

非连续Lur'e时滞网络的有限时间聚类同步与自适应控制

汤 泽^{1,2†}, 高 悦¹, 王 艳^{1,2}, 丰建文³

(1. 江南大学 物联网工程学院, 江苏 无锡 214122; 2. 江南大学 物联网应用技术教育部工程研究中心, 江苏 无锡 214122;

3. 深圳大学 数学与统计学院, 广东 深圳 518060)

摘要: 本文主要研究一类由非恒同非连续Lur'e系统耦合而成复杂动态网络的自适应有限时间聚类同步问题. 首先, 通过引入Filippov微分包含理论和测度选择定理, 本文设计了一类有效的牵制反馈控制器, 该控制器只控制当前聚类中与其他聚类有直接连接的部分节点. 为了有效节省控制成本, 本文基于反馈控制强度设计了一类自适应更新定律以获取实现网络同步的最优控制强度. 其次, 利用有限时间稳定性理论和Lyapunov稳定性定理, 本文得到时变时滞耦合和非线性耦合Lur'e网络实现有限时间聚类同步的判定条件, 并给出该网络达到聚类同步的收敛时间估计. 最后, 通过一个算例仿真验证了本控制方案和同步判据的有效性及其正确性.

关键词: 非连续Lur'e系统; 有限时间稳定; 聚类同步; 自适应控制; 非光滑控制

引用格式: 汤泽, 高悦, 王艳, 等. 非连续Lur'e时滞网络的有限时间聚类同步与自适应控制. 控制理论与应用, 2022, 39(2): 363 – 372

DOI: 10.7641/CTA.2021.00664

Adaptive finite-time cluster synchronization for discontinuous Lur'e networks with coupling time-delays

TANG Ze^{1,2†}, GAO Yue¹, WANG Yan^{1,2}, FENG Jian-wen³

(1. School of Internet of Things Engineering, Jiangnan University, Wuxi Jiangsu 214122, China;

2. Engineering Research Center of Internet of Things Technology Application (Ministry of Education), Jiangnan University, Wuxi Jiangsu 214122, China;

3. College of Mathematics and Statistics, Shenzhen University, Shenzhen Guangdong 518060, China)

Abstract: This article investigates the problem of adaptive finite-time cluster synchronization of complex dynamic network which is coupled by nonidentical discontinuous Lur'e systems. Firstly, by introducing the Filippov differential inclusion theory and the measurable selection theorem, an effective pinning feedback controller is designed, which only imposed on the Lur'e systems in current cluster that are directly connected to the other clusters. In order to effectively save the control costs, a type of adaptive updating laws is designed so as to acquire some optimal control strengths for the network synchronization. Secondly, by applying the finite-time stability theory and Lyapunov stability theorem, the cluster synchronization criteria for the time-varying delay and nonlinearly coupled Lur'e network in finite time are obtained. In addition, the settling time for the cluster synchronization of the Lur'e network is intelligently estimated. Finally, a numerical simulation is given to verify the validity and correctness of the proposed control scheme and the synchronization criteria.

Key words: discontinuous Lur'e system; finite-time stable; cluster synchronization; adaptive control; nonsmooth control

Citation: TANG Ze, GAO Yue, WANG Yan, et al. Adaptive finite-time cluster synchronization for discontinuous Lur'e networks with coupling time-delays. *Control Theory & Applications*, 2022, 39(2): 363 – 372

1 引言

复杂网络是一个跨学科的概念, 其问题的来源其实是各种实际网络, 比如通信网络、生物神经网络

络^[1]、社会网络、电力网络等等. 通过数学图论的方法^[2], 可以将这些实际的网络转变成由点和线构成的抽象网络. 通过研究抽象网络的共性及其处理的普适

收稿日期: 2020-09-30; 录用日期: 2021-04-23.

†通信作者. E-mail: tangze0124@jiangnan.edu.cn; Tel.: +86 13905630171.

本文责任编辑: 席在荣.

