概率布尔控制网络的集可控

苟志丽, 徐 勇†, 王金环
(河北工业大学 理学院, 天津 300401)

摘要: 本文研究概率布尔控制网络的集可控性问题. 首先, 利用矩阵半张量积方法, 得到概率布尔控制网络的代数表示. 其次, 借助一个新的算子构造不同的可控矩阵, 进而通过可控矩阵考虑自由控制序列和网络输入控制下概率布尔控制网络的集可控性问题, 得到了概率布尔控制网络集可控性的充要条件. 最后, 给出数值例子说明本文结果的有效性.

关键词: 概率布尔控制网络; 集可控性; 半张量积
引用格式: 苟志丽, 徐勇, 王金环. 概率布尔控制网络的集可控. 控制理论与应用, 2021, 38(5): 689 – 696
DOI: 10.7641/CTA.2020.00457

Set controllability of probabilistic Boolean control networks

GOU Zhi-li, XU Yong†, WANG Jin-huan
(School of Science, Hebei University of Technology, Tianjin 300401, China)

Abstract: In this paper, the set controllability of probabilistic Boolean control networks (PBCNs) is studied. Firstly, by using semi-tensor product of matrices, the algebraic representation of PBCNs is obtained. Secondly, different controllable matrices are constructed by means of a new operator, then the set controllability of PBCNs under free control sequence and network input control can be considered with the help of the controllable matrices. The necessary and sufficient conditions for set controllability of PBCNs are obtained. Finally, numerical examples are given to illustrate the effectiveness of the results.

Key words: probabilistic Boolean control networks; set controllability; semi-tensor product
Citation: GOU Zhili, XU Yong, WANG Jinhuan. Set controllability of probabilistic Boolean control networks. *Control Theory & Applications*, 2021, 38(5): 689 – 696

1 引言

布尔网络(Boolean networks, BNs)是Kauffman于1969年提出的用于复杂非线性生物系统建模的一类逻辑动态系统[1]. BNs由一组离散时间变量组成, 每个变量只能取0或1, 其表示一个基因的活性. 基因间高度结构化的相互作用可以通过布尔函数来描述, 布尔函数通过特定的逻辑规则确定每个基因的状态. BNs已经被证实是描述、模拟和分析基因调控网络、社会系统和神经网络的重要工具[2–5].

最近, Cheng等人首先提出两个任意维数矩阵相乘的运算, 即矩阵的半张量积(semi-tensor product of matrices, STP)[6]. STP的显著优点是可以将BNs转换成一个代数系统, 从而更好地研究BNs的相关问题. 带有外部输入的BNs称为布尔控制网络(Boolean control networks, BCNs). 文献[6–7]为研究BCNs中许多经典控制理论问题提供了有力帮助. 利用STP方法可以将BCNs转换为标准的离散时间线性系统进行研究[8]. 同时在BNs和BCNs中应用STP方法也得到许多重要的结果, 如稳定性[9–10]、可观测性[11–12]、可控性[13–14]、最优控制[15–16]以及同步问题[17]等.

概率布尔网络(probabilistic Boolean networks, PBNs)是Shmulevich等人于2002年提出的模型[3], 该模型既具有BNs的特性, 又能处理数据和模型选择中的不确定性. PBNs本质上是一类BNs的集合, 其中在任意一个离散时间点, 状态以一定的概率按照其中某个BN的规则转化. BCNs描述遗传调控网络的许多特征, 是没有随机现象的确定性网络. 概率布尔控制网络(probabilistic Boolean control networks, PBCNs)考虑了随机现象, 是BCNs的一个非常有意义的扩展. 在PBCNs上已经得到了许多有趣的结果, 例如弱可达

收稿日期: 2020−07−16; 录用日期: 2020−12−11.
†通信作者. E-mail: xuyong@hebut.edu.cn; Tel.: +86 13034349057.
本文责任编委: 李少远.
河北省自然科学基金项目(F2018202075)资助.
Supported by the Natural Science Foundation of Hebei Province (F2018202075).

性[18]、可控性[19]、集稳定性[20]和输出跟踪控制问题[21]等.

可控性作为系统的一种结构性质, 是系统科学和控制理论的基本概念. 文献[22]研究BCNs中除禁止状态外的任意两个状态间的可控性以便更好地设计外部控制序列操纵生物系统. 文献[23]研究了带有牵制控制的BCNs的可控性. 文献[24]研究BCNs集成系统下的可控性, 并给出判定可控性的充要条件. 文献[19]讨论了开环控制和闭环控制下PBNs的可控性问题, 但文献中提出的可控性准则只适用于两个确定的状态. 文献[25]通过构造可达矩阵研究PBCNs的能控性和镇定性并给出相应的充要条件. 文献[26]研究具有禁止状态的PBCNs的可控性.

此外, 集可控性也是一个重要概念, 其与一般可控性的不同之处在于, 可控性表示系统可控至某个状态, 而集可控性表示系统可控至某个状态集合. 文献[27]首次提出BCNs的集可控性概念, 并通过集可控性验证可观性, 集可控性结果为文献[22]中应用结果的推广. 文献[28]研究同时具有自由逻辑输入控制和网络输入控制的BCNs的可控性, 并将其转换为一个集可控性问题求解. 文献[29]研究切换布尔控制网络的集可控性, 将集镇定问题和切换调节问题转换为集可控问题求解. 文献[30]研究脉冲概率布尔控制网络(impulsive probabilistic Boolean control networks, IPBCNs)的有限时间可控性和集可控性. 文献[31]研究具有脉冲效应的布尔控制网络(Boolean control networks with impulsive effects, BCN–IE)的集可控性并以此方法解决了具有混合型控制的BCN–IE可控性和BCN–IE的输出可控性两个问题.

基于上述讨论, 本文针对PBCNs集可控性问题提出两类不同的控制方法. 相比于BCNs, 由于状态变化的不确定性, 针对PBCNs集可控性的研究更加复杂. 同时与IPBCNs的集可控性研究相比, 本文采取的研究方法不同. 本文主要贡献如下: 1) 借助一个新的算子构造概率集可控矩阵, 得到PBCNs在自由控制序列下集可控的充要条件; 2) 由该算子构造输入概率集可控矩阵, 给出带有输入网络控制的PBCNs集可控的充要条件. 根据已有文献, PBCNs在集可控性方面结果还很少见.

