

不确定系统的事件触发控制：近似解输入法

丁三波[†], 刘旭, 王勇, 杨德东

(河北工业大学 人工智能与数据科学学院, 天津 300401; 河北工业大学 河北省控制工程技术研究中心, 天津 300401)

摘要: 针对一类不确定非线性系统的事件触发控制问题, 提出了一种近似解输入法的控制策略. 首先, 对非线性系统进行线性化处理, 以便于构造系统的近似解. 其次, 根据确定线性系统解析解的定义, 利用系统矩阵和采样信号信息, 逐段地构造不确定非线性系统的近似解. 将测量误差定义为系统当前状态与近似状态之间的差, 构造事件触发条件和控制器, 并建立相关的稳定性判据. 本文证明了所提此方法可有效避免Zeno现象, 并将其推广到动态触发控制方案, 得到进一步提高的结果. 最后, 通过仿真对比验证了本文方法的有效性.

关键词: 事件触发控制; 近似解输入法; 不确定系统; 动态触发

引用格式: 丁三波, 刘旭, 王勇, 等. 不确定系统的事件触发控制: 近似解输入法. 控制理论与应用, 2021, 38(9): 1399 – 1406

DOI: 10.7641/CTA.2021.00387

Event-triggered control for uncertain systems: an approximate solution input method

DING San-bo[†], LIU Xu, WANG Yong, YANG De-dong

(School of Artificial Intelligence, Hebei University of Technology, Tianjin 300401, China;

Control Engineering Technology Research Center of Hebei Province, Hebei University of Technology, Tianjin 300401, China)

Abstract: This paper investigates the event-triggered control for a class of uncertain nonlinear systems by proposing an approximate solution input method. First, the nonlinear systems are linearized to the linear ones aiming to construct the approximate solution. Second, according to the definition of the solution of the deterministic linear systems, we construct the piecewise approximate solution for the uncertain nonlinear systems by utilizing the matrix parameters and sampled signals. The measurement error is defined as the difference between the actual states and approximate states of the systems. Thereafter, the event-triggered condition and controller are designed, respectively. The stability conditions are also developed correspondingly. It is proved that the proposed method can effectively avoid the Zeno phenomenon. The proposed method is also extended to the dynamic triggering method, and some improved results are developed. Finally, the effectiveness of the proposed methods is verified by comparison examples.

Key words: event-triggered control; approximate solution input method; uncertain systems; dynamic triggering

Citation: DING Sanbo, LIU Xiu, WANG Yong, et al. Event-triggered control for uncertain systems: an approximate solution input method. *Control Theory & Applications*, 2021, 38(9): 1399 – 1406

1 引言

事件触发控制是网络控制领域中的一种常见方法. 在事件触发控制中, 传感器根据预设的触发条件进行采样, 实现对系统的按需控制, 避免了传感器和控制器之间不必要的信号传输, 减小了网络的通讯负担^[1-5]. 目前, 事件触发控制已经被广泛用于研究多智能体系统的一致性^[6-7]、无人机的编队控制^[8-9]、线性或非线性系统的观测器设计或跟踪控制^[10-11]、大规

模互联系统的镇定性^[12]等复杂问题. 相关的研究成果有助于机器人控制、工业互联网、以太网、智能微电网等领域的快速发展.

在事件触发控制中, 通常会通过定义下列形式的事件触发条件来决定采样时刻 $t_k^{[1, 13]}$:

$$\begin{cases} t_0 = 0, \\ t_{k+1} = \inf\{t > t_k | e^T(t)\Omega e(t) > \varepsilon x^T(t)\Omega x(t)\}, \end{cases} \quad (1)$$

收稿日期: 2020-06-24; 录用日期: 2021-03-04.

[†]通信作者. E-mail: dingsanbo@163.com; Tel.: +86 17320223808.

本文责任编辑: 徐胜元.

国家自然科学基金项目(61903121), 河北省自然科学基金项目(F2020202063), 河北省创新能力提升计划项目(18961604H)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (61903121), the Natural Science Foundation of Hebei Province (F2020202063) and the Innovative Capability Improvement Program of Hebei Province (18961604H).

其中: $e(t)$ 表示测量误差, ε 表示触发阈值, Ω 为对称正定的参数矩阵. 在早期研究中, 测量误差往往定义为 $e(t) = x(t) - x(t_k)$, 相应的控制输入选择为 $u(t) = Kx(t_k)$. 与连续的状态反馈控制(即 $u(t) = Kx(t)$)相比, 事件触发控制策略(1)本质上是用常采样信号 $x(t_k)$ 代替了连续状态 $x(t)$. 也就是说, 在区间 $[t_k, t_{k+1})$ 内, 对系统进行阶跃输入时, 这可能会导致 $x(t)$ 与 $x(t_k)$ 的相对误差随时间逐步增大, 即 $\|e(t)\|$ 随时间 t 逐步增大, 进而导致比值 $e^T(t)\Omega e(t)/x^T(t)\Omega x(t)$ 的演化相对较容易超过预设阈值 ε , 从而造成较高的触发频率^[12, 14-16].