国家自然科学基金项目(61803180, 61873171, 61973138), 江苏省自然科学基金项目(BK20180599), 中国博士后科学基金项目(2021T140280, 2020M681484), 国家重点研发计划项目(2018YFB1701903)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (61803180, 61873171, 61973138), the National Natural Science Foundation of Jiangsu Province (BK20180599), the China Postdoctoral Science Foundation (2021T140280, 2020M681484) and the National Key R&D Program of China(2018YFB1701903).

方法,可以为实际网络的分析提供理论指导.因此,对复杂网络进行深入的研究具有重要的现实意义^[3].

近些年来,学者们针对复杂网络中特殊的集群现象-同步,提出了不同的模式,如全局同步^[4]、聚类同步^[5]、相位同步^[6]等.其中,聚类同步是一类特殊的同步模式,它将整个网络分为不同类,属于同一类中的系统需要达到同步,而对于不同类间的系统状态却并无该要求.在目前多数的网络同步研究中,达到同步所需的时间是不确定并很难估计的.而在实际工程应用中,为了节约时间成本,人们往往希望加快收敛速率,在有限时间内实现网络同步.同时,有限时间同步意味着同步收敛时间的优化,它具有更好的鲁棒性和抗干扰能力^[7].例如,文献[8]研究了非理想变时滞神经网络的有限时间同步问题,并设计了合适的滑模控制器和切换增益.此外,文献[9]介绍了一种新颖的非奇异终端滑模控制,同时提出了一种用于操作系统中位置跟踪的自适应有限时间控制方法.

众所周知,Lur'e系统是一类特殊的非线性系统,常见的Lorenz系统、Goodwin模型、蔡氏电路都可以看作Lur'e系统.目前,针对Lur'e系统的研究也层出不穷.例如,文献[10]研究了受非周期采样数据影响的混沌Lur'e系统的非周期事件触发主从同步.而文献[11]研究了具有多个时变时滞和随机扰动的耦合Lur'e网络的指数同步问题.

由于不连续系统在现实生活中的广泛应用,由不连续动力系统耦合而成的复杂动态网络的同步问题也逐渐受到了越来越多的关注^[12-13].特别地,处理带有右端不连续的微分方程,需要引入广义解的概念.到目前为止,有两种定义带有右端不连续的微分方程广义解的方法:第1种方法利用微分包含的概念,比如Filippov解^[13]、Krasovskij解;而第2种方法典型的有Hermes解、Euler解,根据一些算法找到近似解,然后将近似解的统一极限作为广义解.例如,文献[12]研究了一类具有时变时滞和非连续激活函数的神经网络的驱动响应同步问题,并同时考虑了状态反馈控制和自适应控制技术.随后,文献[13]在Filippov解的框架下,基于微分包含理论,通过构造非光滑Lyapunov函数,讨论了具有不连续和分布式时变时滞的神经网络的有限时间同步问题.以上讨论的是具有不连续激活函数的神经网络的有限时间同步问题,对于不连续复杂网络的有限时间聚类同步,尤其是考虑网络具有时变时滞以及非线性耦合现象的,目前尚未见有关研究结果.

基于上述讨论,本文主要研究一类具有多重耦合的非恒同非连续Lur'e网络的有限时间聚类同步问题,通过引入Filippov微分包含概念,巧妙设计牵制控制器,并应用有限时间稳定性定理和Lyapunov稳定性定理,得到该网络实现有限时间聚类同步的判定条件.

本文的主要贡献体现在4个方面:1)不同于文献[21],本文考虑一类具有时变时滞和非线性耦合的非恒同不连续Lur'e网络,该网络模型将更接近实际的工程应用系统;2)由于传统的线性化扇形条件对本文的非连续Lur'e系统不再适用^[17-18],本文引入Filippov微分包含概念,将非连续函数转变为集值函数,根据测度选择定理选择出与非连续函数对应的可测函数,并据此进行非线性函数的线性化处理;3)通过巧妙设计负反馈牵制控制器来控制当前聚类中与其他聚类有直接联系的少量节点,同时,根据设计自适应控制的更新定律获得最优控制强度,相比于文献[12],可以有效减少控制成本;4)根据有限时间稳定性定理,给出网络实现聚类同步的收敛时间,这意味着同步收敛时间的优化,与文献[4-5]相比,极大地节省了控制所需的时间成本.