本文的其余部分安排如下: 第2部分列出一些基本符号和STP的预备知识. 第3部分提出PBCNs在自由控制序列和网络输入控制下的集可控问题, 并给出本文的主要结果. 第4部分通过数值例子验证所得结果的正确性与有效性. 第5部分给出本文的结论.

2 预备知识

为了叙述方便, 本文用到的相关符号如下列出:

1) $\mathcal{M}_{m\times n}$: $m\times n$维矩阵集合.

2) $\mathrm{Col}(A)$: 矩阵A的列集合. $\mathrm{Col}_i(A)$: 矩阵A的第i列.

3) $\Delta_n:=\{\delta_n^i|i=1,2,\cdots,n\}$, δ_n^i: 单位矩阵I_n的第i列.

4) 若$\mathrm{Col}(L)\subset\Delta_m$, 矩阵$L\in\mathcal{M}_{m\times n}$称为逻辑矩阵. $\mathcal{L}_{m\times n}$: $m\times n$维逻辑矩阵集合. 若$L\in\mathcal{L}_{m\times n}$, 则$L=[\delta_m^{i_1}\ \delta_m^{i_2}\ \cdots\ \delta_m^{i_n}]$, 简写为$L=\delta_m[i_1\ i_2\ \cdots\ i_n]$.

5) $\mathcal{D}:=\{0,1\}$,
$$\mathcal{D}^n:=\underbrace{\mathcal{D}\times\mathcal{D}\times\cdots\times\mathcal{D}}_{n}.$$

6) $1_k:=\{\underbrace{1,1,\cdots,1}_{k}\}^{\mathrm{T}}$.
$$1_{p\times q}:=\{\underbrace{1_p,1_p,\cdots,1_p}_{q}\}.$$

7) $\Xi_m:=\{1,2,\cdots,2^m\}$.

8) α : 从$\Omega=[0,1]$取值的随机布尔变量. 定义$\Lambda=\{[\alpha\ \ 1-\alpha]^{\mathrm{T}}|\alpha\in\Omega\}$, 表示$\alpha$为向量形式.
$$\Lambda_n=\{\upsilon=(\upsilon_1\ \cdots\ \upsilon_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^n|\upsilon_i\geqslant 0,\sum_{i=1}^{n}\upsilon_i=1\}.$$

9) 矩阵$A\in\mathcal{M}_{m\times n}$的列元素由$\Lambda_m$组成, 称矩阵$A$为随机逻辑矩阵. $\mathcal{L}^r_{m\times n}$: $m\times n$维随机逻辑矩阵集合.

10) $A=(A_{ij})\in\mathcal{M}_{m\times n}$, $0\leqslant A_{ij}\leqslant 1$, 定义$\lfloor A\rfloor=(\lfloor A_{ij}\rfloor)$, 其中$\lfloor\ \rfloor$是floor函数.

11) 矩阵$A=(A_{ij}),B=(B_{ij})\in\mathcal{M}_{m\times n}$, 定义
$$A_{ij}\vee B_{ij}=\max\{A_{ij},B_{ij}\},$$
则$A\vee B=(A_{ij}\vee B_{ij})$.

12) $\mathcal{B}_{m\times n}$: $m\times n$维布尔矩阵集合.

13) $M\in\mathcal{B}_{r\times s},N\in\mathcal{B}_{s\times t}$, $M\times_{\mathcal{B}}N=A$为布尔积, 其中$a_{i,j}=\sum\limits_{\mathcal{B}\ k=1}^{s}m_{i,k}\wedge n_{k,j}$.

14) $A\in\mathcal{B}_{n\times n}$, $A^{(k)}:=\underbrace{A\times_{\mathcal{B}}A\times_{\mathcal{B}}\cdots\times_{\mathcal{B}}A}_{k}$.

15) $A,B\in\mathcal{L}_{n\times n}$,
$$\sum_{j=1}^{n}{}_{\vee}\sum_{i=1}^{n}{}_{\vee}B_jA_i=\sum_{j=1}^{n}{}_{\vee}(B_jA_1\vee B_jA_2\vee\cdots\vee B_jA_n).$$

定义 1[6] 矩阵有$A\in\mathcal{M}_{m\times n},B\in\mathcal{M}_{p\times q}$, $t=\mathrm{lcm}(n,p)$是$\{n,p\}$的最小公倍数. 矩阵A,B的半张量积记为
$$A\ltimes B:=(A\otimes I_{\frac{t}{n}})(B\otimes I_{\frac{t}{p}}),$$
其中$\otimes$表示Kronecker积.

注 1 STP是普通矩阵乘积的推广. 在下文无混淆情况下, 可省略"$\ltimes$".

设x为逻辑变量, 即$x\in\mathcal{D}$. 用向量表示逻辑值的结构, 分别表示为$1\sim\delta_2^1$和$0\sim\delta_2^2$, 即有$\mathcal{D}\sim\Delta_2$和$\mathcal{D}^n$

$\sim \Delta_{2^n}$, 其中$\sim$表示同一事物的两种不同表示形式.

引理 1[6]　设$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$为一个逻辑函数, 在向量形式下$f: \mathcal{D}^n \to \mathcal{D}$, 存在唯一的逻辑矩阵$M_f \in \mathcal{L}_{2\times 2^n}$, 称为$f$的结构矩阵, 使得

$$f(x_1, \cdots, x_n) = M_f x_1 x_2 \cdots x_n = M_f \ltimes_{i=1}^n x_i.$$

引理 2[6]　设$x = \ltimes_{i=1}^n x_i, x_i \in \Delta_2, i = 1, 2, \cdots, n.$

$$x^2 = \Phi_n x,$$

其中

$$\Phi_n = \prod_{i=1}^n I_{2^{i-1}} \otimes [(I_2 \otimes W_{[2,2^{n-i}]})M_r] \in \mathcal{L}_{2^{2n}\times 2^n},$$

$$x_i^2 = M_r\, x_i,$$

其中$M_r = \delta_4[1, 4]$为降阶矩阵.

3　主要内容

首先给出PBCNs的代数表示, 其次考虑在自由控制序列下PBCNs的集可控性问题, 最后考虑输入网络控制下PBCNs的集可控性问题.

