第 38 卷第 8 期
2021 年 8 月

控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications

Vol. 38 No. 8
Aug. 2021

非线性重复运动系统的双迭代优化学习控制

朱雪枫[1†], 王建辉[2]

(1. 沈阳工程学院 信息学院, 辽宁 沈阳 110136; 2. 东北大学 信息学院, 辽宁 沈阳 110819)

摘要: 本文针对一类具有非参数不确定性和输出约束的非线性系统, 提出一种双迭代优化学习控制策略, 将复杂的迭代学习过程简化为两个相对简单的迭代控制器. 首先引入一类饱和非线性函数不仅可以满足系统的位置约束, 同时能够保证系统跟踪误差收敛于给定的邻域, 然后针对每次迭代初始误差设计参考轨迹自修正策略, 在每个迭代周期上设置一个固定的调整时间域, 根据上次迭代的输出调整下一次迭代的参考轨迹. 双迭代的控制结构可以同时更新两个迭代控制器的参数, 来处理系统的非参数不确定性. 进一步利用Barrier复合能量函数证明双迭代控制策略的收敛性和稳定性, 并给出收敛条件. 最后, 通过一个算例证明了该控制策略的有效性.

关键词: 非线性; 迭代方法; 初始误差; 非参数不确定性; 参考轨迹自修正

引用格式: 朱雪枫, 王建辉. 非线性重复运动系统的双迭代优化学习控制. 控制理论与应用, 2021, 38(8): 1265 – 1274

DOI: 10.7641/CTA.2020.00372

Double iterative optimal learning control of nonlinear repetitive motion system

ZHU Xue-feng[1†], WANG Jian-hui[2]

(1. School of Information, Shenyang Institute of Engineering, Shenyang Liaoning 110136, China;
2. College of Information, Northeastern University, Shenyang Liaoning 110819, China)

Abstract: In this work, a double iterative optimal learning control strategy is proposed for a nonlinear systems with non-parametric uncertainties and output constraints. Firstly, a class of saturated nonlinear functions is introduced, which can not only satisfy the position constraints of the system, but also ensure that the tracking error converges to the given neighborhood. Then, a reference trajectory self-tuning strategy is designed for the initial error of each iteration. A fixed adjustment time domain is set in each iteration cycle, and the reference trajectory of the next iteration is adjusted according to the output of the last iteration. The dual iterative control structure can update the parameters of the two iterative controllers at the same time to deal with the non-parametric uncertainties of the system. Furthermore, the convergence and stability of the double iterative control strategy are proved by using the barrier composite energy function. Finally, an example is given to prove the effectiveness of the control strategy.

Key words: nonlinear; iterative methods; initial error; non-parametric uncertainty; reference trajectory self-correcting

Citation: ZHU Xuefeng, WANG Jianhui. Double iterative optimal learning control of nonlinear repetitive motion system. *Control Theory & Applications*, 2021, 38(8): 1265 – 1274

1 引言

迭代学习控制(iterative learning control, ILC)是一种先进的控制方法, 适用于有限时间重复运行的控制过程, 通过重复学习, 不断修正当前的输入信号, 实现控制系统对期望轨迹的完全跟踪[1–3]. 在过去的几十年里, ILC已经成为许多学者关注的焦点[4–6].

一般来说, 经典的迭代学习控制律可分为D型[7]、P型[8–9]、PD型、PID型[10]、高阶PD型[11–12]、以及基于反馈的PD型、PID型[13]和组合型[14]等. 迭代学习控制以其结构简单、学习能力强等优点, 在机器人控制[15–16]和工业重复运动控制[17–18]中得到了广泛的应用.

目前, 在迭代学习控制的研究中仍然存在着一些挑战, 第1个挑战是系统约束问题. 文献[19]提出了一种新的参数迭代学习控制算法, 该算法对距离和角度跟踪误差有非对称约束要求. 文献[20]引入了一种独

收稿日期: 2020−06−19; 录用日期: 2020−12−31.
†通信作者. E-mail: zxf627@sina.com; Tel.: +86 24-31975621.
本文责任编委: 刘淑君.
辽宁省自然科学基金指导计划项目(20180551113), 辽宁省自然科学基金面上项目(2019–MS–238)资助.
Supported by the Natural Science Foundation of Liaoning Guidance Plan (20180551113) and the National Natural Science Foundation of Liaoning Province (2019–MS–238).

特的不对称Barrier Lyapunov(BLF)函数, 在满足非对称输出约束的条件下, 同时解决具有和不具有非对称输出约束的高阶非线性系统的有限时间镇定问题. BLF是一个类似Lyapunov的函数, 当参数接近某个极限时, 它会增长到无穷大. 在闭环系统中, 通过分析BLF的有界性, 来保证参数的约束, 这为作者的工作提供了一定的启发.

ILC研究面临的第2个挑战是如何处理系统的非参数不确定性. 通常系统的不确定性满足参数化的假设, 即假设系统不确定性是由常量或周期性的未知项组成. 当上述假设不成立时, 传统的ILC将无法满足系统的控制要求. 文献[21]针对具有参数和非参数不确定性的离散非线性系统, 提出了一种新的鲁棒自适应迭代学习控制方法. 文献[22]针对一类输入输出耦合参数未知的不确定非线性系统的迭代学习控制问题, 提出了一种基于学习的输入输出耦合参数辨识技术. 文献[23]对一类离散不确定非线性系统, 提出了一种新的带调整因子的网络迭代学习控制(NILC)方案, 并严格证明了在一定条件下, 系统跟踪误差沿迭代方向收敛至零. 文献[24]针对一类扰动周期与参考信号周期之间无公共倍数的非参数不确定系统, 提出一种鲁棒双周期重复控制方法.

第3个挑战是不同的迭代初始条件. ILC要求被控系统的初始位置必须严格位于期望轨迹的起点, 但由于复位条件和实际重复精度的限制, 初始误差难以避免. 文献[25]针对一类参数化高阶不确定非线性连续系统, 设计迭代学习控制算法, 以解决随机初态对系统跟踪性能产生的负面影响. 文献[26]针对一类非参数不确定系统, 提出状态受限迭代学习控制的参考信号初始修正方法, 以解决任意初态下的状态受限轨迹跟踪问题. 目前在迭代学习控制中, 对不同迭代初始条件的研究较少, 因此, 如何提高重复运动系统在任意初始状态下, 迭代学习控制的跟踪性能是一个值得探讨的问题.

此外, 可靠性问题也受到越来越多的关注. 例如执行器发生故障可能会影响整个控制目标, 甚至会发生安全隐患. 但是执行器故障在ILC文献中还没有得到足够的重视, 只有最近的一些文献讨论了这类问题[28–30].

综上所述, 以迭代学习控制框架为基础, 在任意初始状态下, 如何解决重复运动系统的非参数不确定问题, 同时满足系统输出约束是本文的研究重点. 因此, 本文的目的是设计一种双迭代控制策略, 主要工作和创新: 1) 将复杂的迭代学习过程简化为两个相对简单的迭代控制器, 并在控制器设计中引入一类非线性饱和函数, 该函数的引入不仅有利于收敛性的分析, 还避免了参数的正向叠加对系统收敛性的影响, 同时能够保证系统跟踪误差收敛于给定的邻域; 2) 设计参考轨迹自修正策略, 在每个迭代周期上设置一个固定的调整时间域, 根据上次迭代的输出调整下一次迭代的参考轨迹, 随着迭代次数的增加, 该策略可实现预设时刻后的精确跟踪控制.

2 问题的提法

2.1 问题描述

考虑如下多输入多输出(multiple input multiple output, MIMO)非线性系统:

$$\dot{x}_{k,i}(t)=A(\boldsymbol{x}_k)x_{k,i}(t)+F(\boldsymbol{x}_k,t)+U_k(t), \quad (1)$$

其中: $k=1,2,\cdots$ 为迭代次数, $t\in[0,T]$, $T>0$为迭代周期, $\boldsymbol{x}_k=[x_{k,i}\ \ \dot{x}_{k,i}]\in\mathbb{R}^n$为系统状态, $A(\boldsymbol{x}_k)$为系统矩阵, $F(\boldsymbol{x}_k,t)\in\mathbb{R}^n$为不确定干扰和未建模的动态向量, $U_k(t)\in\mathbb{R}^n$为控制输入:

$$U_k(t)=\rho_k(t)u_k(t)+\phi_k(t), \quad (2)$$

其中: $u_k(t)\in\mathbb{R}^n$是迭代控制器给出的控制量,

$$\rho_k(t)=\mathrm{diag}\{\rho_{k,1}(t),\rho_{k,2}(t),\cdots,\rho_{k,n}(t)\}\in\mathbb{R}^{n\times n}$$

是执行器乘性故障, $\phi_k(t)\in\mathbb{R}^n$是执行器加性故障.