2 准备工作

首先,本文给出具有聚类型拓扑结构复杂网络的相关定义.复杂网络中的 N 个节点可以分为 $\tilde{z}$ 个类且满足 $N > \tilde{z} \geq 2$.若第 i 个节点属于第 j 类($i = 1, 2, \dots, N, j = 1, 2, \dots, \tilde{z}$),则定义 $\mu_i = j$.令 Λ_j 表示属于第 j 类的所有节点组成的集合, $\tilde{\Lambda}_j$ 表示属于第 j 类且和其他类有直接连接的节点组成的集合.根据上述定义,有以下关于集合的性质:

- 1) $\Lambda_i \cap \Lambda_j = \emptyset, i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, \tilde{z}$;
- 2) $\bigcup_{i=1}^{\tilde{z}} \Lambda_i = \{1, 2, \dots, N\}$.

考虑如下具有时变时滞和非线性耦合的受控非连续非恒同Lur'e动态网络模型:

$$\begin{aligned} \dot{y}_i(t) = & E_{\mu_i} y_i(t) + D_{\mu_i} f_{\mu_i}(M_{\mu_i} y_i(t)) + u_i(t) + \\ & c_1 \sum_{j=1}^N a_{ij} y_j(t - \tau(t)) + c_2 \sum_{j=1}^N b_{ij} G(y_j(t)), \end{aligned} \quad (1)$$

其中: $y_i(t) = [y_i^1(t) \ y_i^2(t) \ \dots \ y_i^n(t)]^T \in \mathbb{R}^n$ 表示第 i 个Lur'e系统的状态向量, $E_{\mu_i} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $D_{\mu_i} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $M_{\mu_i} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 是常数矩阵,正常数 c_1, c_2 为耦合强度,耦合矩阵 $A = (a_{ij})_{N \times N} \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $B = (b_{ij})_{N \times N} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ 满足耗散条件,即

$$a_{ii} = - \sum_{j=1, i \neq j}^N a_{ij}, \quad b_{ii} = - \sum_{j=1, i \neq j}^N b_{ij},$$

若第 i 个Lur'e系统和第 j 个Lur'e系统间($i \neq j$)有连接,则有 $a_{ij} > 0, b_{ij} > 0$,否则 $a_{ij} = 0, b_{ij} = 0$.时变时滞 $\tau(t)$ 满足 $0 \leq \tau(t) \leq \tau$ 且 $\dot{\tau}(t) \leq \mu < 1$, $G(\cdot): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是连续非线性耦合函数且

$G(y_j(t)) = [g_1(y_j^1(t)) \ g_2(y_j^2(t)) \ \dots \ g_n(y_j^n(t))]^T$,
 $f(\cdot): \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ 为不连续的非线性向量值函数且满

足初值 $f(0) = 0$. 记

$$f_{\mu_i}(M_{\mu_i}y_i(t)) = [f_{\mu_i}^1(m_{\mu_i}^1y_i(t)) \ f_{\mu_i}^2(m_{\mu_i}^2y_i(t)) \ \cdots \ f_{\mu_i}^m(m_{\mu_i}^my_i(t))]^T \in \mathbb{R}^m,$$

其中: $M_{\mu_i}y_i(t) = [m_{\mu_i}^1y_i(t) \ \cdots \ m_{\mu_i}^my_i(t)]^T$, $m_{\mu_i}^j \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ ($i = 1, 2, \dots, N, j = 1, 2, \dots, m$). $u_i(t)$ 是控制输入, 将在后面给出详细设计.