3.1　PBCNs的代数表示

PBCNs表示如下:

$$\begin{cases} x_1(t+1) = f_1(u_1(t), \cdots, u_m(t), x_1(t), \\ \qquad\qquad \cdots, x_n(t)), \\ x_2(t+1) = f_2(u_1(t), \cdots, u_m(t), x_1(t), \\ \qquad\qquad \cdots, x_n(t)), \\ \qquad \vdots \\ x_n(t+1) = f_n(u_1(t), \cdots, u_m(t), x_1(t), \\ \qquad\qquad \cdots, x_n(t)), \end{cases} \tag{1}$$

其中: $x_i(t)$和$u_j(t) \in \mathcal{D}, i = 1, 2, \cdots, n, j = 1, 2, \cdots, m$是逻辑状态和输入控制状态; $f_i: \mathcal{D}^{m+n} \to \mathcal{D}$是逻辑函数; $t = 0, 1, \cdots,$是离散时间.

逻辑函数f_i可以是l_i种可能的模型$f_i^1, f_i^2, \cdots, f_i^{l_i}$中的一个, 其中$f_i$为$f_i^{\omega_i}$时的概率为$\mathrm{P}_i^{\omega_i}, \omega_i = 1, 2, \cdots, l_i$. 定义概率表示为

$$\mathrm{P}\{f_i = f_i^{\omega_i}\} = \mathrm{P}_i^{\omega_i} \geqslant 0,$$
$$i = 1, 2, \cdots, n,\ \omega_i = 1, 2, \cdots, l_i,$$

即$f_i \in \{f_i^1, f_i^2, \cdots, f_i^{l_i}\}$和$\sum_{\omega_i=1}^{l_i} \mathrm{P}_i^{\omega_i} = 1, i = 1, 2, \cdots, n$.

注 2　在本文中, 考虑的概率布尔控制网络是独立的, 则意味着$f_1, f_2, \cdots, f_n$是独立的, 即有

$$\mathrm{P}\{f_{i_1} = f_{i_1}^{\omega_{i_1}}, f_{i_2} = f_{i_2}^{\omega_{i_2}}\} = \mathrm{P}\{f_{i_1} = f_{i_1}^{\omega_{i_1}}\}\mathrm{P}\{f_{i_2} = f_{i_2}^{\omega_{i_2}}\},$$

其中$i_1 \neq i_2,\ i_1, i_2 \in \{1, 2, \cdots, n\}$.

由于模型假设有$\prod_{i=1}^n l_i$种可能的网络, 故使用矩阵K表示可能模型的指标集.

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & l_n \\ 1 & 1 & \cdots & 2 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 2 & l_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ l_1 & l_2 & \cdots & l_{n-1} & l_n \end{bmatrix},$$

其中$K \in \mathcal{M}_{N\times n}$和$N = \prod_{i=1}^n l_i$. 矩阵$K$的每行代表一个可能的网络, 其概率为$\mathrm{P}_\lambda = \mathrm{P}\{选择网络\lambda\} = \prod_{i=1}^n \mathrm{P}_i^{K_{\lambda i}}$, 其中$\lambda \in \{1, 2, \cdots, N\}$, $K_{\lambda i}$是矩阵K的第(λ, i)个元素.

由引理1, 对每个逻辑函数$f_i^{K_{\lambda i}}, i = 1, 2, \cdots, n$. 其对应结构矩阵为$M_i^{K_{\lambda i}}$. 令$x(t) = \ltimes_{i=1}^n x_i(t)$, $u(t) = \ltimes_{j=1}^m u_j(t)$. 则系统(1)转换为代数形式

$$x_i(t+1) = M_i^{K_{\lambda i}} u(t)x(t),\ i = 1, 2, \cdots, n, \tag{2}$$

则有$x(t+1) = L_\lambda u(t)x(t), \lambda = 1, 2, \cdots, N$, 其中

$$L_\lambda = M_1^{K_{\lambda 1}} \prod_{i=2}^n [(I_{2^{m+n}} \otimes M_i^{K_{\lambda i}})\Phi_{m+n}] \in \mathcal{L}_{2^n\times 2^{n+m}}^r.$$

令E表示$x(t+1)$的期望值, 得

$$\mathrm{E}x(t+1) = Lu(t)\mathrm{E}x(t), \tag{3}$$

其中$L = \sum_{\lambda=1}^N \mathrm{P}_\lambda L_\lambda \in \mathcal{L}_{2^n\times 2^{n+m}}^r$.

3.2　PBCNs的集可控

由式(3)可知

$$\mathrm{E}x(t+1) = Lu(t)\mathrm{E}x(t),$$

其中$L \in \mathcal{L}_{2^n\times 2^{n+m}}^r$. $Lu(t) \in \mathcal{L}_{2^n\times 2^n}^r$, 将$L$按控制分为$2^m$块, 即$L = [L_1\ \ L_2\ \ \cdots\ \ L_{2^m}]$, 其中$L_i \in \mathcal{L}_{2^n\times 2^n}^r$, $i \in \varXi_m$.

令$\kappa_{2^m} = \{L_1, L_2, \cdots, L_{2^m}\}$, 其中下标$2^m$表示$\kappa_{2^m}$中矩阵块数量.

定义运算符$\langle\cdot\rangle$为

$$\langle\kappa_{2^m}\rangle = L_1 \vee L_2 \vee \cdots \vee L_{2^m},$$

其中$\langle\kappa_{2^m}\rangle \in \mathcal{M}_{2^n\times 2^n}$.

定义

$$\kappa_{2^m}^t = \{L_1, L_2, \cdots, L_{2^m}\}^t = \{L_{i_t}L_{i_{t-1}}\cdots L_{i_1} | i_l \in \varXi_m, l = 1, 2, \cdots, t\},$$

其中: $\kappa_{2^m}^t$中的任何元素维数均为$2^n \times 2^n$, 即$L_{i_t} \times$

$L_{i_{t-1}}\cdots L_{i_1}\in\mathcal{L}^r_{2^n\times 2^n}$. 此时$\kappa^t_{2^m}$中含有$2^{mt}$个矩阵, 是维数为$2^n\times 2^n$随机逻辑矩阵集合. 即

$$\langle\kappa^t_{2^m}\rangle=\langle\{L_1,L_2,\cdots,L_{2^m}\}^t\rangle=\sum_{i_t=1}^{2^m}{}_{\vee}\sum_{i_{t-1}=1}^{2^m}{}_{\vee}\cdots\sum_{i_1=1}^{2^m}{}_{\vee}L_{i_t}L_{i_{t-1}}\cdots L_{i_1}\in\mathcal{L}^r_{2^n\times 2^n}.$$

令

$$M^t=\lfloor\langle\kappa^t_{2^m}\rangle\rfloor, \tag{4}$$

其中$M^t\in\mathcal{B}_{2^n\times 2^n}$.