注 1 式(2)是执行器故障的一般表达式[27,31]. 乘性故障存在于控制输入通道, 表示不确定增益. 加性故障和乘性故障都随着迭代次数和迭代次数的增加而改变. 当$\phi_k(t)=0$, 且$\rho_k(t)=I_{n\times n}$时, 不存在执行器故障. 当$0<\rho_{k,i}(t)\leqslant 1, i=1,2,\cdots,n$时, 表示执行器失效.

2.2 系统约束

定义第k次迭代的初始参考轨迹为$x_{\mathrm{d}}(t)$, 因此, 每次迭代的系统误差约束如下:

$$\|x_k(t)-x_{\mathrm{d},k}(t)\|\leqslant \varLambda_{\mathrm{b},k}(t),\ t\in[T_1,T], \quad (3)$$

其中: $\|x\|$是x的欧几里德范数, $\varLambda_{\mathrm{b},k}(t)$是预定义的系统误差约束, $T_1>0$是一个任意小的正常数.

注 2 上述误差约束是在有限的时间间隔$[T_1,T]$内给出的, 而不是整个迭代周期$t\in[0,T]$. 每次迭代的初始期望状态可能不同, 初始条件也可能会随着迭代次数而改变. 也就是说, 每次迭代的初始误差不为0. 由于初始误差是随机的, 因此初始误差不包含在误差约束中. 当T_1是一个足够小的常数, 时间间隔$[T_1,T]$可以无限接近$[0,T]$.

当需要限制系统的输出时, 式(3)可写为如下形式:

$$\|x_k(t)\|<\varLambda_{\mathrm{y},k}(t),\ t\in[T_1,T], \quad (4)$$

其中$\varLambda_{\mathrm{y},k}(t)$是预定义的输出约束. 因为

$$\begin{aligned}\|x_k(t)\|=&\|x_k(t)-x_{\mathrm{d},k}(t)+x_{\mathrm{d},k}(t)\|\leqslant\\&\|x_k(t)-x_{\mathrm{d},k}(t)\|+\|x_{\mathrm{d},k}(t)\|,\end{aligned}$$

所以在此设计了一个连续函数$\varLambda_{\mathrm{b},k}(t)$满足

$$0<\varLambda_{\mathrm{b},k}(t)\leqslant\varLambda_{\mathrm{y},k}(t)-\|x_{\mathrm{d},k}(t)\|,$$

则可以得到

$$\begin{aligned}\|x_k(t)\| \leqslant & \|x_k(t)-x_{\mathrm{d},k}(t)\|+\|x_{\mathrm{d},k}(t)\|< \\ & \Lambda_{\mathrm{b},k}(t)+\|x_{\mathrm{d},k}(t)\| \leqslant \\ & \Lambda_{\mathrm{y},k}(t).\end{aligned} \tag{5}$$

注 3　为了保证系统输出轨迹的精确跟踪, 必须保证系统输出约束的范数大于参考轨迹的范数, 这意味着$\Lambda_{\mathrm{y},k}(t)-\|x_{\mathrm{d},k}(t)\|>0$.

本节引入非线性饱和函数, 利用其“小误差放大, 大误差饱和”的特性来处理系统中的误差, 如式(6)所示, 式中$\alpha,\gamma\in(0,1]$, $\beta>1$为设计参数,

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|^{\alpha+1}}{\alpha+1}+\dfrac{(\alpha-1)\gamma^{\alpha}}{2(\alpha)}, & \gamma<|x|<\beta,\\ \dfrac{-\gamma^{\alpha-1}|x|^2}{2}, & |x|\leqslant\gamma,\\ \dfrac{(\alpha-1)\gamma^{\alpha}-2\alpha\beta^{\alpha}}{2\alpha}-\beta^{\alpha}|x|, & |x|\geqslant\beta.\end{cases} \tag{6}$$

将式(6)求导, 可得到

$$f(x)=\begin{cases}|x|^{\alpha}\operatorname{sgn}x, & \gamma<|x|<\beta,\\ -\gamma^{\alpha-1}|x|, & |x|\leqslant\gamma,\\ \beta^{\alpha}\operatorname{sgn}x, & |x|\geqslant\beta.\end{cases} \tag{7}$$

$\operatorname{sgn}x$是标准符号函数. 对于式(6)–(7)中所示的非线性函数, 有以下引理[32]:

引理 1　1) 当$x=0$时, $F(x)=0$, $f(x)=0$, 当$x\neq0$时, $F(x)>0$;

2) $F(x)$连续可微, $f(x)$对于x来说是单调增函数, 且$|f(x)|\leqslant\beta^{\alpha}$;

3) 对$x\neq0$, 存在正常数$\kappa>0$, 使得下式成立:

$$F(x)\geqslant\kappa f^2(x)>0; \tag{8}$$

4) 对$x\neq0$, 存在正常数$\kappa_1>0$, 使得下式成立:

$$xf(x)\geqslant\kappa_1 f^2(x)>0. \tag{9}$$

2.3　参考轨迹自修正策略

在每个迭代周期内, 重复运动系统的参考轨迹$x_{\mathrm{d},k}(t)$会随着时间t, 迭代次数k和初始状态$x_{\mathrm{d},k}(0)$的改变而变化. 显然, 这很难保证初始误差: $x_k(0)-x_{\mathrm{d},k}(0)$在整个迭代周期$[0,T]$内都是一样的.

所以, 本节设计考轨迹自修正策略如下:

$$\begin{aligned}\hat{x}_{\mathrm{d},k}(t)= & x_{\mathrm{d},k}(t)-\Delta_1(t)[x_{\mathrm{d},k}(0)-x_k(0)]- \\ & \Delta_2(t)[\dot{x}_{\mathrm{d},k}(0)-\dot{x}_k(0)].\end{aligned} \tag{10}$$

Δ_1为时变函数, 并满足如下条件: 1) $\Delta_1(0)=1$, $\Delta_1(T_1)=0$, 在$t\in[T_1,T]$时, $\Delta_1(t)=0$; 2) $\dot{\Delta}_1(t)$和$\ddot{\Delta}_1(0)$有界; 3) $\dot{\Delta}_1(0)=0$, $\dot{\Delta}_1(T_1)=0$, $t\in[T_1,T]$时, $\dot{\Delta}_1(t)=0$; 4) $\ddot{\Delta}_1(T_1)=0$, $t\in[T_1,T]$时, $\ddot{\Delta}_1(t)=0$;

Δ_2为时变函数, 并满足如下条件: 1) $\Delta_2(0)=0$, $\Delta_2(T_1)=0$, 在$t\in[T_1,T]$时, $\Delta_2(t)=0$; 2) $\dot{\Delta}_2(t)$和$\ddot{\Delta}_2(0)$有界; 3) $\dot{\Delta}_2(0)=1$, $\dot{\Delta}_2(T_1)=0$, $t\in[T_1,T]$时, $\dot{\Delta}_2(t)=0$; 4) $\ddot{\Delta}_2(T_1)=0$, $t\in[T_1,T]$时, $\ddot{\Delta}_2(t)=0$.

Δ_1和Δ_2可以取如下形式:

$$\Delta_1(t)=\begin{cases}\cos^3(\dfrac{\pi t}{2T_1}), & t\in[0,T_1),\\ 0, & t\in[T_1,T],\end{cases} \tag{11}$$

$$\Delta_2(t)=\begin{cases}t\cos^3(\dfrac{\pi t}{2T_1}), & t\in[0,T_1),\\ 0, & t\in[T_1,T].\end{cases} \tag{12}$$

显然, $t\in[T_1,T]$时, $\hat{x}_{\mathrm{d},k}(0)=x_k(0)$, $\hat{x}_{\mathrm{d},k}(t)=x_{\mathrm{d},k}(t)$. 所以, 在整个时间区间$[0,T]$中, 控制器的设计目标是使系统跟踪修正后的参考轨迹$\hat{x}_{\mathrm{d},k}(t)$.

3　双迭代优化学习控制策略

在设计迭代学习控制器之前, 首先定义轨迹跟踪误差为$e_k=x_k-\hat{x}_{\mathrm{d},k}$, 其中$x_k$为实际运动轨迹, $\hat{x}_{\mathrm{d},k}$为修正后的参考轨迹, 并提出了以下假设和引理:

假设 1　式(2)中的执行器乘性故障可写为如下形式:

$$\rho_k(t)=\operatorname{diag}\{\rho_{k,1}(t),\rho_{k,2}(t),\cdots,\rho_{k,n}(t)\},$$

满足$\rho_{k,i}(t)\geqslant\rho_0>0$, $i=1,2,\cdots,n$, 其中ρ_0是一个未知的正数. 定义$\mu_0=\dfrac{1}{\rho_0}$也是一个未知正数.