令 v_{μ_i} 为第 μ_i 个聚类中独立Lur'e系统的解, 即 v_{μ_i} 满足

$$\dot{v}_{\mu_i}(t) = E_{\mu_i}v_{\mu_i}(t) + D_{\mu_i}f_{\mu_i}(M_{\mu_i}v_{\mu_i}(t)), \quad (2)$$

其中 $v_{\mu_i}(t) = [v_{\mu_i}^1(t) \ v_{\mu_i}^2(t) \ \cdots \ v_{\mu_i}^n(t)]^T \in \mathbb{R}^n$ 为第 μ_i 个聚类的同步目标.

由于本文研究的 $f_{\mu_i}(\cdot)$ 为不连续函数, 即关于微分方程解的存在唯一性定理在本文中对不连续Lur'e系统 $\dot{v}_{\mu_i}(t) = E_{\mu_i}v_{\mu_i}(t) + D_{\mu_i}f_{\mu_i}(M_{\mu_i}v_{\mu_i}(t))$ 将不再适用. 同样的, 传统连续系统中用来处理非线性函数使用的扇形条件也将不再适用. 因此, 本文引入Filippov集值映射的定义和测度选择定理, 将该非连续Lur'e系统转变为微分包含的形式, 再经过测度选择定理处理, 最终得到本文期望的微分等式.

定义 1^[14] 考虑包含 $\mathbb{Z}$ 个聚类的Lur'e网络(1), 若对于任意初值, 存在一个时刻 $T > 0$, 当 $\mu_i = \mu_j$, 满足 $\lim_{t \rightarrow T} \|y_i(t) - y_j(t)\| = 0$, 且对任意 $t > T$, 有 $\|y_i(t) - y_j(t)\| \equiv 0$, 而当 $\mu_i \neq \mu_j$ 时, $\lim_{t \rightarrow T} \|y_i(t) - y_j(t)\| \neq 0$, ($i, j = 1, 2, \dots, N$), 则称Lur'e网络(1)实现有限时间聚类同步, 其中 T 称为收敛时间.

定义 2^[13] 定义非线性函数 $f(v)$ 在 $v \in \mathbb{R}^n$ 的Filippov集值映射如下:

$$\mathbb{F}[f](v) = \bigcap_{\pi > 0} \bigcap_{\mu(W)=0} \overline{\text{co}}[f(B(v, \pi) \setminus W)],$$

其中: $\overline{\text{co}}[E]$ 为集合 E 的闭凸包, $B(v, \pi) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - v\| \leq \pi\}$, $\mu(W)$ 是集合 W 的Lebesgue测度.

定义 3^[15] 考虑Lur'e系统 $\dot{v}(t) = Ev(t) + Df(Mv(t))$. 若函数 $v(\cdot) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $T \in [0, +\infty)$ 满足

- 1) 函数 $v(t)$ 在 $[0, T]$ 上是绝对连续的;
- 2) 函数 $v(t)$ 满足微分包含关系 $\dot{v}(t) \in Ev(t) + D\mathbb{F}[f](Mv(t))$, a.e. $t \in [0, T]$.

则称函数 $v(t)$ 是非连续Lur'e系统在Filippov意义下的解, 其中a.e表示几乎处处.

根据测度选择定理^[15], 针对上述非连续Lur'e系统, 可以找到一个测度函数 $\omega^M(\cdot) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\omega^M \in \mathbb{F}[f](Mv(t))$, 使得 $\dot{v}(t) = Ev(t) + D\omega^M(t)$ a.e. $t \in [0, T]$.

定义 4^[16] 函数 V 的广义梯度 $\partial V(y) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ 定义为: $\partial V(y) = \text{co}\{\lim_{i \rightarrow \infty} \nabla V(y_i) : y_i \rightarrow y, y_i$

$\notin S \cup \Pi_V\}$, 其中 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ 表示由 $\mathbb{R}^n$ 的所有子集组成的集合, ∇ 表示梯度微分算子, $\text{co}(\cdot)$ 代表凸包, $S \subset \mathbb{R}^n$ 是零测度集, $\Pi_V \subset \mathbb{R}^n$ 是函数 V 不可微点的集合. 定义函数 V 在点 y 关于的 f 的集值Lie导数: $L_f V(y) = \{b \in \mathbb{R} | \exists s \in \mathbb{F}[f](y), \sigma^T s = b, \forall \sigma \in \partial V(y)\}$.