令

$$C=\sum_{\mathcal{B}\ t=1}^{2^n}M^t, \tag{5}$$

其中$C\in\mathcal{B}_{2^n\times 2^n}$, 称矩阵$C$为概率可控矩阵.

首先给出系统(1)可控的定义.

定义 2 考虑PBCNs, 设初始状态$x_0\in\Delta_{2^n}$和目的状态$x_{\rm d}\in\Delta_{2^n}$.

1) 若存在一个自由控制序列$\{u(0),u(1),\cdots,u(t-1)\}$使$\mathrm{P}\{x_{\rm d}=x(t)|x_0=x(0)\}=1$成立, 则称$x_{\rm d}$是从初始状态$x_0$在$t$时刻依概率1可控的.

2) t时刻概率1可达集是指从初始状态经时间t依概率1可达的状态集合, 记为$R_t(x_0)$. 概率为1的整体可达集是指从初始状态依概率1可达的状态集合, 记为$R(x_0)$.

根据上述定义以及概率可控矩阵可得以下定理.

定理 1 考虑具有自由控制序列的PBCNs系统(1), 其对应概率可控矩阵$C=(C_{ij})$, 则

1) 目的状态$x_{\rm d}=\delta^i_{2^n}$是从初始状态$x_0=\delta^j_{2^n}$依概率1可控的当且仅当$C_{ij}=1$;

2) 初始状态$x_0=\delta^j_{2^n}$是依概率1可控的当且仅当$\mathrm{Col}_j(C)=1_{2^n}$;

3) 系统(1)依概率1可控当且仅当$C=1_{2^n\times 2^n}$.

证 $x(t+1)$的期望值$\mathrm{E}x(t+1)$满足

$$\mathrm{E}x(t+1)=[L_1\ \ L_2\ \ \cdots\ \ L_{2^m}]u(t)\mathrm{E}x(t)\in\{L_1,L_2,\cdots,L_{2^m}\}\mathrm{E}x(t).$$

直接计算可得

$$\mathrm{E}x(1)=[L_1\ \ L_2\ \ \cdots\ \ L_{2^m}]u(0)\mathrm{E}x(0)\in\{L_1,L_2,\cdots,L_{2^m}\}\mathrm{E}x(0),$$

$$\mathrm{E}x(2)=[L_1\ \ L_2\ \ \cdots\ \ L_{2^m}]u(1)\mathrm{E}x(1)\in\{L_1,L_2,\cdots,L_{2^m}\}\mathrm{E}x(1)\in\{L_1,L_2,\cdots,L_{2^m}\}^2x(0),$$

重复上面迭代过程, 可得

$$\mathrm{E}x(t)=[L_1\ \ L_2\ \ \cdots\ \ L_{2^m}]u(t-1)\mathrm{E}x(t-1)\in\{L_1,L_2,\cdots,L_{2^m}\}^tx(0)\in\{L_{i_t}L_{i_{t-1}}\cdots L_{i_1}|i_l\in\Xi,l=1,2,\cdots,t\}x(0).$$

若存在指标$\{i_1,i_2,\cdots,i_t\}$使得$x(t)=L_{i_t}L_{i_{t-1}}\times\cdots L_{i_1}x(0)$成立, 则自由控制序列为

$$u(0)=\delta^{i_1}_{2^m},\ u(1)=\delta^{i_2}_{2^m},\ \cdots,\ u(t-1)=\delta^{i_t}_{2^m},$$

其控制序列使得系统(1)从初始状态x_0依概率1可达目的状态$x_{\rm d}$. 因此至少存在一种由自由控制序列使系统(1)从初始状态x_0依概率1可达目的状态$x_{\rm d}$. 同时回顾运算符$\langle\cdot\rangle$的定义, 则可化简得

$$\mathrm{E}x(t)=\sum_{i_t=1}^{2^m}{}_{\vee}\sum_{i_{t-1}=1}^{2^m}{}_{\vee}\cdots\sum_{i_1=1}^{2^m}{}_{\vee}L_{i_t}L_{i_{t-1}}\cdots L_{i_1}=\langle\{L_1,L_2,\cdots,L_{2^m}\}^t\rangle x(0)=\langle\kappa^t_{2^m}\rangle x(0).$$

故由floor函数得$x(t)=\lfloor\langle\kappa^t_{2^m}\rangle\rfloor x(0)$, 即得

$$1=x^{\rm T}(t)M^tx(0).$$

在系统(1)中必存在一条由初始状态x_0在第t步依概率1可达目的状态$x_{\rm d}$的路径. 即有

$$1=x^{\rm T}(t)\sum_{\mathcal{B}\ t=1}^{2^n}M^tx(0),\ 1=x^{\rm T}(t)Cx(0).$$

故系统(1)中必存在一条由初始状态x_0依概率1可达目的状态$x_{\rm d}$的路径.

若从初始状态$x_0=x(0)=\delta^j_{2^n}$依概率1可控到目的状态$x_{\rm d}=x(t)=\delta^i_{2^n}$, 即$1=(\delta^i_{2^n})^{\rm T}C(\delta^j_{2^n})$. 则存在自由控制序列$\{u(0),u(1),\cdots,u(t-1)\}$使$P\{x_{\rm d}=x(t)|x_0=x(0)\}=1$成立.

同理可证式(2)和式(3)成立. 证毕.

为了考虑集可控性问题, 首先引入指标列向量给定系统(1)的初始指标矩阵和目的指标矩阵.