一般来说, 对系统增加控制的目的在于使系统状态衰减, 实现渐近或者指数稳定. 基于此原因, 文献[12, 14-16]引入了指数衰减项 $\vartheta(t) = e^{-\lambda(t-t_k)}$, 将测量误差重新定义为 $e(t) = x(t) - \vartheta(t)x(t_k)$. 相应地, 控制输入也改为 $u(t) = K\vartheta(t)x(t_k)$. 该方法的本质在于利用了系统的衰减过程, 用 $\vartheta(t)x(t_k)$ 来逼近 $x(t)$, 减少相对误差, 进而达到减少事件触发次数的目的. 然而, 对实际系统而言, 其状态往往是一个震荡衰减的过程, 存在状态上升的过程. 在上升过程中, 文献[12, 14-16]中的指数衰减方法就会起到适得其反的效果. 为了避免此类问题, 文献[17]借助两个符号函数, 引入了另外一个指数项 $\mu_i(t) = \exp\{\eta \operatorname{sgn}(x_i(t_k))(t - t_k)\}$, 并将测量误差定义为 $e(t) = x(t) - \mu(t)x(t_k)$, 其中 $\mu(t)$ 为 $\mu_i(t)$ 组成的对角阵. 同时, 将控制输入设计为 $u(t) = K\mu(t)x(t_k)$. 事实上, 此方法中的两个符号函数, 对采样瞬间系统状态的单调性进行判断, 使得 $\mu(t)x(t_k)$ 能够迎合连续状态的局部变化趋势. 旨在减小测量误差 $e(t)$, 降低事件触发频率的同时, 达到连续控制输入 $u(t) = Kx(t)$ 的控制效果. 文献[4]将此方法命名为指数逼近法. 然而, 不难发现, 指数逼近法只能在采样时刻 t_k 改变控制输入的单调性. 在采样区间 $[t_k, t_{k+1})$, 控制输入依然是单调的. 在此区间内, 如果系统状态 $x(t)$ 的单调性发生改变, 也会加速事件的触发. 特别地, 文献[12, 14-17]的控制方法中, 都存在一个可调参数 λ 和 η . 如若这些参数选取不当, 就会出现过拟合或者欠拟合的现象, 继而加剧事件触发的频率.

为了克服文献[12, 14-17]中方法的局限性, 本文主要提出基于近似解输入法的事件触发控制方法. 旨在利用采样信号, 构造对系统的近似解, 以及控制器和触发条件, 进一步实现连续状态反馈的近似控制效果. 考虑一类带有不确定参数的利普希茨非线性系统的事件触发控制. 将系统线性化, 根据线性化系统解析解的定义和采样信号, 构造新的指数项, 实现对不确定系统状态的有效逼近或近似. 将测量误差 $e(t)$ 定义为不确定非线性系统的当前状态与近似状态之间的误差, 进而构造事件触发条件和控制输入. 最终通

过Lyapunov方法建立相关稳定性判据. 本文还将所提方法推广到动态触发控制方案, 增大触发阈值, 提升所得结果.

2 非线性系统的事件触发控制

在实际情况中, 由于外界环境干扰、建模误差、系统老化或系统磨损等原因, 系统往往处于亚健康状态, 系统的参数会存在一定的扰动. 考虑下列非线性系统:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & \\ (A + \Delta A)x(t) + (W_1 + \Delta W)f(W_0x(t)) + Bu(t), \end{aligned} \quad (2)$$

其中: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $W_1 \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $W_0 \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times q}$ 为系统矩阵; $\Delta A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\Delta W \in \mathbb{R}^{n \times m}$ 为参数扰动, 且满足 $\Delta A = E\Sigma(t)F$, $\Delta W = G\Theta(t)H$, 其中 E, G, F, H 为已知矩阵, $\Sigma^T(t)\Sigma(t) \leq I$, $\Theta^T(t)\Theta(t) \leq I$.

假设函数 $f_r(\cdot)$ 满足 $f_r(0) = 0, r = 1, 2, \dots, m$, 及以下条件:

$$l_{1r} \leq \frac{f_r(s_1) - f_r(s_2)}{s_1 - s_2} \leq l_{2r}, \quad (3)$$

其中 l_{1r} 和 l_{2r} 为已知常数. 记 $l_1 = \operatorname{diag}\{l_{11}, l_{12}, \dots, l_{1m}\}$, $l_2 = \operatorname{diag}\{l_{21}, l_{22}, \dots, l_{2m}\}$.

2.1 事件触发条件和控制器

对任意满足条件 $l_1 \leq L \leq l_2$ 的常对角矩阵 L , 可将系统(2)线性化近似为带有参数扰动的线性系统

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & \\ [A + \Delta A + (W_1 + \Delta W)LW_0]x(t) + Bu(t). \end{aligned} \quad (4)$$

对于无扰动线性系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A + W_1LW_0)x(t) + Bu(t), \\ u(t) = Kx(t), \end{cases}$$

系统在区间 $[t_k, t_{k+1})$ 上的解析解为

$$e^{(A+W_1LW_0+BK)(t-t_k)}x(t_k),$$

不妨将其视为系统(2)的近似解来研究事件触发控制.

令 $x_b(t) = e^{(A+W_1LW_0+BK)(t-t_k)}x(t_k)$. 构造事件触发状态反馈控制器

$$u(t) = Kx_b(t), \quad t_k \leq t < t_{k+1}. \quad (5a)$$

定义测量误差 $e_b(t) = x(t) - x_b(t)$, 设计下列事件触发条件:

$$\begin{cases} t_0 = 0, \\ t_{k+1} = \inf\{t > t_k | e_b^T(t)\Omega e_b(t) > \varepsilon x^T(t)\Omega x(t)\}, \end{cases} \quad (5b)$$

其中: $\Omega \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是一个正定的常数矩阵, ε 是表示阈值的常数.

注 1 从事件触发条件方面来看, 相比于文献[12,

14-17]中的指数衰减法和指数逼近法, 本文方法允许 $x_b(t)$ 在区间 $[t_k, t_{k+1})$ 内是非单调的, 能够更好地实现对连续状态 $x(t)$ 的模拟, 减小 $e_b^T(t)\Omega e_b(t)$ 的取值, 进而有利于减少事件触发的次数. 从控制器方面来看, 本文通过 $u(t) = Kx_b(t)$ 来近似地替代连续反馈 $u(t) = Kx(t)$, 在一定程度上可以模拟连续状态反馈的控制效果.

注2 在实际系统中, 系统(2)中的输入矩阵 B 可能存在不确定性. 如果 B 存在不确定项 ΔB , 可以利用与不确定项 ΔA 相同的处理方法来处理 ΔB , 并建立相关稳定判据. 关于不确定参数的处理方法, 读者也可以参考关于现代控制理论或者鲁棒控制的教材或论著. 由于本文的主要目的是提出基于近似解输入法的事件触发控制策略, 而不是对参数不确定性的处理. 本文只考虑了系统矩阵 A 和 W_1 的不确定性, 简化了系统模型.