定义 5^[17] 非线性函数 $g_k(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 若其属于可接受非线性耦合函数类, 记为 $g_k(\cdot) \in \text{NCF}(\xi, \delta)$. 即存在两个非负常数 ξ, δ , 使得对于任意 $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, $g_k(y) - \xi y$ 满足Lipschitz条件

$$|(g_k(y_1) - \xi y_1) - (g_k(y_2) - \xi y_2)| \leq \delta |y_1 - y_2|.$$

引理 1^[18] 假设 $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是对称矩阵且满足行和为零, 则对任意两个向量 $a, b \in \mathbb{R}^n$, 有以下不等式成立:

$$a^T Q b = - \sum_{j>i} q_{ij} (a_j - a_i)(b_j - b_i).$$

引理 2^[19] 对于任意实数 w_i ($i = 1, 2, \dots, n$)和 r, v 满足 $r > v > 0$, 则有如下结论成立:

$$\left\{ \sum_{i=1}^n |w_i|^r \right\}^{\frac{1}{r}} \leq \left\{ \sum_{i=1}^n |w_i|^v \right\}^{\frac{1}{v}}.$$

引理 3^[18] 定义矩阵 $T = I_n - (1/n)1_n 1_n^T$, 其中单位矩阵 $I_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 单位向量 $1_n \in \mathbb{R}^n$. 对于所有满足零行和的矩阵 $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 存在常数 $\beta > 0$, 对任意向量 $a, b \in \mathbb{R}^n$, 以下不等式成立:

$$a^T H b = a^T H T b \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\beta} a^T H^T H a + \beta b^T T b \right).$$

引理 4^[20] 设 $V(x(t)) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 是连续的正定函数, 如果存在连续的函数 $\zeta(\cdot)$, 且 $\zeta(\varrho) > 0$, $\varrho \in (0, +\infty)$, 使得 $\dot{V}(x(t)) \leq -\zeta(V(x(t)))$,

$$\int_0^{V(0)} \left(\frac{1}{\zeta(\varrho)} \right) d\varrho = T < +\infty,$$

则 $\forall t \geq T$, $V(x(t)) \equiv 0$. 如果 $\zeta(\varrho) = \kappa \varrho^\theta$, 其中 $\kappa > 0$, $\theta \in (0, 1)$, 可得同步收敛时间为

$$T = \frac{V^{1-\theta}(0)}{\kappa(1-\theta)}.$$

引理 5^[21] 基于定义2, 给出Filippov集值映射 $\mathbb{F}[f](\cdot)$ 以下性质:

- 1) 一致性: 若 $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 在 $y \in \mathbb{R}^n$ 是连续的, 则 $\mathbb{F}[f](y) = \{f(y)\}$;
- 2) 求和变换: 若 $f_1, f_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 在 $y \in \mathbb{R}^n$ 局部有界, 则有 $\mathbb{F}[f_1 + f_2](y) \subseteq \mathbb{F}[f_1](y) + \mathbb{F}[f_2](y)$. 特别地, 若 f_1 或 f_2 在 y 处连续, 上述关系式仍成立;
- 3) 乘积变换: 若 $f_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^s$ 在 $y \in \mathbb{R}^n$ 局部有界, 则有 $\mathbb{F}[(f_1, f_2)^T](y) \subseteq \mathbb{F}[f_1](y) \times \mathbb{F}[f_2](y)$. 特别地, 若 f_1 或 f_2 在 y 处连续, 上述关系式仍成立;
- 4) 矩阵变换: 若 $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 在 $y \in \mathbb{R}^n$ 局部有

界, 且 $P(y) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ 在 $y \in \mathbb{R}^n$ 是连续的, 则有 $\mathbb{F}[P(y)f](y) = P(y)\mathbb{F}[f](y)$.