假设 2　式(1)–(2)中的未建模动态和执行器加性故障有界, 即$\mu_0\|F(q_k,\dot{q}_k,t)+\phi_k(t)\|\leqslant d$, 其中$d$为未知正常数.

假设 3　假设存在已知参数ψ、未知参数$\theta(t)$和已知的回归矩阵$\xi(\psi,\boldsymbol{x})$, 使得下面等式成立:

$$A(\boldsymbol{x})\psi=\xi(\psi,\boldsymbol{x})\theta(t). \tag{13}$$

时变函数满足$\mu_0\|\theta(t)\|\leqslant\varphi$, 其中$\varphi\in\mathbb{R}$为未知常数.

引理 2　对于任意$\delta>0$和$\eta\in\mathbb{R}^n$, 非线性饱和函数(6)–(7)满足如下不等式:

$$|\eta|-\eta f(\frac{\eta}{\delta})<2\beta\delta, \tag{14}$$

其中$\beta>1$.

引理 3　定义收敛序列$\lambda_k=\dfrac{\omega}{k^l}$, 其中: $\omega>0$, $l\geqslant2$为设计参数, 则有

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\leqslant2\omega. \tag{15}$$

为了简化符号, 在没有混淆的情况下, 在后文的公式中将省略系统的时间t.

3.1　控制策略设计

本节所设计的双迭代控制器由两层迭代控制器组成, 根据迭代误差设计第1层迭代控制器v_k, 将其定义为$v_k=[v_{k,1}\ \ v_{k,2}\ \ \cdots\ \ v_{k,n}]^{\mathrm{T}}$, 第2层迭代控制器$u_k$

由本次迭代误差和上一次迭代的v_{k-1}组成, 即式(2)中的控制量u_k, 将其定义为$u_k=[u_{k,1}\ \ u_{k,2}\ \ \cdots\ \ u_{k,n}]^{\mathrm T}$. 具体表达式如下:

$$u_{k,j}=v_{k-1,j}+K(r_{k-1,j}-hu_{k-1,j}),\tag{16}$$

$$v_{k,j}=-K_1\dot e_{k,j}-K_2\|e_k\|f^2(\frac{\|e_k\|\dot e_{k,j}}{\lambda_k})-\hat\phi_k\|\xi_k\|f(\frac{\hat\phi_k\|\xi_k\|e_{k,j}}{\lambda_k})-\hat d_kf(\frac{\hat d_ke_{k,j}}{\lambda_k}),\tag{17}$$

其中: $j=1,2,\cdots,n$, $\xi_k\triangleq\xi(\psi,\boldsymbol x_k)$, K,K_1,K_2为控制增益, $K_1>0$, h为设计参数, $\hat\varphi_k$和$\hat d_k$分别为φ和d的估计值, 迭代学习律如下:

$$r_{k,j}=r_{k-1,j}+qe_{k,j},\ r_0=0,\tag{18}$$

$$\hat\varphi_k=\hat\varphi_{k-1}+p_\varphi(\sum_{j=1}^n|e_{k,j}|)\|\xi_k\|,\ \hat\varphi_0=0,\tag{19}$$

$$\hat d_k=\hat d_{k-1}+p_{\mathrm d}(\sum_{j=1}^n|e_{k,j}|),\ \hat d_0=0,\tag{20}$$

其中q,p_φ和$p_{\mathrm d}$为大于零的设计参数, 所以$\hat\varphi_k$和$\hat d_k$始终大于0.

式(16)中采用h算子来表示第1层迭代控制器和第2层迭代控制器之间的映射关系. 由于非参数不确定性的存在, 使用式$r_k(t)$来表示第1层迭代控制器产生的虚拟参考信号, 该序列由学习律(18)给出.

注 4 为了进一步阐述第2层迭代控制律是如何工作的, 考虑一个特殊情况: 虚拟参考信号$r_k(t),\forall t\in[0,T]$在迭代域内没有变化, 即算子h是静态的. 在这种情况下, 对于任意时刻t, 第2层迭代控制律由式(16)给出.

假设 4 对于迭代控制律(16), 令$\varPhi_k(t)=r_k(t)-hu_k(t)$, 算子$h$已知, $r_k(t)$为任意连续函数, 对于任意实数对$(\varPhi,\upsilon)$, 存在一个正整数$N_2=N_2(\varPhi,\upsilon)$在$t\in[0,T]$内满足

$$|\varPhi_1(t)|\leqslant\varPhi\Rightarrow|\varPhi_k(t)|\leqslant\upsilon,\ \forall k\geqslant N_2,\tag{21}$$

其中k为迭代次数.

注 5 假设4表明, 在$t\in[0,T]$内, $\varPhi_k(t)$在N_2次迭代中收敛到零的υ邻域. 此外, N_2的选择不依赖于时间t.

3.2 收敛性分析

定理 1 对于式(17)所控制的重复运动系统(1), 应用迭代学习律(19)–(20), 在假设1–3的条件下, 可以保证系统的轨迹跟踪误差在时间间隔$[T_1,T]$上是收敛的, 即$\lim\limits_{k\to\infty}(x_k-x_{\mathrm d,k})=0$.

证 首先定义Barrier复合能量函数如下:

$$E_k(t)=\sum_{i=1}^2W_{i,k}(t)+W_{\mathrm d,k}(t)+W_{\varphi,k}(t),\tag{22}$$

其中:

$$W_{1,k}(t)=\varLambda^2_{\mathrm b,k}(t)f^2(\frac{e_k^{\mathrm T}e_k}{2\varLambda^2_{\mathrm b,k}(t)}),\ W_{2,k}(t)=\frac12e_k^{\mathrm T}e_k,$$

$$W_{\mathrm d,k}(t)=\frac{\rho_0}{2p_{\mathrm d}}\int_0^T\tilde d_k^2\mathrm d\tau,\ W_{\varphi,k}(t)=\frac{\rho_0}{2p_\varphi}\int_0^T\tilde\varphi_k^2\mathrm d\tau,$$

其中: $\tilde d_k=\hat d_k-d$, $\tilde\varphi_k=\hat\varphi_k-\varphi$.

1) Barrier复合能函数的有界性分析.

本小节的目的是证明在时间间隔$[0,T]$内, 能量函数$E_k(t)$的有界性. 首先分析$E_k(t)$的单调性, 由式(22)可知

$$\Delta E_k(t)=\sum_{i=1}^2\Delta W_{i,k}(t)+\Delta W_{\mathrm d,k}(t)+\Delta W_{\varphi,k}(t).$$

下面分别讨论上式中的各项:

$$\Delta W_{1,k}(t)=\varLambda^2_{\mathrm b,k}(t)f^2(\frac{e_k^{\mathrm T}e_k}{2\varLambda^2_{\mathrm b,k}(t)})-\varLambda^2_{\mathrm b,k-1}(t)f^2(\frac{e_{k-1}^{\mathrm T}e_{k-1}}{2\varLambda^2_{\mathrm b,k-1}(t)}).\tag{23}$$

由引理1, 可以得到

$$\begin{aligned}\Delta W_{1,k}(t)=&\varLambda^2_{\mathrm b,k}(0)f^2(\frac{e_k^{\mathrm T}(0)e_k(0)}{2\varLambda^2_{\mathrm b,k}(0)})-\\&\varLambda^2_{\mathrm b,k-1}(t)f^2(\frac{e_{k-1}^{\mathrm T}e_{k-1}}{2\varLambda^2_{\mathrm b,k-1}(t)})+\\&2\int_0^T[\varLambda_{\mathrm b,k}\dot\varLambda_{\mathrm b,k}f^2(\frac{e_k^{\mathrm T}e_k}{2\varLambda^2_{\mathrm b,k}(t)})]\mathrm d\tau+\\&2\int_0^T[\varLambda^2_{\mathrm b,k}(t)f(\frac{e_k^{\mathrm T}e_k}{2\varLambda^2_{\mathrm b,k}(t)})]\mathrm d\tau<\\&2\int_0^T[\frac{\varLambda_{\mathrm b,k}\dot\varLambda_{\mathrm b,k}}{\kappa}F(\frac{e_k^{\mathrm T}e_k}{2\varLambda^2_{\mathrm b,k}(t)})]\mathrm d\tau+\\&2\int_0^T[\varLambda^2_{\mathrm b,k}(t)\beta^\alpha]\mathrm d\tau-\\&\varLambda^2_{\mathrm b,k-1}(t)f^2(\frac{e_{k-1}^{\mathrm T}e_{k-1}}{2\varLambda^2_{\mathrm b,k-1}(t)}).\end{aligned}\tag{24}$$

同理可得

$$\Delta W_{2,k}(t)=\frac12e_k^{\mathrm T}(0)e_k(0)-\frac12e_{k-1}^{\mathrm T}e_{k-1}+\int_0^T(e_k^{\mathrm T}\dot e_k)\mathrm d\tau.\tag{25}$$

由式(10)可知, 当$\varDelta_1(0)=1$, $\varDelta_2(0)=0$时, 所以有$\hat x_{\mathrm d,k}(0)=x_{\mathrm d,k}(0)-[x_{\mathrm d,k}(0)-x_k(0)]=x_k(0)$. 进而有$e_k(0)=x_k(0)-\hat x_{\mathrm d,k}(0)=0$.