2.2 稳定性条件

由控制器(5a), 闭环系统(2)可以写作:

$$\dot{x}(t) = (A + BK + \Delta A)x(t) - BKe_b(t) + (W_1 + \Delta W)f(W_0x(t)). \quad (6)$$

由式(5)和式(6), 可以得到以下结果.

定理1 对于给定阈值 $\varepsilon > 0$ 和控制增益 $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$, 在事件触发控制策略(5)下, 闭环系统(2)是渐近稳定的, 如果存在 n 阶矩阵 $P > 0, \Omega > 0, N_1, N_2$ 和 m 阶对角矩阵 $Q_1 > 0, Q_2 > 0, \Lambda > 0$, 以及正常数 r_1, r_2 , 使得下列条件成立:

$$\begin{bmatrix} \Xi_1 & \Xi_2 & \Xi_3 & -N_1BK & N_1E & N_1G \\ * & \Xi_4 & \Xi_5 & -N_2BK & N_2E & N_2G \\ * & * & \Xi_6 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\Omega & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -r_1I & 0 \\ * & * & * & * & * & -r_2I \end{bmatrix} < 0, \quad (7)$$

其中:

$$\begin{aligned} \Xi_1 &= N_1(A + BK) + (A + BK)^T N_1^T - 2W_0^T l_2 \Lambda l_1 W_0 + r_1 F^T F + \varepsilon \Omega, \\ \Xi_2 &= P - N_1 + (A + BK)^T N_2^T + W_0^T (l_2 Q_2 - l_1 Q_1) W_0, \\ \Xi_3 &= N_1 W_1 + W_0^T (l_1 + l_2) A, \\ \Xi_4 &= -N_2 - N_2^T, \\ \Xi_5 &= N_2 W_1 + W_0^T (Q_1 - Q_2), \\ \Xi_6 &= -2\Lambda + r_2 H^T H. \end{aligned}$$

证 考虑以下李雅普诺夫函数

$$V(t) = x^T(t)Px(t) + 2 \sum_{r=1}^m q_{1r} \int_0^{W_{0r}x(t)} [f_r(s) - l_{1r}s] ds +$$

$$2 \sum_{r=1}^m q_{1r} \int_0^{W_{0r}x(t)} [l_{2r}s - f_r(s)] ds. \quad (8)$$

计算 $V(t)$ 的导数, 得

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= 2x^T(t)P\dot{x}(t) + 2\dot{x}^T(t)W_0^T Q_1 [f(W_0x(t)) - l_1 W_0x(t)] + \\ &2\dot{x}^T(t)W_0^T Q_2 [l_2 W_0x(t) - f(W_0x(t))]. \quad (9) \end{aligned}$$

对任意的矩阵 $N_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}, N_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 以及正常数 r_1, r_2 , 下列不等式条件成立:

$$\begin{aligned} 0 &= 2[x^T(t)N_1 + \dot{x}^T(t)N_2][-\dot{x}(t) + (A + BK + E\Sigma(t)F)x(t) + \\ &(W_1 + G\Theta(t)H)f(W_0x(t)) - BKe_e(t)] \leq \\ &2[x^T(t)N_1 + \dot{x}^T(t)N_2][-\dot{x}(t) + (A + BK)x(t) + W_1f(W_0x(t)) - BKe_e(t)] + \\ &[x^T(t)N_1 + \dot{x}^T(t)N_2](r_1^{-1}EE^T + r_2^{-1}GG^T) \times \\ &[x^T(t)N_1 + \dot{x}^T(t)N_2]^T + r_1x^T(t)F^T Fx(t) + \\ &r_2f^T(W_0x(t))H^T Hf(W_0x(t)). \quad (10) \end{aligned}$$

考虑关于非线性函数 $f(\cdot)$ 的条件(3), 对于任何正定对角矩阵 $\Lambda \in \mathbb{R}^{m \times m}$, 下列不等式成立:

$$\begin{aligned} 0 &\leq 2(f(W_0x(t)) - l_2 W_0x(t))^T \Lambda \times \\ &(l_1 W_0x(t) - f(W_0x(t))). \quad (11) \end{aligned}$$

当 $t \in [t_k, t_{k+1})$ 时, 由事件触发机制(5b), 得

$$0 \leq \varepsilon x^T(t)\Omega x(t) - e_b^T(t)\Omega e_b(t). \quad (12)$$

联立式(9)-(12), 得

$$\dot{V}(t) \leq \xi_b^T(t)\Xi\xi_b(t), \quad (13)$$

其中 $\xi_b(t) = \text{col}\{x(t), \dot{x}(t), f(W_0x(t)), e_b(t)\}$, 且

$$\begin{aligned} \Xi &= \begin{bmatrix} \Xi_1 & \Xi_2 & \Xi_3 & -N_1BK \\ * & \Xi_4 & \Xi_5 & -N_2BK \\ * & * & \Xi_6 & 0 \\ * & * & * & -\Omega \end{bmatrix} + \\ &\Xi_0(r_1^{-1}EE^T + r_2^{-1}GG^T)\Xi_0^T, \\ \Xi_0 &= \text{col}\{N_1, N_2, 0, 0\}. \end{aligned}$$

最后, 根据Schur补引理, 条件(7)等价于 $\Xi < 0$, 即条件(7)保证 $\dot{V}(t) < 0$. 证毕.

下面说明本文中方法不会带来Zeno现象, 即不会在有限时间间隔内发生无数次事件.

定理2 在触发条件(5b)下, 存在一个正常数 τ , 使得任意两次事件触发间隔满足 $t_{k+1} - t_k \geq \tau$.