假设1 函数 $f_{\mu_i}(\cdot)$ 是连续可微的(除了在可数点集 $\{\rho_k\}$), 在不连续点处的左极限 $f_{\mu_i}^-(\rho_k)$ 和右极限 $f_{\mu_i}^+(\rho_k)$ 存在, $k = 1, 2, \dots$ 并且, 在 $\mathbb{R}$ 的每个紧区间, $f_{\mu_i}(\cdot)$ 最多有有限个跳跃间断点.

假设2 假设函数 $f_{\mu_i}(\cdot)$ 满足假设1, 记 $\mathbb{F}[f_{\mu_i}](s) \triangleq [\mathbb{F}[f_{\mu_i}^1](s_1) \ \mathbb{F}[f_{\mu_i}^2](s_2) \ \dots \ \mathbb{F}[f_{\mu_i}^m](s_m)]^T$, $s = [s_1 \ s_2 \ \dots \ s_m]^T$. 对于定义2中Filippov集值映射 $\mathbb{F}[f_{\mu_i}](s)$, 有 $0 \in \mathbb{F}[f_{\mu_i}](0)$, 存在正常数 $J_{\mu_i}^j$ 和 $P_{\mu_i}^j$ 使得对于任意向量 $s = [s_1 \ s_2 \ \dots \ s_m]^T$, $z = [z_1 \ z_2 \ \dots \ z_m]^T \in \mathbb{R}^m$, 有以下不等式成立:

$$\sup |u_{\mu_i}^j - d_{\mu_i}^j| \leq J_{\mu_i}^j |s_j - z_j| + P_{\mu_i}^j,$$

其中:

$$\begin{aligned} u_{\mu_i} &= [u_{\mu_i}^1 \ u_{\mu_i}^2 \ \dots \ u_{\mu_i}^m]^T \in \mathbb{F}[f_{\mu_i}](s), \\ d_{\mu_i} &= [d_{\mu_i}^1 \ d_{\mu_i}^2 \ \dots \ d_{\mu_i}^m]^T \in \mathbb{F}[f_{\mu_i}](z), \\ \mathbb{F}[f_{\mu_i}^j](s_j) &= [\min\{f_{\mu_i}^{j-}(s_j), f_{\mu_i}^{j+}(s_j)\}, \\ &\quad \max\{f_{\mu_i}^{j-}(s_j), f_{\mu_i}^{j+}(s_j)\}], \\ i &= 1, 2, \dots, N, j = 1, 2, \dots, m. \end{aligned}$$

注1 本文研究由不连续Lur'e系统耦合而成的动态网络的有限时间聚类同步问题. 根据上述假设可知, 假设2中不等式是针对每一个不连续点进行非线性数量值函数的线性化估计. 对应的, 可以给出非线性向量值函数的线性化估计形式

$$\sup \|u_{\mu_i} - d_{\mu_i}\| \leq J_{\mu_i} \|s - z\| + P_{\mu_i},$$

其中: $J_{\mu_i} = \sqrt{2} \max_{1 \leq j \leq m} J_{\mu_i}^j$, $P_{\mu_i} = \sqrt{2m} \times \max_{1 \leq j \leq m} P_{\mu_i}^j$.

3 非连续Lur'e网络自适应有限时间聚类同步

本节将设计牵制控制器使非恒同非连续Lur'e网络(1)和目标系统(2)能够在有限时间内达到聚类同步. 同时, 对于时变控制强度, 设计自适应更新定律, 并根据有限时间稳定性定理, 给出相应的同步收敛时间.

