论的有效性.

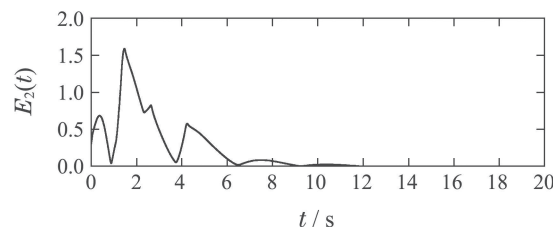
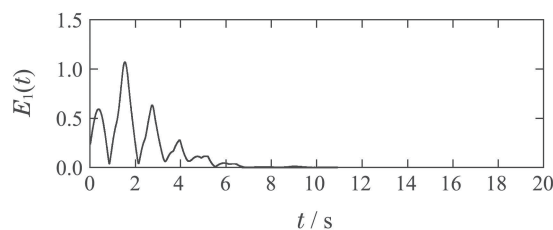


图 2 每个聚类的同步误差 $E_j(t)$

Fig. 2 Synchronous error $E_j(t)$ in each cluster

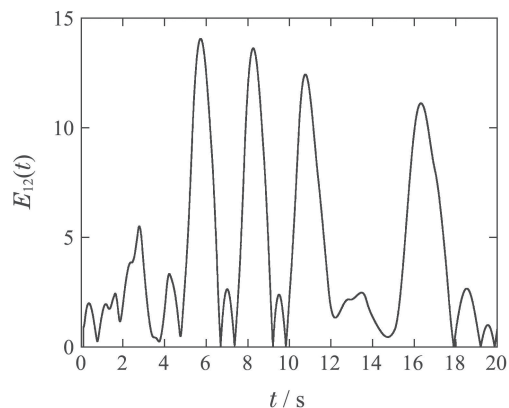
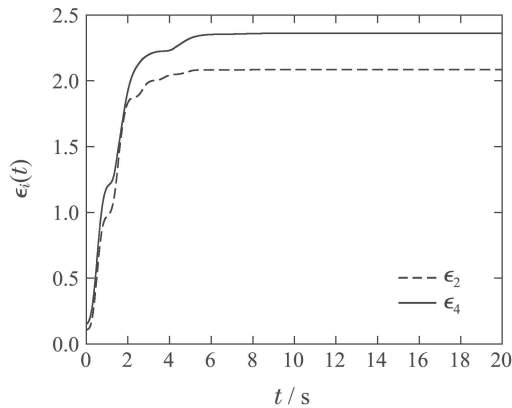


图 3 两个聚类之间同步误差 $E_{12}(t)$

Fig. 3 Synchronization error $E_{12}(t)$ between two clusters

图4 自适应控制强度 $\epsilon_i(t)$ 演化曲线Fig. 4 Adaptive control strength $\epsilon_i(t)$ evolution curves

6 结论

本文分别研究了由奇异和非奇异Lur'e系统经多种耦合方式耦合而成的时滞复杂动态网络的聚类同步问题. 首先设计了一类负反馈牵制控制器, 只控制当前聚类中与其他聚类有直接相连Lur'e系统, 并利用自适应控制策略得到合适的负反馈控制强度. 接着利用扇形条件、非线性函数类概念以及Lyapunov稳定性定理等方法, 通过构造适当的Lyapunov泛函, 得到了Lur'e动态网络实现聚类同步的判定条件. 最后, 对复杂网络聚类同步问题进行了数值仿真, 验证了聚类同步判定条件和控制器设计方案的有效性.