证 根据触发条件(5b), 易知对任意的 $t \in [t_k, t_{k+1})$, 条件 $\|e_b(t)\| \leq \alpha\|x(t)\|$ 成立, 其中

$$\alpha = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(\Omega)}{\lambda_{\min}(\Omega)}}.$$

当存在某时刻 t ,使得 $x(t)$ 为0时,可以得出 $\|e_b(t)\| = 0, \|x_b(t)\| = 0$.这就意味着非线性系统(2)的状态已经达到了有限时间稳定.在这时,控制器和事件发生器处于待机状态,也就不需要考虑Zeno现象的发生.接下来,主要考虑 $\|x(t)\| \neq 0$ 的情况.

记 $g(W_0x(t)) = f(W_0x(t)) - l_1W_0x(t)$,可得其满足条件

$$\|g(W_0x(t))\| \leq \|l\| \|W_0x(t)\| \leq \|l\| \|W_0\| \|x(t)\|,$$

其中 $l = l_2 - l_1$.

非线性系统(2)可重写为

$$\dot{x}(t) = (A + BK + W_1l_1W_0 + \Delta A + \Delta Wl_1W_0) \times x(t) + (W_1 + \Delta W)g(W_0x(t)) - BKe_b(t).$$

考虑测量误差 $e_b(t)$ 在区间 $[t_k, t_{k+1})$ 内的微分,可得

$$\begin{aligned} \dot{e}_b(t) &= \dot{x}(t) - \dot{x}_b(t) = \\ &[W_1(l_1 - L)W_0 + \Delta A + \Delta Wl_1W_0]x(t) + \\ &(W_1 + \Delta W)g(W_0x(t)) + (A + W_1LW_0)e_b(t). \end{aligned}$$

进而,可知

$$\begin{aligned} \|\dot{x}(t)\| &\leq \varpi_1 \|x(t)\| + \|BK\| \|e_b(t)\|, \\ \|\dot{e}_b(t)\| &\leq \varpi_2 \|x(t)\| + \|A + W_1LW_0\| \|e_b(t)\|, \end{aligned}$$

其中:

$$\varpi_1 = \|A + BK + W_1l_1W_0 + \Delta A + \Delta Wl_1W_0\| + \|W_1 + \Delta W\| \|l\| \|W_0\|,$$

$$\varpi_2 = \|W_1l_1W_0 + \Delta A + \Delta Wl_1W_0 - W_1LW_0\| + \|W_1 + \Delta W\| \|l\| \|W_0\|.$$

接下来,计算 $\frac{\|e_b(t)\|}{\|x(t)\|}$ 在区间 $[t_k, t_{k+1})$ 内的微分:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\|e_b\|}{\|x\|} &= \frac{e_b^T \dot{e}_b}{\|e_b\| \|x\|} - \frac{\|e_b\|}{\|x\|} \frac{x^T \dot{x}}{\|x\|^2} \leq \\ &\frac{\|\dot{e}_b\|}{\|x\|} + \frac{\|e_b\|}{\|x\|} \frac{\|\dot{x}\|}{\|x\|} \leq \\ &\|A + W_1LW_0\| \left(\frac{\varpi_2}{\|A + W_1LW_0\|} + \frac{\|e_b\|}{\|x\|} \right) + \\ &\|BK\| \frac{\|e_b\|}{\|x\|} \left(\frac{\varpi_1}{\|BK\|} + \frac{\|e_b\|}{\|x\|} \right) \leq \\ &\|BK\| \left(\frac{\|A + W_1LW_0\|}{\|BK\|} + \frac{\|e_b\|}{\|x\|} \right) \times \\ &\left(s_1 + \frac{\|e_b\|}{\|x\|} \right) \leq \|BK\| \left(s + \frac{\|e_b\|}{\|x\|} \right)^2. \end{aligned} \quad (14)$$

其中:

$$\begin{aligned} s_1 &= \max \left\{ \frac{\varpi_2}{\|A + W_1LW_0\|}, \frac{\varpi_1}{\|BK\|} \right\}, \\ s &= \max \left\{ s_1, \frac{\|A + W_1LW_0\|}{\|BK\|} \right\}. \end{aligned}$$

记 $v(t) = \frac{\|e_b\|}{\|x\|}$,则式(14)等价于 $\dot{v}(t) \leq \|BK\|(s + v(t))^2$.假设 $v(t) \leq \Phi(t, \varphi_0)$,并且 $\Phi(t, \varphi_0)$ 是下面微分方程满足 $\Phi(0, \varphi_0) = \Phi(0)$ 的解:

$$\dot{\Phi}(t) = \|BK\|(s + \Phi(t))^2.$$

设两个连续事件的最小触发间隔为 τ ,则 τ 满足

$$\Phi(\tau, 0) = \frac{\|BK\|\tau}{1 - s\|BK\|\tau}. \text{ 另一方面,由触发条件(5b)}$$

$$\text{可知, } \Phi(\tau, 0) = \alpha. \text{ 易解得 } \tau = \frac{\alpha}{\|BK\| + \alpha s\|BK\|}.$$

证毕.

注3 当测量误差为传统的 $e_b(t) = x(t) - x(t_k)$ 时,有 $\dot{e}_b(t) = \dot{x}(t), t \in [t_k, t_{k+1})$.由类似的方法可以证明,此时连续两次事件的触发间隔满足

$$t_{k+1} - t_k \geq \bar{\tau} = \frac{\alpha}{\|BK\| + \alpha s_0\|BK\|},$$

其中 $s_0 = \max\{1, \frac{\varpi_1}{\|BK\|}\}$.显然当 $s < s_0$ 时,本文方法可以增大触发间隔的下界.

2.3 动态触发机制

本文的近似解输入法本质上是改变了测量误差的计算方式,缩小了相对误差取值,进而可以减少事件发生的次数.而文献[18]提出了动态事件触发方案.这种方法实际上是增大了触发的阈值.本文所提方法完全可以结合动态事件触发方案进行推广,进一步减少事件发生的次数,降低网络的通讯负担.