结合式(1)(13)和式(25)可得

$$\Delta W_{2,k}(t)=\int_0^T(e_k^{\mathrm T}\rho_kv_k+e_k^{\mathrm T}\xi(\psi,\boldsymbol x_k)\theta)\mathrm d\tau+\int_0^T[e_k^{\mathrm T}(F(\boldsymbol x_k,t)+\phi_k)]\mathrm d\tau-\frac12e_{k-1}^{\mathrm T}e_{k-1}.\tag{26}$$

令$\xi_k\triangleq\xi(\psi,\boldsymbol x_k)$, $F_k\triangleq F(\boldsymbol x_k,t)$, 则

$$-e_k^{\mathrm T}\xi_k\theta\leqslant\|e_k\|\varphi\|\xi_k\|\rho_0\leqslant(\sum_{j=1}^n|e_{k,j}|)\varphi\|\xi_k\|\rho_0=-(\sum_{j=1}^n|e_{k,j}|)(\tilde\varphi_k-\hat\varphi_k)\|\xi_k\|\rho_0,$$

$$e_k^{\mathrm{T}}(F_k+\phi_k)\leqslant(\sum_{j=1}^{n}|e_{k,j}|)(\tilde{d}+\hat{d})\rho_0.$$

因此, 式(26)可以写为

$$\begin{aligned}\Delta W_{2,k}(t)\leqslant&\int_0^T((\sum_{j=1}^{n}|e_{k,j}|)\hat{\phi}\|\xi_k\|\rho_0)\mathrm{d}\tau+\\&\int_0^T(\sum_{j=1}^{n}(e_{k,j}\rho_{k,j}v_{k,j}))\mathrm{d}\tau-\\&\int_0^T(\tilde{\phi}\|\xi_k\|\rho_0\sum_{j=1}^{n}|e_{k,j}|)\mathrm{d}\tau-\\&\int_0^T((\sum_{j=1}^{n}|e_{k,j}|)(\tilde{d}+\hat{d})\rho_0)\mathrm{d}\tau-\\&\frac{1}{2}e_{k-1}^{\mathrm{T}}e_{k-1}.\end{aligned}\tag{27}$$

将控制律(17)代入式(27):

$$\begin{aligned}\Delta W_{2,k}(t)\leqslant&\int_0^t(-\sum_{j=1}^{5}\rho_0K_1\dot{e}_{k,j}^2)\mathrm{d}\tau-\\&\int_0^t((\sum_{j=1}^{5}|e_{k,j}|)\tilde{\phi}\|\xi_k\|\rho_0)\mathrm{d}\tau-\\&\rho_0\int_0^t(K_2\|e_k\|f^2(\frac{\|e_k\|\dot{e}_{k,j}}{\lambda_k}))\mathrm{d}\tau-\\&\rho_0\int_0^t(|e_{k,j}|\tilde{d}_k)\mathrm{d}\tau-\frac{1}{2}e_{k-1}^{\mathrm{T}}e_{k-1}+\\&2\omega T\beta\lambda_k\rho_0.\end{aligned}\tag{28}$$

对于$\Delta W_{\mathrm{d},k}(t)$和$\Delta W_{\varphi,k}(t)$, 分析可得

$$\begin{aligned}\Delta W_{\mathrm{d},k}(t)=&\frac{\rho_0}{2p_{\mathrm{d}}}\int_0^T(\tilde{d}_k^2-\tilde{d}_{k-1}^2)\mathrm{d}\tau\leqslant\\&\int_0^T\rho_0(\sum_{j=1}^{n}|\dot{e}_{k,j}|)\tilde{d}_k\mathrm{d}\tau,\end{aligned}\tag{29}$$

$$\begin{aligned}\Delta W_{\phi,k}(t)=&\frac{\rho_0}{2p_{\phi}}\int_0^T(\tilde{\phi}_k^2-\tilde{\phi}_{k-1}^2)\mathrm{d}\tau\leqslant\\&\int_0^T\rho_0(\sum_{j=1}^{n}|\dot{e}_{k,j}|)\tilde{\phi}_k\|\xi_k\|\mathrm{d}\tau.\end{aligned}\tag{30}$$

结合式(24)(28)–(30), 可以得到

$$\begin{aligned}\Delta E_k\leqslant&2\int_0^T\frac{\Lambda_{\mathrm{b},k}\dot{\Lambda}_{\mathrm{b},k}}{\kappa}F(\frac{e_k^{\mathrm{T}}e_k}{2\Lambda_{\mathrm{b},k}^2(t)})\mathrm{d}\tau-\\&\rho_0\int_0^T(K_2\dot{e}_{k,j}\|e_k\|f^2(\frac{\|e_k\|\dot{e}_{k,j}}{\lambda_k}))\mathrm{d}\tau-\\&\Lambda_{\mathrm{b},k-1}^2(t)f^2(\frac{e_{k-1}^{\mathrm{T}}e_{k-1}}{2\Lambda_{\mathrm{b},k-1}^2(t)})-\\&\int_0^T(\sum_{j=1}^{n}\rho_0K_1\dot{e}_{k,j}^2)\mathrm{d}\tau+\\&2\int_0^T\Lambda_{\mathrm{b},k}^2(t)\beta^{\alpha}\mathrm{d}\tau-\\&\frac{1}{2}e_{k-1}^{\mathrm{T}}e_{k-1}+2\omega T\beta\lambda_k\rho_0.\end{aligned}\tag{31}$$

至此可得E_k满足以下不等式:

$$\begin{aligned}E_k(t)\leqslant&E_1(t)+2\sum_{h=2}^{k}\int_0^T[\Lambda_{\mathrm{b},h}^2(t)\beta^{\alpha}]\mathrm{d}\tau+\\&2\sum_{h=2}^{k}\int_0^T[\frac{\Lambda_{\mathrm{b},h}\dot{\Lambda}_{\mathrm{b},h}}{\kappa}F(\frac{e_h^{\mathrm{T}}e_h}{2\Lambda_{\mathrm{b},h}^2(t)})]\mathrm{d}\tau-\\&\sum_{h=2}^{k}\Lambda_{\mathrm{b},h-1}^2(t)f^2(\frac{e_{h-1}^{\mathrm{T}}e_{h-1}}{2\Lambda_{\mathrm{b},h-1}^2(t)})-\\&\sum_{h=2}^{k}\int_0^T(\sum_{j=1}^{n}\rho_0K_1\dot{e}_{h,j}^2)\mathrm{d}\tau-\\&\rho_0\sum_{h=2}^{k}\int_0^T(K_2\|e_h\|f^2(\frac{\|e_h\|\dot{e}_{h,j}}{\lambda_h}))\mathrm{d}\tau-\\&\sum_{h=2}^{k}\frac{1}{2}e_{h-1}^{\mathrm{T}}e_{h-1}+\sum_{h=2}^{k}2\omega T\beta\lambda_h\rho_0.\end{aligned}\tag{32}$$

由引理3, 可知$\sum_{h=2}^{k}2\omega T\beta\lambda_k\rho_0$有界, 所以只要证明$E_1(t)$的有界性, 就可以证明$E_k(t)$的有界性. 下面将对$\dot{E}_1(t)$进行分析:

$$\dot{E}_1(t)=\sum_{i=1}^{2}\dot{W}_{i,k}(t)+\dot{W}_{\mathrm{d},k}(t)+\dot{W}_{\varphi,k}(t).\tag{33}$$

与式(24)(28)–(30)类似, 可知

$$\dot{E}_1(t)\leqslant2\omega\beta\lambda_1+\frac{d^2\rho_0}{2p_{\mathrm{d}}}+\frac{\varphi^2\rho_0}{2p_{\varphi}}<\infty.\tag{34}$$

所以, $E_1(t)=E_1(0)+\int_0^t\dot{E}_1\mathrm{d}\tau$在时间间隔$[0,T]$内是有界的, 进而可证明$E_k(t)$在时间间隔$[0,T]$内也是有界的.

2) 跟踪误差收敛性分析.