参考文献:

- [1] STROGATZ S H. Exploring complex networks. *Nature*, 2001, 410(6825): 268 – 276.
- [2] REN Hongwei, DENG Feiqi. Review on synchronization control in stochastic complex networks. *Control Theory & Applications*, 2017, 34(10): 1261 – 1274.
(任红卫, 邓飞其. 随机复杂网络同步控制研究进展综述. *控制理论与应用*, 2017, 34(10): 1261 – 1274.)
- [3] CHEN T P, LIU X, LU W. Pinning complex networks by a single controller. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 2007, 54(6): 1317 – 1326.
- [4] TANG Z, FENG J W, ZHAO Y. Global synchronization of nonlinear coupled complex dynamical networks with information exchanges at discrete-time. *Neurocomputing*, 2015, 151: 1486 – 1494.
- [5] FELL J, AXMACHER N. The role of phase synchronization in memory processes. *Nature Reviews Neuroscience*, 2011, 12(2): 105 – 118.
- [6] TANG Z, PARK J H, SHEN H. Finite-time cluster synchronization of lur'e networks: a nonsmooth approach. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2018, 48(8): 1213 – 1224.
- [7] LI K Z, SMALL M, FU X C. Generation of clusters in complex dynamical networks via pinning control. *Journal of Physics: A Mathematical and Theoretical*, 2008, 41(50): 1751 – 8113.
- [8] LU J Q, HO D W C, CAO J D. A unified synchronization criterion for impulsive dynamical networks. *Automatica*, 2010, 46(7): 1215 – 1221.
- [9] DONG H L, ZHOU J M, WANG B C, et al. Synchronization of nonlinearly and stochastically coupled markovian switching networks via an event-triggered sampling. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2018, 29(11): 5691 – 5700.
- [10] FAN Chunxia, JIANG Guoping. Adaptive pinning synchronization for complex network coupled with the outputs. *Journal of Applied Sciences*, 2010, 28(2): 203 – 208.
(樊春霞, 蒋国平. 输出耦合的复杂网络自适应牵制同步. *应用科学学报*, 2010, 28(2): 203 – 208.)
- [11] ZHENG H Q, JING Y W, LIU X P. Pinning synchronization for a class of complex dynamical networks with heterogeneous delays. *Control and Decision*, 2010, 25(17): 1719 – 1722.
- [12] LIU X, WANG J Z, HUANG L. Stabilization of a class of dynamical complex networks based on decentralized control. *Physical A: Statistical Mechanics and Applications*, 2007, 383(2): 733 – 744.
- [13] FENG J W, TANG Z, ZHAO Y, et al. Cluster synchronization of nonlinearly coupled Lur'e networks with identical and non-identical nodes and an asymmetrical coupling matrix. *IET Control Theory and Applications*, 2013, 7(18): 2117 – 2127.
- [14] WANG K H, FU X C, LI K Z. Cluster synchronization in community networks with nonidentical nodes. *Chaos*, 2009, 19(2): 1 – 10.
- [15] WANG J, FENG J, XU C, et al. Cluster synchronization of nonlinearly-coupled complex networks with nonidentical nodes and asymmetrical coupling matrix. *Nonlinear Dynamics*, 2012, 67(2): 1635 – 1646.
- [16] BOYD S, GHAOUI L E, FERON E, et al. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994.
- [17] JIN X Z, JIANG C C, QIN J H, et al. Robust pinning constrained control and adaptive regulation of coupled chua's circuit networks. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 2019, 66(10): 3928 – 3940.

作者简介:

汤 泽 博士, 副教授, 硕士生导师, 目前研究方向为复杂网络同步与控制、非线性系统稳定性分析和微动力系统与应用等, E-mail: tangze0124@jiangnan.edu.cn;

轩德利 硕士研究生, 目前研究方向为复杂网络同步控制, E-mail: xuan60869@126.com;

王 艳 教授, 博士生导师, 教育部长江学者青年学者, 目前研究方向为控制理论与工程、网络化控制系统、物联网控制系统和智能制造等, E-mail: wangyan@jiangnan.edu.cn;

纪志成 教授, 博士生导师, 物联网应用技术教育部工程研究中心主任, 无锡市智能制造与协同创新中心主任, 目前研究方向为控制工程和智能制造等, E-mail: zcjisci@gmail.com.