定义动态变量 $\beta(t)$

$$\dot{\beta}(t) = -\phi(\beta(t)) + \varepsilon x^T(t)\Omega x(t) - e_b^T(t)\Omega e_b(t), \quad (15)$$

其中 $\phi(\cdot)$ 为利普希茨非线性 $\mathcal{K}_\infty$ 函数,且满足 $\phi(0) = 0$.初值 $\beta(t_0) = \beta_0 \geq 0$.相应的动态触发条件为

$$\begin{cases} t_0 = 0, \\ t_{k+1} = \inf \{t > t_k | \beta(t) + \theta(\varepsilon x^T(t)\Omega x(t) - e_b^T(t)\Omega e_b(t)) < 0\}. \end{cases} \quad (16)$$

对于动态触发,可不加证明得到以下结果.

定理3 对于给定常数 $\varepsilon > 0, \theta > 0$ 和控制增益 $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$,如果定理1中的条件成立,则在事件触发条件(16)作用下,控制输入(5a)可以保证系统(2)是渐进稳定的.

证 考虑泛函 $W(t) = V(t) + \beta(t)$,证明方法与文献[18]类似,此处不再赘述. 证毕.

注4 类似于文献[18],可以证明在动态触发条件(16)下,当初值 $\beta_0 \geq 0$ 时,对任意的时间 $t > 0$,可得变量 $\beta(t) \geq 0$.进而易判断,在动态触发条件(16)下,连续两次事件的触发间隔不小于 τ .

2.4 关于线性系统的推论

考虑如下线性系统:

$$\dot{x}(t) = (A + \Delta A)x(t) + Bu(t), \quad (17)$$

其中: $x(t) = \text{col}\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\} \in \mathbb{R}^n$ 代表状态变量; $u(t) \in \mathbb{R}^q$ 代表待设计的控制器, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 和 $B \in \mathbb{R}^{n \times q}$ 是常数矩阵; $\Delta A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 为参数扰动. 假设 $\Delta A = E\Sigma(t)F$, 其中 $\Sigma^T(t)\Sigma(t) \leq I$, $E \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $F \in \mathbb{R}^{p \times n}$ 为已知矩阵.

对于无参数扰动系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ u(t) = Kx(t) \end{cases}$$

而言, 在区间 $[t_k, t_{k+1})$ 上的解析解为

$$x(t) = e^{(A+BK)(t-t_k)}x(t_k),$$

不妨将 $e^{(A+BK)(t-t_k)}x(t_k)$ 视为系统 (17) 在区间 $[t_k, t_{k+1})$ 上的近似解, 来研究事件触发控制.

记 $x_a(t) = e^{(A+BK)(t-t_k)}x(t_k)$. 本文构造如下事件触发状态反馈控制器:

$$u(t) = Kx_a(t), \quad t_k \leq t < t_{k+1}. \quad (18a)$$

定义测量误差 $e_a(t) = x(t) - x_a(t)$, 则本文设计的事件触发条件为

$$\begin{cases} t_0 = 0, \\ t_{k+1} = \inf\{t > t_k | e_a^T(t)\Omega e_a(t) > \varepsilon x^T(t)\Omega x(t)\}. \end{cases} \quad (18b)$$

由控制器(18a), 闭环系统(17)可以写成

$$\dot{x}(t) = (A + \Delta A + BK)x(t) - BK e_a(t). \quad (19)$$

给出如下稳定性判据.

推论 1 对于给定阈值 $\varepsilon > 0$ 和控制增益 $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$, 在事件触发控制策略(18)下, 如果存在恰当维数的正定矩阵 P, Ω , 任意的矩阵 N_1, N_2 , 以及正常数 r_0 使得下列条件成立, 则系统(17)是渐进稳定的:

$$\begin{bmatrix} \Pi_1 & \Pi_2 & -N_1BK & N_1E \\ * & \Pi_3 & -N_2BK & N_2E \\ * & * & -\Omega & 0 \\ * & * & * & -r_0I \end{bmatrix} < 0, \quad (20)$$

其中:

$$\Pi_1 = N_1(A + BK) + (A + BK)^T N_1^T +$$

$$r_0 F^T F + \varepsilon \Omega,$$

$$\Pi_2 = P - N_1 + (A + BK)^T N_2^T,$$

$$\Pi_3 = -N_2 - N_2^T.$$

参照定理2的证明方法, 可以说明事件触发条件(18b)也可以避免Zeno行为, 此处不再赘述.

类似地, 触发条件(18b)可以结合文献[18]中的动

态事件触发方案进行推广. 定义动态变量 $\alpha(t)$

$$\dot{\alpha}(t) = -\phi(\alpha(t)) + \varepsilon x^T(t)\Omega x(t) - e_a^T(t)\Omega e_a(t), \quad (21)$$

其中 $\phi(\cdot)$ 为利普希茨非线性 $\mathcal{K}_\infty$ 函数, 且满足 $\phi(0) = 0$. 系统(21)的初值设定为 $\alpha(t_0) = \alpha_0 \geq 0$. 相应的动态触发条件为

$$\begin{cases} t_0 = 0, \\ t_{k+1} = \inf\{t > t_k | \alpha(t) + \theta(\varepsilon x^T(t)\Omega x(t) - e_a^T(t)\Omega e_a(t)) < 0\}. \end{cases} \quad (22)$$

对于动态触发, 给出如下稳定性结果.

推论 2 对于给定常数 $\varepsilon > 0, \theta > 0$ 和控制增益 $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$, 如果推论1中的条件成立, 则在事件触发条件(22)作用下, 控制输入(18a)可以保证系统(17)是渐进稳定的.

3 数值仿真

例 1 考虑具有以下参数的二维非线性系统(2):

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad W_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$W_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}^T, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

不确定参数

$$\Delta A(t) = E\Sigma(t)F, \quad \Delta W(t) = G\Theta(t)H,$$

其中: $E = G = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.2 \end{bmatrix}$, $F = [0.2 \ 0.5]$, $H = 0.2$, $\Sigma(t) = \Theta(t) = \sin t$.