现给定一个具有n个结点的PBCNs. 状态集表示为$N=\{1,2,\cdots,2^n\}$, 令$s\in 2^N$, s是给定的状态集合, 引入指标列向量$V(s)=[(V(s))_1\ \ (V(s))_2\ \ \cdots\ \ (V(s))_{2^n}]\in\mathbb{R}^{2^n}$刻画$s$的特征, 其中

$$(V(s))_i=\begin{cases}1,\ i\in s,\\0,\ i\notin s.\end{cases}$$

PBCNs的初始集族为P^0和目的集族为$P^{\rm d}$, 可表示为

$$P^0=\{s^0_1,s^0_2,\cdots,s^0_\alpha\}\subset 2^N,$$

$$P^{\rm d}=\{s^{\rm d}_1,s^{\rm d}_2,\cdots,s^{\rm d}_\beta\}\subset 2^N.$$

由指标列向量将初始集族P^0和目的集族$P^{\rm d}$定义为初始指标矩阵J_0和目的指标矩阵$J_{\rm d}$, 即

$$J_0=[V(s^0_1)\ \ V(s^0_2)\ \ \cdots\ \ V(s^0_\alpha)]\in\mathcal{B}_{2^n\times\alpha},$$

$$J_{\rm d}=[V(s^{\rm d}_1)\ \ V(s^{\rm d}_2)\ \ \cdots\ \ V(s^{\rm d}_\beta)]\in\mathcal{B}_{2^n\times\beta}. \tag{6}$$

由式(5)–(6)定义矩阵, 称为概率集可控矩阵. 即

$$C_{\mathrm{s}} = J_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}} \times_{\mathcal{B}} C \times_{\mathcal{B}} J_0 \in \mathcal{B}_{\beta\times\alpha}. \tag{7}$$

定义 3　具有初始集族P^0和目的集族P^{d}的系统(1). 满足

1) 系统(1)由$s_j^0 \in P^0$到$s_i^{\mathrm{d}} \in P^{\mathrm{d}}$依概率1集可控当且仅当存在$x_0 \in s_j^0$和$x_{\mathrm{d}} \in s_i^{\mathrm{d}}$满足$x_0$到$x_{\mathrm{d}}$依概率1可控;

2) 系统(1)在$s_j^0 \in P^0$处依概率1集可控当且仅当对任意的$s_i^{\mathrm{d}} \in P^{\mathrm{d}}$, 系统(1)均由$s_j^0$到$s_i^{\mathrm{d}}$依概率1可控;

3) 系统(1)依概率1集可控当且仅当在任意的$s_j^0\in P^0$处均依概率1集可控.

根据上述定义以及概率集可控矩阵得以下定理.

定理 2　具有初始集族P^0和目的集族P^{d}的系统(1). 其相应的概率集可控矩阵为$C_s = (C_s)_{ij}$, 则

1) 系统(1)由$s_j^0 \in P^0$到$s_i^{\mathrm{d}} \in P^{\mathrm{d}}$依概率1集可控当且仅当$(C_s)_{ij} = 1$;

2) 系统(1)在$s_j^0 \in P^0$处依概率1集可控当且仅当$\mathrm{Col}_j(C_s) = 1_\beta$;

3) 系统(1)依概率1集可控当且仅当$C_s = 1_{\beta\times\alpha}$.

证　必要性. 考虑初始指标矩阵J_0和目的指标矩阵J_{d}. 概率可控矩阵C的定义为

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1\times 2^n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2\times 2^n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{2^n\times 1} & C_{2^n\times 2} & \dots & C_{2^n\times 2^n} \end{bmatrix}.$$

由概率集可控矩阵C_s的定义可知

$$C_s = J_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}} \times_{\mathcal{B}} C \times_{\mathcal{B}} J_0 = \begin{bmatrix} C_{a_1b_1} & C_{a_1b_2} & \dots & C_{a_1b_\alpha} \\ C_{a_2b_1} & C_{a_2b_2} & \dots & C_{a_2b_\alpha} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{a_\beta b_1} & C_{a_\beta b_2} & \dots & C_{a_\beta b_\alpha} \end{bmatrix}.$$

因系统(1)满足由初始状态$\delta_{2^n}^j$到目的状态$\delta_{2^n}^i$依概率1集可控. 设初始状态$\delta_{2^n}^j \in s_j^0, j = 1, 2, \cdots, \alpha$, 目的状态$\delta_{2^n}^i \in s_i^{\mathrm{d}}, i = 1, 2, \cdots, \beta$, 故概率集可控矩阵$C_s$是由概率可控矩阵$C$中选取其相应位置构成, 即为$C_{a_ib_j}$, 则有$(C_s)_{ij} = C_{a_ib_j}$. 故由概率集可控矩阵知, $(C_s)_{ij} = C_{a_ib_j} = 1$, 即证.

充分性. 由概率集可控矩阵C_s知

$$\begin{aligned} &(C_s)_{ij} = \\ &(J_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}} \times_{\mathcal{B}} C \times_{\mathcal{B}} J_0)_{ij} = \\ &\sum_{\mathcal{B}\ \alpha=1}^{2^n} [(J_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}} \times_{\mathcal{B}} C)_{i\alpha} \wedge (J_0)_{\alpha j}] = \\ &\sum_{\mathcal{B}\ \alpha=1}^{2^n} [\sum_{\mathcal{B}\ \beta=1}^{2^n} (J_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}})_{i\beta} \wedge (C)_{\beta\alpha} \wedge (J_0)_{\alpha j}] = \\ &\sum_{\mathcal{B}\ \alpha=1}^{2^n} \sum_{\mathcal{B}\ \beta=1}^{2^n} [(J_{\mathrm{d}})_{\beta i} \wedge (C)_{\beta\alpha} \wedge (J_0)_{\alpha j}]. \end{aligned}$$

由上可知, 若$(C_s)_{ij} = 1$当且仅当存在$\alpha, \beta \in \{1, 2, \cdots, 2^n\}$满足$(J_{\mathrm{d}})_{\beta i} = (C)_{\beta\alpha} = (J_0)_{\alpha j} = 1$. 即存在$\delta_{2^n}^\beta \in s_i^{\mathrm{d}}$和$\delta_{2^n}^\alpha \in s_j^0$满足由初始状态$\delta_{2^n}^\alpha$到目的状态$\delta_{2^n}^\beta$依概率1可控. 故系统(1)由$s_j^0$到$s_i^{\mathrm{d}}$依概率1集可控.

同理可证(2)和(3)成立.　　证毕.

3.3　输入PBCNs的集可控

在本节中, 将系统(1)中的控制看作是满足一定逻辑规则的逻辑变量, 称为输入网络. 如下所示:

$$\begin{cases} u_1(t+1) = g_1(u_1(t), \cdots, u_m(t)), \\ u_2(t+1) = g_2(u_1(t), \cdots, u_m(t)), \\ \quad\vdots \\ u_m(t+1) = g_m(u_1(t), \cdots, u_m(t)), \end{cases} \tag{8}$$

其中$g_r: \mathcal{D}^m \to \mathcal{D}, r = 1, 2, \cdots, m$是逻辑函数. 令$u(t) = \ltimes_{r=1}^m u_r(t)$, 对上述采用结构矩阵法, 控制规则可表示为以下代数形式:

$$u(t+1) = Gu(t),$$

其中$G \in \mathcal{L}_{2^m\times 2^m}$是网络转移矩阵.