当$k\to\infty$时, 对式(32)求极限:

$$\begin{aligned}&\lim_{k\to\infty}E_k(t)\leqslant\\&E_1(t)2\lim_{k\to\infty}\sum_{h=2}^{k}\int_0^T[\Lambda_{\mathrm{b},h}^2(t)\beta^{\alpha}]\mathrm{d}\tau-\\&2\lim_{k\to\infty}\sum_{h=2}^{k}\int_0^T[\frac{\Lambda_{\mathrm{b},h}\dot{\Lambda}_{\mathrm{b},h}}{\kappa}F(\frac{e_h^{\mathrm{T}}e_h}{2\Lambda_{\mathrm{b},h}^2(t)})]\mathrm{d}\tau-\\&\lim_{k\to\infty}\sum_{h=2}^{k}\Lambda_{\mathrm{b},h-1}^2(t)f^2(\frac{e_{h-1}^{\mathrm{T}}e_{h-1}}{2\Lambda_{\mathrm{b},h-1}^2(t)})-\\&\lim_{k\to\infty}\sum_{h=2}^{k}\int_0^T(\sum_{j=1}^{5}\rho_0K_1\dot{e}_{h,j}^2)\mathrm{d}\tau-\\&\rho_0\lim_{k\to\infty}\sum_{h=2}^{k}\int_0^T(K_2\|e_h\|f^2(\frac{\|e_h\|\dot{e}_{h,j}}{\lambda_h}))\mathrm{d}\tau-\\&\lim_{k\to\infty}\sum_{h=2}^{k}\frac{1}{2}e_{h-1}^{\mathrm{T}}e_{h-1}+\lim_{k\to\infty}\sum_{h=2}^{k}2\omega T\beta\lambda_k\rho_0.\end{aligned}$$

因为$E_k(t)$大于0, $E_1(t)$和$\lim_{k\to\infty}\sum_{h=2}^{k}2\omega T\beta\lambda_k\rho_0$有界. 所以可得到

$$\begin{aligned}&\lim_{k\to\infty}\sum_{h=2}^{k}\Lambda_{\mathrm{b},h-1}^2(t)f^2(\frac{e_{h-1}^{\mathrm{T}}e_{h-1}}{2\Lambda_{\mathrm{b},h-1}^2(t)})+\\&\lim_{k\to\infty}\sum_{h=2}^{k}\frac{1}{2}e_{h-1}^{\mathrm{T}}e_{h-1}\to0.\end{aligned}\tag{35}$$

因此可推导出在$[0,T]$上, $\lim\limits_{k\to\infty} e_k \to 0$, 因为$e_k = x_k - \hat{x}_{\mathrm{d},k}$, 且在时间间隔$[T_1,T]$上, $\hat{x}_{\mathrm{d},k} = x_{\mathrm{d},k}$, 所以在时间间隔$[T_1,T]$上, $\lim\limits_{k\to\infty}(x_k - x_{\mathrm{d},k}) \to 0$, 跟踪误差的收敛性证明结束.

下面探讨第2层迭代控制律u_k的一致收敛性. 一方面, 由于第1层迭代控制律的收敛条件较弱, 因此要求第2层迭代控制律具有较强的收敛性. 另一方面, 一旦两层迭代控制律都收敛, 就可以确保整个系统的一致收敛性.

定理 2 对于式(16)–(17)所控制的重复运动系统(1), 应用迭代学习律(18)–(20), 在假设4的条件下, 可以保证跟踪误差半全局收敛. 即$|e_k(t)| \leqslant \upsilon$,

$$|\varPhi_0(t)| = |r_0(t) - hv_0(t)| \leqslant \varPhi,\ t \in [0,T]. \tag{36}$$

证 首先定义一个时间加权复合能量函数如下:

$$E_k(t) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-at}e_k^2(t) + \frac{1}{2q}\int_0^t \mathrm{e}^{-a\tau}(u_\mathrm{d} - u_k)^2\mathrm{d}\tau,$$

其中$a > 2L_\eta + 2q$为一个有界大于零的常数, u_d为期望控制量, L_η为Lipschitz常数.

$$\begin{aligned}\Delta E_k(t) = &\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-at}e_k^2(t) - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-at}e_{k-1}^2(t) + \\ &\frac{1}{2q}\int_0^t \mathrm{e}^{-a\tau}(u_\mathrm{d} - u_k)^2\mathrm{d}\tau - \\ &\frac{1}{2q}\int_0^t \mathrm{e}^{-a\tau}(u_\mathrm{d} - u_{k-1})^2\mathrm{d}\tau \leqslant \\ &-\frac{a - 2L_\eta - 2q}{2}\int_0^t \mathrm{e}^{-a\tau}e_k^2(\tau)\mathrm{d}\tau - \\ &\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-at}e_{k-1}^2(t) \leqslant \\ &-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-at}e_{k-1}^2(t).\end{aligned} \tag{37}$$

根据假设4可知$r_k(t)$有界, 应用Barbalat引理[33], 可以得出当$k \to \infty$时, 误差一致收敛于0. 这表明当$k \to \infty$时, 序列$\{\delta_k := u_\mathrm{d} - r_k\}_{k\in\mathbb{N}}$一致收敛于0.

利用文献 [34]的定理1, 存在光滑Lyapunov函数$V(\cdot)$, 使得下面条件成立:

$$\alpha_1(|\delta_k|) \leqslant V(\delta_k) \leqslant \alpha_2(|\delta_k|), \tag{38}$$

$$\begin{aligned}V(\delta_{k+1}) - V(\delta_k) := V(\delta_k - qe_{k+1}) - V(\delta_k) \leqslant \\ -\alpha_3(|\delta_k|),\end{aligned} \tag{39}$$

$$|V(\delta_1) - V(\delta_2)| \leqslant L_\mathrm{v}|\delta_1 - \delta_2|,\ \forall \delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}, \tag{40}$$

其中: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$为连续函数, L_v是一个大于零的常数. 因为序列$\{\delta_k := u_\mathrm{d} - r_k\}_{k\in\mathbb{N}}$在$[0,T]$内一致收敛于0, 所以Lyapunov函数$V(\cdot)$与时间$t$无关. 遵循文献[34]中引理3.5, 存在$\beta \in \mathbb{R}$使得$|\delta_k| \leqslant \beta|\delta_0|$, 应用Gronwall-Bellman不等式, 可得近似误差e'_k满足$|e'_k| \leqslant l|\delta_k| \leqslant l\beta|\delta_0|$, 其中$l = \dfrac{\mathrm{e}^{TL_\eta} - 1}{L_\eta}$.

根据假设4, 对于任意的正数对$(\varPhi_1, \upsilon_1)$, 存在正整数$N_2 = N_2(\varPhi_1, \upsilon_1)$, 满足如下不等式: $|u_{k-1} - r_{k-1}| \leqslant \varPhi_1$和$|u_k - r_{k-1}| \leqslant \upsilon_1$.

进而可得$|e_k - e'_k| \leqslant l\upsilon_1$, 由式(18)可得

$$|e_k| \leqslant l\upsilon_1 + l[\beta(\|u_\mathrm{d} - r_0\| + q\|e_0\|)]. \tag{41}$$

对于任意的正数对$(\varPhi, \upsilon)$, 必然存在另一个正数υ_1满足

$$l\upsilon_1 < \frac{\upsilon}{2},\ \beta(\|u_\mathrm{d} - r_0\| + q\|e_0\|) \leqslant \frac{\upsilon}{2l},\ \forall k \geqslant N_1,$$

所以, 由式(41)可知当迭代次数k多于N_1N_2时, 有$|e_k| \leqslant \upsilon$, 至此定理2得证. 证毕.

注 6 以上结果表明, 在双迭代学习控制中, 在有限迭代N_1N_2内, 系统输出x_k可以收敛于期望轨迹$x_{\mathrm{d},k}$的υ领域内. 由于N_1和N_2的选择不依赖于时间t, 所以整个系统的收敛性是一致的.

定理2虽然提供了双迭代控制器的一致收敛条件, 但由于第1层迭代控制器必须等到第2层迭代控制律收敛于期望轨迹$x_{\mathrm{d},k}$的υ领域内, 才能进行下一次迭代. 为了得到更快的收敛速度, 即同时更新两层迭代控制律, 提出下面的假设条件.

假设 5 对于迭代控制律(16), 令$\varPhi_k(t) = r_k(t) - hu_k(t)$, 算子$h$未知, 存在另一个$\tilde{\varPhi}_i(t)$使得下列不等式成立$|\varPhi_k(t)| \leqslant |\tilde{\varPhi}_k(t)|$,

$$|\varPhi_k(t)| \leqslant \varepsilon|\tilde{\varPhi}_{k-1}(t)|,\ \forall t \in [0,T],\ k \in \mathbb{N}, \tag{42}$$

其中: $\varepsilon \in (0,1)$, k为迭代次数.

注 7 虽然假设5的条件非常严格, 但可以使整个系统有更好的性能, 即两个迭代循环可以同时更新. 还可以提高收敛速度, 进而简化收敛性分析.