假定非线性函数 $f(\cdot)$ 为 $f(s) = \sin s - s$, 则当 $l_1 = -1.2173, l_2 = 0$ 时, 条件(3)成立. 取 $\varepsilon = 0.15, L = -0.1, K = [0.2 \ 2.9]$. 求解线性矩阵不等式(7), 得

$$\Omega = \begin{bmatrix} 4.2227 & -0.8267 \\ -0.8267 & 13.8329 \end{bmatrix}.$$

本文采用Forward-Euler法进行数值仿真. 仿真时间和步长分别为 $T = 15$ 和 $h_s = 0.001$. 选择初始条件为 $x(0) = \text{col}\{3, 0\}$. 图1给出了与已有文献的仿真对比结果, 图中绿线代表事件发生时刻. 仿真结果显示, 本文的近似解输入法、传统事件触发方法^[1, 13]、指数衰减法^[12, 14-16]、指数逼近法^[17]所产生的事件数分别为17, 59, 50, 35. 与已有的3种方法相比, 本文方法的事件次数分别减少了71.19%, 66%, 51.43%.

令式(15)中函数 $\phi(s) = s$, 常数 $\theta = 1$. 图2展示了本文中动态触发条件(16)与文献[18]的仿真结果. 仿真中, 本文中动态触发条件(16)产生的事件数为8次, 而文献[18]中的方法为17次, 约是本文方法的2倍. 由此可见, 本文的所提方法切实可以减少事件触发的次数, 继而降低网络的通讯负担.

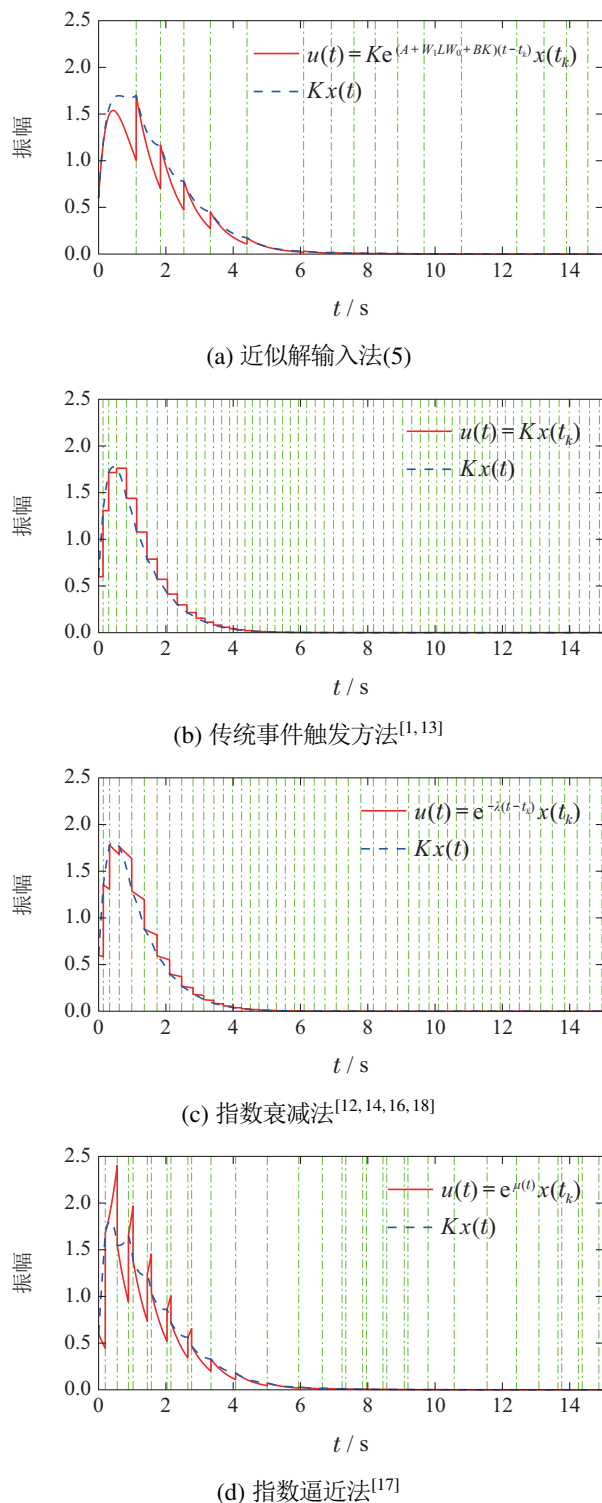
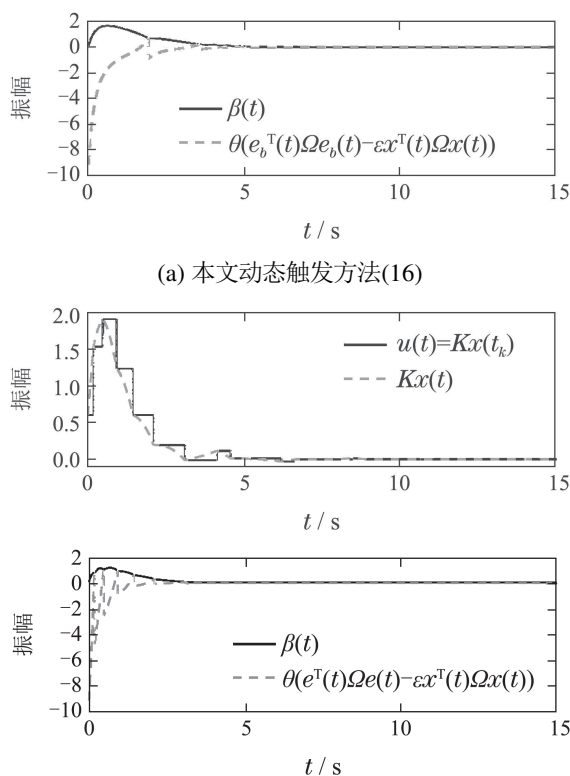
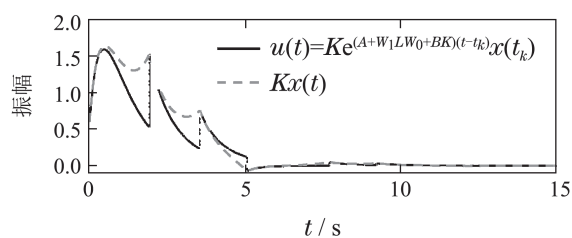