定义

$$\tau_{2^m}^t = \{\prod_{l=t-1}^{0} (LG^l)_i | i \in \varXi_m\},$$

$$\langle \tau_{2^m}^t \rangle = \sum_{\vee\, i=1}^{2^m} (\prod_{l=t-1}^{0} (LG^l)_i).$$

令

$$N^t = \lfloor \langle \tau_{2^m}^t \rangle \rfloor,$$

其中$N^t \in \mathcal{B}_{2^n\times 2^n}$.

令

$$D = \sum_{\mathcal{B}\ t=1}^{2^n} N^t, \tag{9}$$

其中$D \in \mathcal{B}_{2^n\times 2^n}$, 称为输入概率可控矩阵.

定理 3　考虑具有输入网络的PBCNs系统(1), 其对应输入概率可控矩阵$D = (D_{ij})$, 则

1) 目的状态$x_{\mathrm{d}} = \delta_{2^n}^i$是从初始状态$x_0 = \delta_{2^n}^j$依概率1可控的当且仅当$D_{ij} = 1$;

2) 初始状态$x_0 = \delta_{2^n}^j$是依概率1可控的当且仅当$\mathrm{Col}_j(D) = 1_{2^n}$;

3) 系统(1)依概率1可控当且仅当$D = 1_{2^n\times 2^n}$.

证　设$u(0) = \delta_{2^m}^i, i = 1, 2, \cdots, 2^m$, 则$x(t+1)$的期望值$\mathrm{E}x(t+1)$满足

$$\begin{aligned} &\mathrm{E}x(1) = Lu(0)\mathrm{E}x(0) = (L)_i x(0), \\ &\mathrm{E}x(2) = Lu(1)\mathrm{E}x(1) = LGu(0)Lu(0)x(0) = \\ &\qquad (LG)_i(L)_i x(0), \end{aligned}$$

重复上面迭代过程, 可得

$$\begin{aligned}\mathrm{E}x(t) = & Lu(t-1)\mathrm{E}x(t-1) = \\ & LG^{t-1}u(0)LG^{t-2}u(0)\cdots x(0) = \\ & (LG^{t-1})_i(LG^{t-2})_i\cdots x(0) = \\ & (\prod_{l=t-1}^{0}(LG^l)_i)x(0).\end{aligned}$$

因此, 可以获得以下方程

$$x(t) = \langle \tau_{2^m}^t \rangle x(0).$$

故由floor函数可得$x(t) = \lfloor \langle \tau_{2^m}^t \rangle \rfloor x(0)$, 即可得

$$1 = x^{\mathrm{T}}(t)N^t x(0).$$

在系统(1)中存在由初始状态x_0在第t步依概率1可达目的状态x_{d}的路径, 即

$$\begin{aligned}1 &= x^{\mathrm{T}}(t)\sum_{\mathcal{B}\ t=1}^{2^n} N^t x(0),\\ 1 &= x^{\mathrm{T}}Dx(0).\end{aligned}$$

故系统(1)必存在由初始状态$x_0 = x(0) = \delta_{2^n}^j$到目的状态$x_{\mathrm{d}} = x(t) = \delta_{2^n}^i$依概率1可控, 即$1 = (\delta_{2^n}^i)^{\mathrm{T}} \times D(\delta_{2^n}^j)$. 则存在输入布尔网络$u(t+1) = Gu(t)$使$\mathrm{P}\{x_{\mathrm{d}} = x(t)|x_0 = x(0)\} = 1$成立.

同理可证(2)和(3)成立. 证毕.

根据式(6)和式(9)定义矩阵, 称为输入概率集可控矩阵, 即有

$$D_s = J_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}} \times_{\mathcal{B}} D \times_{\mathcal{B}} J_0 \in \mathcal{B}_{\beta\times\alpha}. \tag{10}$$

定理 4 具有初始集族P^0和目的集族P^{d}的系统(1), 其输入概率集可控矩阵为$D_s = (D_s)_{ij}$. 则

1) 系统(1)由$s_j^0 \in P^0$到$s_i^{\mathrm{d}} \in P^{\mathrm{d}}$依概率1集可控当且仅当$(D_s)_{ij} = 1$;

2) 系统(1)在$s_j^0 \in P^0$处依概率1集可控当且仅当$\mathrm{Col}_j(D_s) = 1_\beta$;

3) 系统(1)依概率1集可控当且仅当$D_s = 1_{\beta\times\alpha}$.

由于定理4与定理2证明是类似的, 均通过构造相应的可控矩阵, 对系统(1)集可控性进行判定, 证明思路相似, 因此定理4的证明略去.

4 算例分析

在本节中, 使用文献[19]中的例子来验证前面提出的定理2和定理4.

例 1 考虑自由控制序列下PBCNs的集可控性.

$$\begin{cases} x_1(t+1) = f_1(u(t), x_1(t), x_2(t)),\\ x_2(t+1) = f_2(u(t), x_1(t), x_2(t)),\end{cases} \tag{11}$$

其中

$$\begin{cases} f_1^1 = u(t)\wedge(x_1(t)\wedge x_2(t)),\\ f_1^2 = u(t)\wedge(x_1(t)\vee x_2(t)),\end{cases}$$

其概率为$\mathrm{P}(f_1 = f_1^1) = 0.2, \mathrm{P}(f_1 = f_1^2) = 0.8$.

$$\begin{cases} f_2^1 = x_1(t)\leftrightarrow x_2(t),\\ f_2^2 = x_1(t)\wedge x_2(t),\end{cases}$$

其概率为$\mathrm{P}(f_2 = f_2^1) = 0.1, \mathrm{P}(f_2 = f_2^2) = 0.9$. 控制$u(t)$是自由控制序列, 即$u(t)$可以从$\varDelta_2$中自由选择.