定理 3 对于式(16)–(17)所控制的重复运动系统(1), 应用迭代学习律(18)–(20), 在假设4的条件下, 轨迹跟踪误差在时间间隔$[T_1,T]$上是收敛的, 即

$$\lim_{k\to\infty}(x_k - x_{\mathrm{d},k}) = 0.$$

证 首先构造能量函数如下:

$$\begin{aligned}E_k(t) = &\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-at}e_k^2(t) + \frac{1}{2q}\int_0^t \mathrm{e}^{-a\tau}(u_\mathrm{d} - u_k)^2\mathrm{d}\tau + \\ &\frac{1}{2q}\int_0^t \mathrm{e}^{-a\tau}(\tilde{\varPhi}_k)^2\mathrm{d}\tau.\end{aligned} \tag{43}$$

令

$$V_{1,k}(t) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-at}e_k^2(t),$$

$$V_{2,k}(t) = \frac{1}{2q}\int_0^t \mathrm{e}^{-a\tau}(u_\mathrm{d} - u_k)^2\mathrm{d}\tau,$$

$$V_{3,k}(t) = \frac{1}{2q}\int_0^t \mathrm{e}^{-a\tau}(\tilde{\varPhi}_k)^2\mathrm{d}\tau,$$

其中: $a > 2L_\eta + 2q + \dfrac{4q\varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2}$为一个有界大于零的

常数, $u_{\rm d}$为期望控制量, L_η为Lipschitz常数.

首先探讨$E_k(t)$的单调性, 由式(43)可以得到

$$\Delta E_k(t)=E_k(t)-E_{k-1}(t)=\\ \Delta V_{1,k}(t)+\Delta V_{2,k}(t)+\Delta V_{3,k}(t). \quad (44)$$

下面分别讨论式(44)中的各项:

$$\Delta V_{1,k}(t)=\frac{1}{2}{\rm e}^{-at}e_k^2(t)-\frac{1}{2}{\rm e}^{-at}e_{k-1}^2(t)\leqslant\\ -\frac{a-2L_\eta-2q}{2}\int_0^t{\rm e}^{-a\tau}e_k^2(\tau){\rm d}\tau+\\ \int_0^t{\rm e}^{-a\tau}(u_{\rm d}-u_k){\rm d}\tau-\frac{1}{2}{\rm e}^{-at}e_{k-1}^2(t)+\\ \int_0^t{\rm e}^{-a\tau}|e_k(\tau)|\cdot|\tilde{\varPhi}_k|{\rm d}\tau, \quad (45)$$

$$\Delta V_{2,k}(t)=\frac{1}{2q}\int_0^t{\rm e}^{-a\tau}(u_{\rm d}-u_k)^2{\rm d}\tau-\\ \frac{1}{2q}\int_0^t{\rm e}^{-a\tau}(u_{\rm d}-u_{k-1})^2{\rm d}\tau=\\ \int_0^t{\rm e}^{-a\tau}e_k(\tau)(u_{\rm d}-u_k){\rm d}\tau-\\ \frac{q}{2}\int_0^t{\rm e}^{-a\tau}e_k^2(\tau){\rm d}\tau. \quad (46)$$

由假设5, 可得$(\tilde{\varPhi}_{k-1}^{r_{k-1}})^2\geqslant\frac{1}{\varepsilon^2}(\tilde{\varPhi}_k^{r_{k-1}})^2$, 其中

$$\tilde{\varPhi}_{k-1}^{r_{k-1}}=r_{k-1}-hu_{k-1},\ \tilde{\varPhi}_k^{r_{k-1}}=r_{k-1}-hu_k,$$

因此,

$$(\tilde{\varPhi}_k^{r_k})^2-(\tilde{\varPhi}_{k-1}^{r_{k-1}})^2=\\ (r_k-r_{k-1}+\tilde{\varPhi}_k^{r_{k-1}})^2-(\tilde{\varPhi}_{k-1}^{r_{k-1}})^2\leqslant\\ q^2e_k^2+2q|e_k|\cdot|\tilde{\varPhi}_k^{r_{k-1}}|-\frac{1-\varepsilon^2}{\varepsilon^2}(\tilde{\varPhi}_k^{r_{k-1}})^2, \quad (47)$$

进而,

$$\Delta V_{3,k}(t)=\frac{1}{2q}\int_0^t{\rm e}^{-a\tau}[(\tilde{\varPhi}_k^{r_k})^2-(\tilde{\varPhi}_{k-1}^{r_{k-1}})^2]{\rm d}\tau\leqslant\\ \int_0^t{\rm e}^{-a\tau}|e_k(\tau)|\cdot|\tilde{\varPhi}_k^{r_{k-1}}|{\rm d}\tau+\\ \frac{q}{2}\int_0^t{\rm e}^{-a\tau}e_k^2(\tau){\rm d}\tau-\\ \frac{1}{2q}\int_0^t{\rm e}^{-a\tau}\frac{1-\varepsilon^2}{\varepsilon^2}(\tilde{\varPhi}_k^{r_{k-1}})^2{\rm d}\tau. \quad (48)$$

将式(45)–(46)和式(48)代入式(44)可得

$$\Delta E_k(t)\leqslant-\frac{a-2L_\eta-2q}{2}\int_0^t{\rm e}^{-a\tau}e_k^2(\tau){\rm d}\tau-\\ \frac{1}{2q}\int_0^t{\rm e}^{-a\tau}\frac{1-\varepsilon^2}{\varepsilon^2}(\tilde{\varPhi}_k^{r_{k-1}})^2{\rm d}\tau-\\ \frac{1}{2}{\rm e}^{-a\tau}e_{k-1}^2(t)+\\ 2\int_0^t{\rm e}^{-a\tau}|e_k(\tau)|\cdot|\tilde{\varPhi}_k^{r_{k-1}}|{\rm d}\tau. \quad (49)$$

因为

$$2|e_k(\tau)|\cdot|\tilde{\varPhi}_k^{v_{k-1}}|=\\ 2\frac{\sqrt{2q}}{\sqrt{\frac{1-\varepsilon^2}{\varepsilon^2}}}|e_k(\tau)|\sqrt{\frac{1-\varepsilon^2}{\varepsilon^2}}\sqrt{\frac{1}{2q}}|\tilde{\varPhi}_k^{r_{k-1}}|\leqslant\\ \frac{2q\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}e_k^2(\tau)+\frac{1-\varepsilon^2}{\varepsilon^2}\frac{1}{2q}(\tilde{\varPhi}_k^{r_{k-1}})^2, \quad (50)$$

所以可得到

$$\Delta E_k(t)\leqslant-(\frac{a-2L_\eta-2q}{2}-\frac{2q\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2})\times\\ \int_0^t{\rm e}^{-a\tau}e_k^2(\tau){\rm d}\tau-\frac{1}{2}{\rm e}^{-a\tau}e_{k-1}^2(t). \quad (51)$$

因为$a>2L_\eta+2q+\frac{4q\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}$, 所以

$$\Delta E_k(t)\leqslant-\int_0^t{\rm e}^{-a\tau}e_k^2(\tau){\rm d}\tau-\frac{1}{2}{\rm e}^{-a\tau}e_{k-1}^2(t)\leqslant 0.$$

这说明了$E_k(t)$为随时间变化的非增函数. 应用Barbalat引理, 由式(51)可以推导出

$$E_k(t)\leqslant E_1(t)-\sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{2}{\rm e}^{-at}e_k^2(t), \quad (52)$$

其中$E_k(t)$大于零, 已知$E_k(t)$有界, 所以可以得到当$k\to\infty$时, $e_k(t)\to 0$, 即$\lim\limits_{i\to\infty}e_k(t)=0$. 证毕.

4 仿真验证

以二自由度机械臂为例, 来验证本文所设计的双迭代优化控制器在实际系统应用中的有效性. 已知二自由度机械臂一般动力学模型可描述为如下形式:

$$M(q_k)\ddot{q}_k+C(q_k,\dot{q}_k)\dot{q}_k+G(q_k)+F(q_k,\dot{q}_k,t)=U_k, \quad (53)$$

其中: $k=1,2,\cdots$为迭代次数, $q_k,\dot{q}_k,\ddot{q}_k\in\mathbb{R}^n$为关节的位置、速度和加速度, $t\in[0,T], T>0$为迭代周期, $M(q_k)\in\mathbb{R}^{n\times n}$为对称正定惯性矩阵, $C(q_k,\dot{q}_k)\in\mathbb{R}^{n\times n}$为哥氏力和离心力矩阵, $G(q_k)\in\mathbb{R}^n$为重力矩阵, $F(q_k,\dot{q}_k,t)\in\mathbb{R}^n$为不确定干扰和未建模动态, $U_k\in\mathbb{R}^n$为包含执行器故障的控制输入. 定义$x_{k,1}=q_k$, $x_{k,2}=\dot{q}_k$, 则式(53)可用如下状态空间方程来表示:

$$\begin{cases}\dot{x}_{k,2}=M^{-1}[U_k-C(x_{k,1},x_{k,2})x_{k,1}-\\ \quad G(x_{k,1})-F(x_{k,1},x_{k,1},t)],\\ \dot{x}_{k,1}=x_{k,2}.\end{cases} \quad (54)$$