图1 控制器响应

Fig. 1 The responses of controller



(a) 本文动态触发方法(16)

(b) 文献[18]的动态触发方法

图2 控制器和动态变量 $\beta(t)$ 的响应
Fig. 2 The responses of controller and dynamic variable $\beta(t)$

例2 考虑具有以下参数的二维线性系统(17):

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

不确定参数 $\Delta A = E\Sigma(t)F$, 其中 $\Sigma(t) = \sin t$,

$$E = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.2 \end{bmatrix}, F = [0.2 \ 0.5].$$

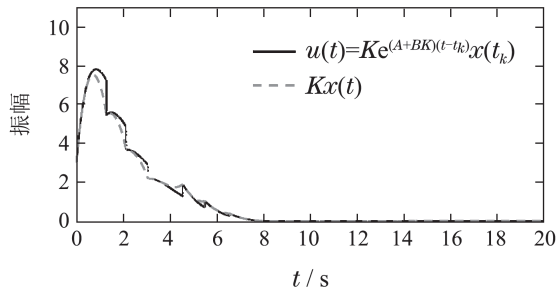
取 $\varepsilon = 0.1069$, $K = [1 \ -5]$, 求解线性矩阵不等式(20), 得:

$$\Omega = \begin{bmatrix} 5.7294 & -28.4927 \\ -28.4927 & 142.5595 \end{bmatrix}.$$

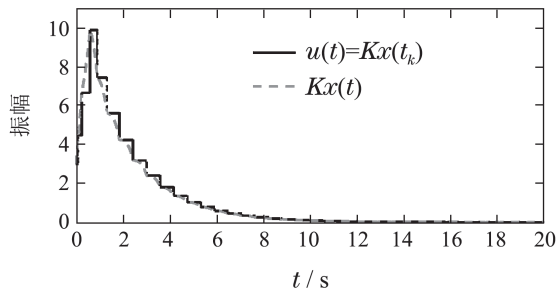
此算例依然采用 Forward-Euler 法进行数值仿真. 仿真时间和步长分别为 $T = 20$ 和 $h = 0.001$. 系统的初始条件选取为 $x(0) = \text{col}\{3, 0\}$. 图3给出了与已有文献的仿真对比结果. 仿真结果显示, 本文的近似解输入法、传统事件触发方法^[1, 13]、指数衰减法^[12, 14-16]、指数逼近法^[17]所产生的事件数分别为18, 38, 29, 28. 显然, 本文所提出的方法策略(18)比现有方法策略更能减少采样数量.

接下来, 比较本文中基于近似解输入法的动态触发方案(22)与文献[18]的仿真结果. 简便起见, 取式(21)中的函数 $\phi(s) = s$, 常数 $\theta = 1$. 仿真结果如图4所示. 仿真中, 本文中动态触发条件(22)产生的事件数为14次, 而文献[18]中的方法为43次, 约是本文方法的3

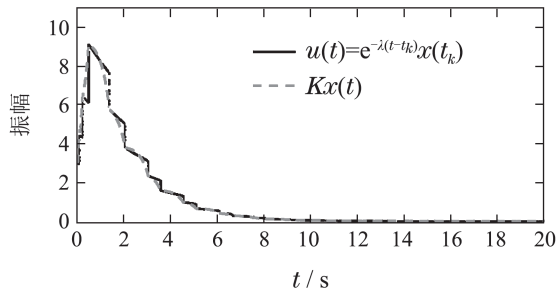
倍.



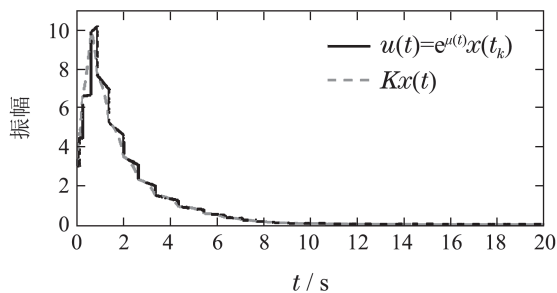
(a) 近似解输入法(18)



(b) 传统事件触发方法^[1, 13]



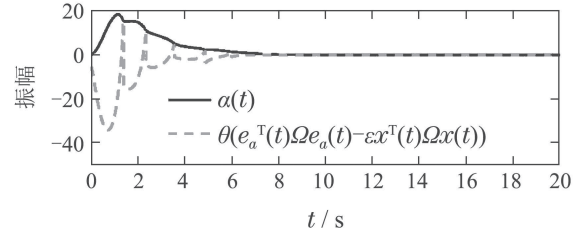
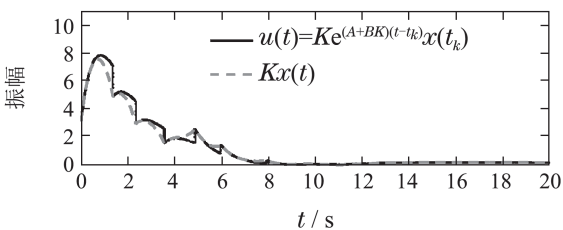
(c) 指数衰减法^[12, 14, 16, 18]



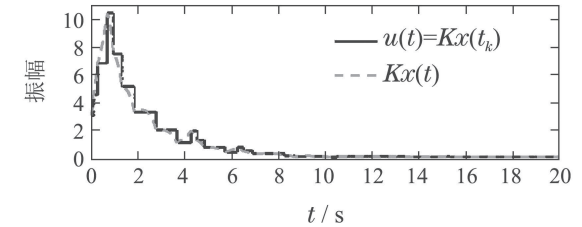
(d) 指数逼近法^[17]