模型指标矩阵K和对应模型概率为

$$K = \begin{bmatrix}1&1\\1&2\\2&1\\2&2\end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}_1 &= 0.2\times 0.1 = 0.02,\\ \mathrm{P}_2 &= 0.2\times 0.9 = 0.18,\\ \mathrm{P}_3 &= 0.8\times 0.1 = 0.08,\\ \mathrm{P}_4 &= 0.8\times 0.9 = 0.72.\end{aligned}$$

设$x(t) = x_1(t)x_2(t)$, 则各网络的网络转移矩阵可按标准程序计算. 对于第1个模型, 有

$$\begin{aligned}& x(t+1) = \\ & M_c(I_2\otimes M_c)(I_8\otimes M_e)(I_2\otimes \varPhi_2)u(t)x(t) = \\ & \delta_4[1\ 4\ 4\ 3\ 3\ 4\ 4\ 3]u(t)x(t) \triangleq \\ & L_1u(t)x(t).\end{aligned}$$

其中M_c和M_e可由文献[7]得. 同样地, L_2, L_3, L_4可计算得

$$\begin{aligned}L_2 &= \delta_4[1\ 4\ 4\ 4\ 3\ 4\ 4\ 4],\\ L_3 &= \delta_4[1\ 2\ 2\ 3\ 3\ 4\ 4\ 3],\\ L_4 &= \delta_4[1\ 2\ 2\ 4\ 3\ 4\ 4\ 4],\end{aligned}$$

则可得

$$L = \sum_{\lambda=1}^{4}\mathrm{P}_\lambda L_\lambda = \begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0.8&0.8&0&0&0&0&0\\0&0&0&0.1&1&0&0&0.1\\0&0.2&0.2&0.9&0&1&1&0.9\end{bmatrix}.$$

由计算可得$t = 2^n, t = 1,2,3,4$. 当$t = 1$时,

$$M^1 = \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&1&0\end{bmatrix};$$

当$t = 2,3,4$时,

$$M^2 = M^3 = M^4 = \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix},$$

则可得概率可控矩阵

$$C=\sum_{t=1}^{4}M^t=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\1&1&1&0\end{bmatrix}.$$

假设初始集族P^0和目的集族P^{d}为

$$\begin{cases}P^0=\{s_1^0=\{\delta_4^2\},s_2^0=\{\delta_4^3\}\},\\ P^{\mathrm{d}}=\{s_1^{\mathrm{d}}=\{\delta_4^1,\delta_4^4\}\}.\end{cases}$$

其相应指标矩阵为

$$J_0=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}},\ J_{\mathrm{d}}=[1\ \ 0\ \ 0\ \ 1]^{\mathrm{T}}.$$

则可得概率集可控矩阵

$$C_s=J_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}}\times_{\mathcal{B}}C\times_{\mathcal{B}}J_0=[1\ \ 1].$$

故在自由控制序列下的系统(11)在初始集族P^0和目的集族P^{d}下集可控.

例 2 考虑输入网络控制下PBCNs的集可控性,

$$\begin{cases}x_1(t+1)=f_1(u_1(t),u_2(t),x_1(t),x_2(t)),\\ x_2(t+1)=f_2(u_1(t),u_2(t),x_1(t),x_2(t)),\end{cases}\tag{12}$$

其中

$$\begin{cases}f_1^1=u_1(t)\wedge(x_1(t)\rightarrow x_2(t)),\\ f_1^2=u_1(t)\wedge(x_1(t)\wedge x_2(t)),\end{cases}$$

其概率为$\mathrm{P}(f_1=f_1^1)=0.2,\ \mathrm{P}(f_1=f_1^2)=0.8.$

$$\begin{cases}f_2^1=u_2(t)\leftrightarrow(x_1(t)\wedge x_2(t)),\\ f_2^2=u_2(t)\leftrightarrow(x_1(t)\leftrightarrow x_2(t)),\end{cases}$$

其概率为$\mathrm{P}(f_2=f_2^1)=0.1,\ \mathrm{P}(f_2=f_2^2)=0.9.$ 设控制是由一控制网络决定的, 即

$$\begin{cases}u_1(t+1)=\neg u_1(t),\\ u_2(t+1)=\neg u_2(t),\end{cases}$$

其控制网络$u(t)=u_1(t)u_2(t)$可得结构矩阵为$G=\delta_4[4\ \ 3\ \ 2\ \ 1]$.

各网络的网络转移矩阵按标准程序计算可得

$$L_1=\delta_4[1\ 4\ 2\ 2\ 2\ 3\ 1\ 1\ 3\ 4\ 4\ 4\ 4\ 3\ 3\ 3],$$
$$L_2=\delta_4[1\ 4\ 2\ 1\ 2\ 3\ 1\ 2\ 3\ 4\ 4\ 3\ 4\ 3\ 3\ 4],$$
$$L_3=\delta_4[1\ 4\ 4\ 4\ 2\ 3\ 3\ 3\ 3\ 4\ 4\ 4\ 4\ 3\ 3\ 3],$$
$$L_4=\delta_4[1\ 4\ 4\ 3\ 2\ 3\ 3\ 4\ 3\ 4\ 4\ 3\ 4\ 3\ 3\ 4],$$

则可得

$$L=\sum_{\lambda=1}^{4}\mathrm{P}_\lambda L_\lambda=\begin{bmatrix}1&0&0&\cdots&0&0&0\\0&0&0.2&\cdots&0&0&0\\0&0&0&\cdots&1&1&0.1\\0&1&0.8&\cdots&0&0&0.9\end{bmatrix}.$$

由计算可得$t=2^n,t=1,2,3,4.$ 当$t=1$时,

$$N^1=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&1&1&0\\1&1&1&0\end{bmatrix};$$

当$t=2$时,

$$N^2=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&1&0&0\end{bmatrix};$$

当$t=3,4$时,

$$N^3=N^4=0_{4\times4}.$$

则可得输入概率可控矩阵

$$D=\sum_{t=1}^{4}N^t=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&1&1&0\\1&1&1&0\end{bmatrix}.$$

在例1的初始集族P^0和目的集族P^{d}下可得输入概率集可控矩阵$D_s=J_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}}\times_{\mathcal{B}}D\times_{\mathcal{B}}J_0=[1\ \ 1]$.

故在输入网络控制下的系统(12)在初始集族P^0和目的集族P^{d}下集可控.

5 结论

本文研究了PBCNs的集可控性问题. 基于矩阵半张量积方法给出PBCNs的代数表示. 基于该代数表示, 借助新的算子构造出概率集可控矩阵和输入概率集可控矩阵. 利用概率集可控矩阵给出了在自由控制序列下PBCNs集可控性的充要条件, 并根据输入概率集可控矩阵得到了在网络输入控制下PBCNs集可控性的充要条件.