系统参数选取如下:

$$M=[m_{ij}]_{2\times2},\\ m_{11}=m_1l_{\rm c1}^2+m_2(l_1^2+l_{\rm c2}^2+2l_1l_{\rm c2}\cos q_2),\\ m_{12}=m_{21}=m_2(l_{\rm c2}^2+2l_1l_{\rm c2}\cos q_2),\\ m_{22}=m_2l_{\rm c2}^2,\ C=[c_{ij}]_{2\times2},\ c_{11}=-m_2l_1l_{\rm c2}\dot{q}_2\sin q_2,\\ c_{21}=-m_2l_1l_{\rm c2}\dot{q}_1\sin q_2,\\ c_{12}=-m_2l_1l_{\rm c2}(\dot{q}_1+\dot{q}_2)\sin q_2,\\ c_{22}=0,\ G=[G_1\ \ G_2]^{\rm T},$$

$$G_1=(m_1 l_{c1}+m_2 l_1)\mathrm{g}\cos q_1+m_2 l_{c2}\mathrm{g}\cos(q_1+q_2),$$
$$G_2=m_2 l_{c2}\mathrm{g}\cos(q_1+q_2).$$

干扰项F为幅值为1的随机信号. 机器人质量为$m_1=m_2=1$, 机械臂长度为$l_1=l_2=0.5$, 连杆重心距离为$l_{c1}=l_{c2}=0.25$, $\mathrm{g}=9.8$.

设定目标轨迹为$\sin(2\pi t)$和$\cos(2\pi t)$, 为了保证被控系统初始值与给定初值一致, 取被控系统的初始状态为$x_0=[0\ \ 2\pi\ \ 1\ \ 0]^{\mathrm{T}}$. 设非线性饱和函数(7)中的参数分别为$\alpha=0.7$, $\beta=2.0$, $\delta=0.01$. 执行器乘性故障$\rho_k=0.8+0.2\mathrm{e}^{-1.5t}$, 执行器加性故障$\phi_k=0.1(1-\mathrm{e}^{-1.5t})$. 回归矩阵范数$\|\xi_k\|=1$. 控制器增益设计为$K_1=10$, $K_2=6$, $K=0.9$. 迭代更新参数为$q=1$, $p_\varphi=0.3$, $p_{\mathrm{d}}=0.7$. 迭代次数为20, 每次迭代周期为1 s. 参考轨迹调整时间域为[0, 0.2].

图1–4分别显示了第1次迭代和20次迭代后的实际输出和期望参考轨迹, 实线为参考轨迹, 虚线为实际输出曲线. 可以明显看出, 经过20次迭代后, 系统输出轨迹可以很好的跟踪期望参考轨迹. 值得注意的是, 第1次迭代和第20次迭代的参考轨迹是不同的, 这是因为0 s∼0.2 s为系统参考轨迹修正阶段, 此时在给定参考轨迹基础上, 根据系统的状态进行变参考的修正, 在0.2 s之后, 系统逐渐进入稳定跟踪状态. 由此可见, 本文所设计的控制策略可以较好的处理迭代初始误差不确定问题.

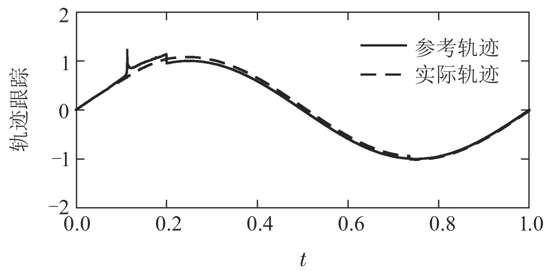

图 1 关节1的第1次迭代轨迹跟踪曲线

Fig. 1 Trajectory tracking curve of Joint 1 at first iteration

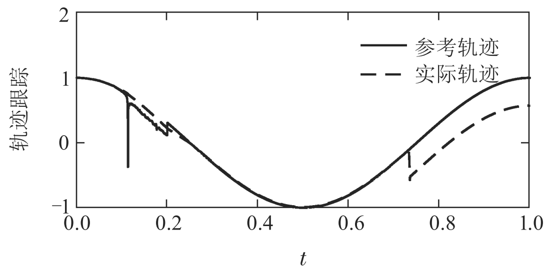

图 2 关节2的第1次迭代轨迹跟踪曲线

Fig. 2 Trajectory tracking curve of Joint 2 at first iteration

为了更清晰的展示参考轨迹修正过程, 图5–7为放大后的首次迭代、二次迭代和20次迭代后的参考轨迹. 由此可见, 前两次的参考轨迹修正效果更为明显, 系统的误差也较大, 但是经过20次迭代后的参考轨迹逐渐拟合于初始给定轨迹, 证明了本文所设计的参考轨迹自修正策略的有效性.

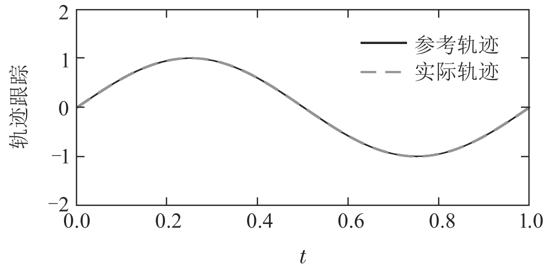

图 3 关节1的第20次迭代轨迹跟踪曲线

Fig. 3 Trajectory tracking curve of Joint 1 at 20 iteration

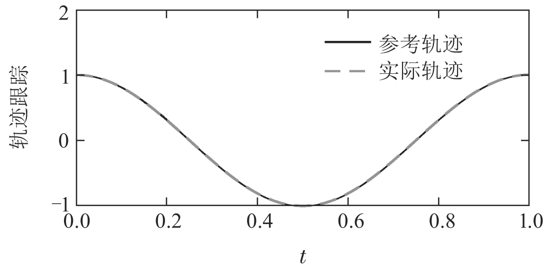

图 4 关节2的第20次迭代轨迹跟踪曲线

Fig. 4 Trajectory tracking curve of Joint 2 at 20 iteration

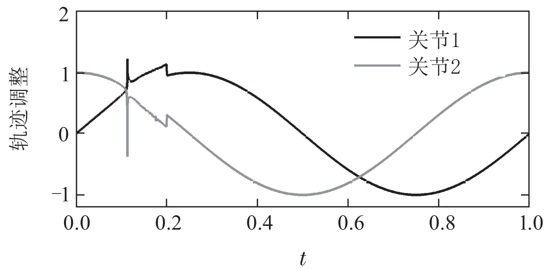

图 5 首次迭代后的参考轨迹

Fig. 5 Reference trajectory after the first iteration

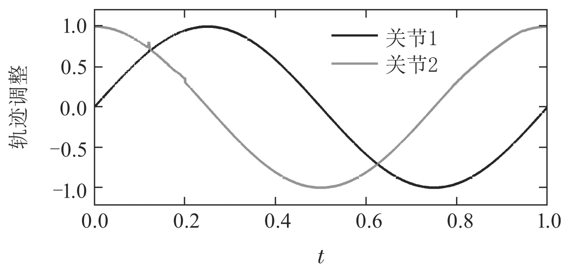

图 6 第2次迭代后的参考轨迹

Fig. 6 Reference trajectory after two iterations

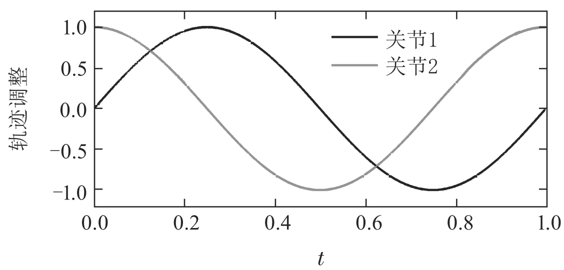

图 7 20次迭代后的参考轨迹

Fig. 7 Reference trajectory after 20 iterations

图8显示了20次迭代的平均跟踪误差对比, 随着迭代次数的增加, 跟踪误差有下降的趋势, 即下一个迭代周期相比于前一个迭代周期具有更好的跟踪性能, 且可以迅速收敛于0, 这体现了双迭代学习控制的优越性. 以上结果证明了本文所提出的双迭代优化控制策略可以保证在迭代初值不确定的情况下, 非线性重复运动系统仍然能够稳定跟踪期望轨迹, 并且随着迭代次数的增加, 跟踪性能逐渐提高.