图3 控制器响应

Fig. 3 The responses of controller



(a) 本文动态触发方法(22)



(b) 文献[18]的动态触发方法

图4 控制器和动态变量 $\alpha(t)$ 的响应

Fig. 4 The responses of controller and dynamic variable $\alpha(t)$

4 结论

本文针对带有不确定参数的利普希茨非线性系统的事件触发控制问题, 提出了基于近似解输入法的控制策略. 通过对非线性进行系统线性化处理, 该方法将确定性线性系统的局部解作为近似解, 构造了相应的事件触发条件和控制器, 并给出了相应的稳定性判据. 理论分析表明, 本文方法可以避免Zeno现象, 且在一定条件下可以增大最小事件间隔. 本文还将所提方法结合动态触发控制方案作进一步推广, 提高了事件触发阈值, 并得到了相应的动态触发条件和系统稳定性条件. 实验仿真表明, 本文方法相比已有方法, 可以减少数倍的事件发生次数, 进而有利于降低网络的通讯负担.

参考文献:

- [1] TABUADA P. Event-triggered real-time scheduling of stabilizing control tasks. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2007, 52(9): 1680 – 1685.
- [2] YANG Feisheng, WANG Jing, PAN Quan, et al. Resilient event-triggered control of grid cyber-physical systems against cyber attack. *Acta Automatica Sinica*, 2019, 45(1): 110 – 119.
(杨飞生, 汪璟, 潘泉, 等. 网络攻击下信息物理融合电力系统的弹性事件触发控制. *自动化学报*, 2019, 45(1): 110 – 119.)
- [3] PROSKURNIKOV A, MAZO M. Lyapunov event-triggered stabilization with a known convergence rate. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2020, 65(2): 507 – 521.
- [4] DU Zhaoping, YUAN Wenrong. Event-triggered controller design of networked cascade control systems. *Control and Decision*, 2018,

- 33(8): 1527 – 1531.
(杜昭平, 袁文荣. 网络串级控制系统的事件触发控制器设计. 控制与决策, 2018, 33(8): 1527 – 1531)
- [5] YUE D, TIAN E, HAN Q. A delay system method for designing event-triggered controllers of networked control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, 58(2): 475 – 481.
- [6] ZHANG X, HAN Q, GE X, et al. Networked control systems: a survey of trends and techniques. *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, 2020, 7(1): 1 – 17.
- [7] XU W, DANIEL W, LI L, et al. Event-triggered schemes on leader-following consensus of general linear multiagent systems under different topologies. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2017, 47(1): 212 – 223.
- [8] CHEN Shiming, SHAO Sai. Distributed event-triggered fixed-time consensus control for multi-agent systems with nonlinear uncertainties. *Control Theory and Applications*, 2019, 36(10): 1606 – 1614.
(陈世明, 邵赛. 基于事件触发非线性多智能体系统的固定时间一致性, 控制理论与应用, 2019, 36(10): 1606 – 1614.)
- [9] WANG Jie, MA Xiao, ZONG Qun, et al. Trajectory tracking and sliding mode event-triggered control for a quadrotor unmanned aerial vehicle. *Control Theory and Applications*, 2019, 36(7): 1083 – 1089
(王婕, 马晓, 宗群, 等. 四旋翼无人飞行器的轨迹跟踪与滑模事件驱动控制, 控制理论与应用, 2019, 36(7): 1083 – 1089.)
- [10] LI Hui, LIU Yungang, HUANG Yaxin. Adaptive stabilization via dynamic event-triggered output feedback for uncertain nonlinear system. *Control Theory and Applications*, 2019, 36(11): 1871 – 1878.
(李会, 刘允刚, 黄亚欣. 不确定非线性系统自适应动态事件触发输出反馈镇定, 控制理论与应用, 2019, 36(11): 1871 – 1878.)
- [11] LI Y, YANG G. Observer-based fuzzy adaptive event-triggered control co-design for a class of uncertain nonlinear systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2018, 26(3): 1589 – 1599.
- [12] RONG N, WANG Z. Fixed-time stabilization for IT2 T-S fuzzy interconnected systems via event-triggered mechanism: an exponential gain method. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2020, 28(2): 246 – 258.
- [13] MOREIRA L, GROFF L, GOMES D. Event-triggered state-feedback control for continuous-time plants subject to input saturation. *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, 2016, 27: 473 – 484.
- [14] DING S, WANG Z, ZHANG H. Event-triggered stabilization of neural networks with time-varying switching gains and input saturation. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2018, 29(10): 5045 – 5056.
- [15] FAN Q, YANG G. Sampled-data output feedback control based on a new event-triggered control scheme. *Information Sciences*, 2017, 414: 306 – 318.
- [16] AHMED-ALI T, FRIDMAN E, GIRI F, et al. Using exponential time-varying gains for sampled-data stabilization and estimation. *Automatica*, 2016, 67: 244 – 251.
- [17] DING S, WANG Z, ZHANG H. Event-triggered control for a class of nonlinear systems: an exponential approximation method. *IET Control Theory and Applications*, 2018, 12(10): 1491 – 1496.
- [18] GIRARD A. Dynamic triggering mechanisms for event-triggered control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2015, 60(7): 1992 – 1997.

作者简介:

丁三波 副教授, 博士生导师, 目前研究方向为时滞神经动力系统分析、网络化控制与信息安全等, E-mail: dingsanbo@163.com;

刘旭 本科生, 目前研究方向为网络化控制与信息安全, E-mail: limm@sina.com.cn;

王勇 硕士研究生, 目前研究方向为复杂动态网络的同步控制与分析, E-mail: wy181511@163.com;

杨德东 副教授, 博士生导师, 目前研究方向为模糊控制、网络化控制、机器人视觉等, E-mail: ydd12677@163.com.