参考文献:

[1] KAUFFMAN S A. Metabolic stability and epigenesis in randomly constructed genetic nets. *Journal of Theoretical Biology*, 1969, 22(3): 437 – 467.

[2] AKUTSU T, MIYANO S, KUHARA S. Identification of genetic networks from a small number of gene expression patterns under the Boolean network model. *Pacific Symposium on Biocomputing*, 1999, 4: 17 – 28.

[3] SHMULEVICH I, DOUGHERTY E R, KIM S, et al. Probabilistic Boolean networks: A rule-based uncertainty model for gene regulatory networks. *Bioinformatics*, 2002, 18(2): 261 – 274.

[4] WU Y H, SHEN T L. A finite convergence criterion for the discounted optimal control of stochastic logical networks. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2018, 63(1): 262 – 268.

[5] LI Y Y, LOU J G, WANG Z, et al. Synchronization of dynamical networks with nonlinearly coupling function under hybrid pinning impulsive controllers. *Journal of the Franklin Institute*, 2018, 355(14): 6520 – 6530.

[6] CHENG D Z, QI H S, ZHAO Y. *Analysis and Control of Boolean Networks: A Semi-tensor Product Approach*. London, U.K.: Springer-Verlag, 2011.

[7] CHENG D Z, QI H S. A linear representation of dynamics of Boolean networks. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, 55(10): 2251 – 2258.

[8] CHENG D Z, QI H S. Controllability and observability of Boolean control networks. *Automatica*, 2009, 45(7): 1659 – 1667.

[9] LIU R J, LU J Q, ZHENG W X, et al. Output feedback control for set stabilization of Boolean control networks. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2020, 31(6): 2129 – 2139.

[10] ZHU S Y, LIU Y, LOU J G, et al. Sampled-data state feedback control for the set stabilization of Boolean control networks. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2020, 50(4): 1580 – 1589.

[11] YU Y Y, MENG M, FENG J E. Observability of Boolean networks via matrix equations. *Automatica*, 2020, 111: 108621.

[12] ZHU Q X, LIU Y, LU J Q, et al. Observability of Boolean control networks. *Science China Information Sciences*, 2018, 61(9): 156 – 167.

[13] LIANG S, LI H T, WANG S L. Structural controllability of Boolean control networks with an unknown function structure. *Science China Information Sciences*, 2020, 63(11): 321 – 323.

[14] JI Z P. Subspace controllability of Boolean networks. *Asian Journal of Control*, 2019, 21(6): 2521 – 2531.

[15] DENG Lei, GONG Mengmeng, ZHU Peiyong. Optimal control of switched singular Boolean control networks with state and input constraints. *Control Theory & Applications*, 2018, 35(3): 299 – 307.
(邓磊, 巩蒙蒙, 朱培勇. 状态和输入受限的切换奇异布尔控制网络的最优控制(英文). 控制理论与应用, 2018, 35(3): 299 – 307.)

[16] ZHU Q X, LIU Y, LU J Q, et al. On the optimal control of Boolean control networks. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2018, 56(2): 1321 – 1341.

[17] YANG J J, LU J Q, LI L L, et al. Event-triggered control for the synchronization of Boolean control networks. *Nonlinear Dynamics*, 2019, 96(2): 1335 – 1344.

[18] LI Zhiqiang, XIAO Huimin. Weak controllability of probabilistic Boolean control networks. *Control Theory & Applications*, 2016, 33(1): 32 – 39.
(李志强, 肖会敏. 概率布尔控制网络的弱能控性. 控制理论与应用, 2016, 33(1): 32 – 39.)

[19] LI F F, SUN J T. Controllability of probabilistic Boolean control networks. *Automatica*, 2011, 47(12): 2765 – 2771.

[20] TONG L Y, LIU Y, LOU J G, et al. Static output feedback set stabilization for context-sensitive probabilistic Boolean control networks. *Applied Mathematics and Computation*, 2018, 332: 263 – 275.

[21] LI H T, WANG Y Z, GUO P L. State feedback based output tracking control of probabilistic Boolean networks. *Information Sciences*, 2016, 349: 1 – 11.

[22] LASCHOV D, MARGALIOT M. Controllability of Boolean control networks via the Perron-Frobenius theory. *Automatica*, 2012, 48(6): 1218 – 1223.

[23] LU J Q, ZHONG J, HUANG C, et al. On pinning controllability of Boolean control networks. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2016, 61(6): 1658 – 1663.

[24] ZHONG J, LIU Y, KOU K L, et al. On the ensemble controllability of Boolean control networks using STP method. *Applied Mathematics and Computation*, 2019, 358: 51 – 62.

[25] ZAHO Y, CHENG D Z. On controllability and stabilizability of probabilistic Boolean control networks. *Science China Information Sciences*, 2014, 57(1): 178 – 191.

[26] LIU Y, CHEN H W, LU J Q, et al. Controllability of probabilistic Boolean control networks based on transition probability matrices. *Automatica*, 2015, 52: 340 – 345.

[27] CHENG D Z, LI C X, HE F H. Observability of Boolean networks via set controllability approach. *Systems & Control Letters*, 2018, 115: 22 – 25.

[28] CHENG D Z, LI C X, ZHANG X, et al. Controllability of Boolean networks via mixed controls. *IEEE Control Systems Letters*, 2018, 2(2): 254 – 259.

[29] ZHANG Q L, FENG J E, PAN J F, et al. Set controllability for switched Boolean control networks. *Neurocomputing*, 2019, 359: 476 – 482.

[30] WANG J, LIU Y S, LI H T. Finite-time controllability and set controllability of impulsive probabilistic Boolean control networks. *IEEE Access*, 2020, 8: 111995 – 112002.

[31] LI Y L, LI J J, FENG J E. Set controllability of Boolean control networks with impulsive effects. *Neurocomputing*, 2020, 418: 263 – 269.

作者简介:

苟志丽 硕士研究生, 目前研究方向为布尔网络, E-mail: 945264556@qq.com;

徐 勇 教授, 硕士生导师, 目前研究方向为非线性系统、复杂网络, E-mail: xuyong@hebut.edu.cn;

王金环 副教授, 硕士生导师, 目前研究方向为多智能体系统控制、网络演化博弈, E-mail: wjhuan228@163.com.