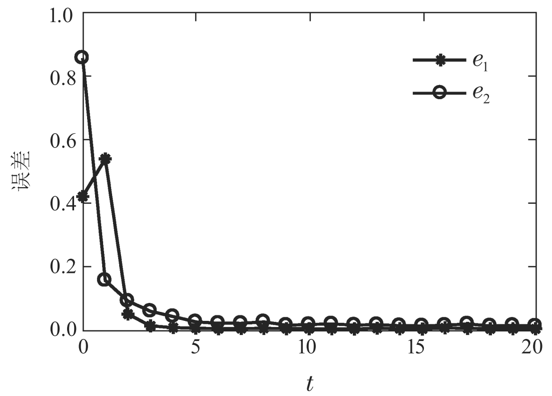

图 8　20次迭代跟踪误差对比

Fig. 8　Comparison of 20 iterations tracking error

5　结论

本文针对非线性重复运动系统的非参数不确定问题, 设计了一类双迭代优化学习控制策略. 该控制策略将复杂的迭代学习过程分解为两个相对简单的迭代学习控制器. 并设计了参考轨迹自修正策略, 保证了在参考轨迹不确定的情况下重复运动系统的稳定运行. 另外, 本文引入一种饱和非线性函数来处理系统误差, 使重复运动系统的轨迹满足约束条件. 应用Barrier复合能量函数证明了该控制策略可以在有限时间间隔内一致收敛. 最后, 通过仿真实验证明了所提出的非参数不确定迭代优化学习控制方法的有效性和实用性.

参考文献:

[1] KIM H, LEE J S, LAI J S, et al. Iterative learning controller with multiple phase-lead compensation for dual-mode flyback inverter. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 2017, 32(8): 6468 – 6480.

[2] LI Xiangyang. Iterative extended state observer and its application in iterative learning control. *Control and Decision*, 2015, 30(3): 473 – 478.
(李向阳. 迭代扩张状态观测器及其在迭代学习控制中的应用. 控制与决策, 2015, 30(3): 473 – 478.)

[3] WANG L P, FREEMAN C T, ROGERS E. Predictive iterative learning control with experimental validation. *Control Engineering Practice*, 2016, 53(8): 24 – 34.

[4] MENG D Y, JIA Y M. H_∞ approach to monotonically convergent ILC for uncertain time-varying delay systems. *International Journal of Systems Science*, 2015, 46(2): 209 – 217.

[5] BU X H, HOU Z S, JIN S T, et al. An iterative learning control design approach for networked control systems with data dropouts. *International Journal of Robust & Nonlinear Control*, 2016, 26(1): 91 – 109.

[6] LI X F, HUANG D Q, CHU B, et al. Robust iterative learning control for systems with norm-bounded uncertainties. *International Journal of Robust & Nonlinear Control*, 2016, 26(4): 697 – 718.

[7] WANG S K, WANG J Z, ZHAO J B. Application of PD-type iterative learning control in hydraulically driven 6-DOF parallel platform. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 2013, 35(5): 683 – 691.

[8] CHIEN C J, LIU J S. A P-type iterative learning control for robust output tracking of nonlinear time-varying systems. *International Journal of Control*, 1996, 64(2): 319 – 334.

[9] SAAB S S. On the P-type learning control. *Transactions on Automatic Control*, 1994, 39(11): 2298 – 2320.

[10] WANG H B, DONG J, WANG Y L. Discrete PID-type iterative learning control for mobile robot. *Journal of Control Science and Engineering*, 2016, 2016(2): 1 – 7.

[11] CHEN Y Q, GONG Y Q, WEN C Y. Analysis of higher-order iterative learning control algorithm for uncertain nonlinear systems with state delays. *Automatica*, 1998, 34(3): 345 – 353.

[12] RUAN X E, BIEN Z Z, WANG Q. Convergence properties of iterative learning control processes in the sense of the Lebesgue-p norm. *Asian Journal of Control*, 2012, 14(4): 1095 – 1107.

[13] OUYANG P R, PETZ B A, XI F F. Iterative learning control with switching gain PD feedback for nonlinear systems. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 2011, 6(1): 875 – 880.

[14] LAZAREVIC M, MANDIC P. Feedback-feedforward iterative learning control for fractional order uncertain time delay system-PD alpha type. *International Conference on Fractional Differentiation and Its Applications (ICFDA)*. Catania, Italy: IEEE, 2014: 23 – 25.

[15] BOUKATTAYA M, DAMAK T, JALLOULI M. Adaptive robust tracking control for mobile manipulators in the task-space under uncertainties. *International Journal of Intelligent Computing & Cybernetics*. 2011, 4(1): 81 – 92.

[16] ISLAM S, LIU P X. Adaptive iterative learning control for robot manipulators without using velocity signals. *IEEE-ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics*. Montreal, QC, Canada: IEEE, 2010: 1293 – 1298.

[17] JIN X, HUANG D Q, XU J X. Iterative learning control for systems with nonparametric uncertainties under alignment condition. *IEEE Conference on Decision & Control*. Maui, HI, USA: IEEE, 2012: 10 – 13.

[18] LI D, LI J M. Adaptive iterative learning control for nonlinearly parameterized systems with unknown time-varying delay and unknown control direction. *International Journal of Automation and Computing*, 2012, 9(6): 578 – 586.

[19] JIN X. Nonrepetitive trajectory tracking for nonlinear autonomous agents with asymmetric output constraints using parametric iterative learning control. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2019, 29(6): 1941 – 1955.

[20] CHEN C C, SUN Z Y. A unified approach to finite-time stabilization of high-order nonlinear systems with an asymmetric output constrain. *Automatica*, 2020, 111: 108581.

[21] YU M, HUANG D Q, HE W. Robust adaptive iterative learning control for discrete-time nonlinear systems with both parametric and nonparametric uncertainties. *International Journal of Adaptive Control & Signal Processing*, 2016, 30(7): 972 – 985.

[22] LIU J, ZHANG Y M, RUAN X E. Iterative learning control for a class of uncertain nonlinear systems with current state feedback. *International Journal of Systems Science*, 2019, 50(10): 1 – 13.

[23] ZHANG Y M, LIU J, RUAN X E. Iterative learning control for uncertain nonlinear networked control systems with random packet dropout. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2019, 29(2): 1 – 18.

[24] YAN Qiuzhen, LIU Xiangbin, ZHU Sheng, et al. Dual-period repetitive control for nonparametric uncertain systems. *Control Theory & Applications*, 2018, 35(9): 99 – 107.
(严求真, 柳向斌, 朱胜, 等. 非参数不确定系统的双周期重复控制. 控制理论与应用, 2018, 35(9): 99 – 107.)

[25] LV Qing. Adaptive iterative learning control to suppress the influence of initial state error. *ACTA Automatica Sinica*, 2015, 41(7): 1365 – 1372.
(吕庆. 抑制初态误差影响的自适应迭代学习控制. 自动化学报, 2015, 41(7): 1365 – 1372.)

[26] YAN Qiuzhen, SUN Mingxuan, CAI Jianping. Reference-signal rectifying method of iterative learning control. *ACTA Automatica Sinica*, 2017, 43(8): 1470 – 1477.
(严求真, 孙明轩, 蔡建平. 迭代学习控制的参考信号初始修正方法. 自动化学报, 2017, 43(8): 1470 – 1477.)

[27] JIN X. Adaptive fault-tolerant control for a class of output-constrained nonlinear systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2015, 25(18): 3732 – 3745.

[28] WANG L M, MO S Y, ZHOU D H, et al. Robust delay dependent iterative learning fault-tolerant control for batch processes with state delay and actuator failures. *Journal of Process Control*, 2012, 22(7): 1273 – 1286.

[29] CHEN T, ZHU M, ZHENG Z W. Asymmetric error-constrained path-following control of a stratospheric airship with disturbances and actuator saturation. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2019, 119(3): 501 – 522.

[30] JI H H, HOU Z S, FAN L L, et al. Adaptive iterative learning reliable control for a class of non-linearly parameterised systems with unknown state delays and input saturation. *IET Control Theory Applications*, 2016, 10(17): 2160 – 2174.

[31] JIN X. Fault tolerant finite-time leader-follower formation control for autonomous surface vessels with LOS range and angle constraints. *Automatica*, 2016, 68(1): 228 – 236.

[32] TIAN H H, SU Y X. Nonlinear decentralized repetitive control for global asymptotic tracking of robot manipulators. *Acta Automatica Sinica*, 2011, 37(10): 1264 – 1271.

[33] KHALIL H K. *Nonlinear Systems*. 3rd Edition. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2002.

[34] JIANG Z P, WANG Y. A converse lyapunov theorem for discrete-time systems with disturbances. *Systems & Control Letters*, 2002, 45(1): 49 – 58.

作者简介:

朱雪枫 博士, 讲师, 目前研究方向为智能控制理论及应用、智能机器人建模、控制和优化, E-mail: zxf627@sina.com;

王建辉 教授, 博士生导师, 目前研究方向为复杂系统的建模、控制和优化, E-mail: wangjianhui@mail.neu.edu.cn.