首先, 定义误差向量: $e_i(t) = y_i(t) - v_{\mu_i}(t)$. 由式(1)–(2)可得误差Lur'e网络

$$\begin{aligned} \dot{e}_i(t) &= E_{\mu_i} e_i(t) + D_{\mu_i} f_{\mu_i}(M_{\mu_i} e_i(t)) + \\ & c_1 \sum_{j=1}^N a_{ij} e_j(t - \tau(t)) + c_2 \sum_{j=1}^N b_{ij} G(e_j(t)) + u_i(t) + \\ & c_1 \sum_{j=1}^N a_{ij} v_{\mu_j}(t - \tau(t)) + c_2 \sum_{j=1}^N b_{ij} G(v_{\mu_j}(t)), \quad (3) \end{aligned}$$

其中 $i = 1, 2, \dots, N$, 非线性函数 $f_{\mu_i}(M_{\mu_i} e_i(t)) = f_{\mu_i}(M_{\mu_i} y_i(t)) - f_{\mu_i}(M_{\mu_i} v_{\mu_i}(t))$, 耦合函数 $G(e_j(t)) = G(y_j(t)) - G(v_{\mu_j}(t))$.

针对上述网络, 设计负反馈牵制控制器

$$u_i(t) = \begin{cases} u_{1i}(t), & i \in \tilde{\Lambda}_{\mu_i}; \\ 0, & i \in \Lambda_{\mu_i} - \tilde{\Lambda}_{\mu_i}, \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} u_{1i}(t) &= -l_i(t) e_i(t) - c_1 \sum_{j=1}^N a_{ij} v_{\mu_j}(t - \tau(t)) - \\ & \rho \cdot \text{sgn}(e_i(t)) - c_2 \sum_{j=1}^N b_{ij} G(v_{\mu_j}(t)) - \\ & \alpha_i \Omega(e_i(t)) \left(\int_{t-\tau(t)}^t e_i^T(s) e_i(s) ds \right)^{\frac{1}{2}} - \\ & \eta_i \Omega(e_i(t)) (|l_i(t)| + \hat{l}), \end{aligned}$$

$l_i(t)$ 为时变控制强度, 常数 $\rho > 0$, sgn 为符号函数且 $\text{sgn}(e_i(t)) = [\text{sgn}(e_i^1(t)) \ \dots \ \text{sgn}(e_i^n(t))]^T$, 控制增益 $\alpha_i > 0$, $\eta_i > 0$. 假设 $\hat{l}_i^*$ 为 $l_i(t)$ 的估计, 则存在正常数 $\hat{l}$ 满足 $0 \leq \hat{l}_i^* \leq \hat{l}$. 定义函数 $\Omega(e_i(t))$ 如下:

$$\Omega(e_i(t)) = \begin{cases} \frac{e_i(t)}{\|e_i(t)\|^2}, & e_i(t) \neq 0; \\ 0, & e_i(t) = 0. \end{cases}$$

为了获取最优控制强度, 针对时变控制强度 $l_i(t)$ 设计如下自适应更新定律:

$$\dot{l}_i(t) = \varepsilon_i e_i(t)^T e_i(t), \quad i \in \tilde{\Lambda}_{\mu_i}, \quad (5)$$

其中系数 $\varepsilon_i > 0$.

注2 对比文献[12]中控制器的设计 $u_i(t) = -k_i(t) - \eta_i \text{sgn}(e_i(t))$, 该控制器施加在网络中所有节点上, 本文控制器(4)只施加在不同聚类间有直接连接的Lur'e系统上, 此控制更易实现且能有效降低控制成本. 同时, 控制器中项

$$-c_1 \sum_{j=1}^N a_{ij} v_{\mu_j}(t - \tau(t)) - c_2 \sum_{j=1}^N b_{ij} G(v_{\mu_j}(t))$$

主要用于减弱不同聚类间因Lur'e系统相互连接造成的影响, 而控制器中除此之外的其他项则主要用于驱使属于同一聚类中的所有非连续Lur'e系统实现有限时间同步.

根据定义2和引理5, 可得

$$\begin{aligned} \mathbb{F}[\dot{e}_i(t)] &\subseteq E_{\mu_i} \{e_i(t)\} + D_{\mu_i} \mathbb{F} f_{\mu_i}(M_{\mu_i} e_i(t)) + \\ & c_1 \sum_{j=1}^N a_{ij} \{e_j(t - \tau(t))\} + c_2 \sum_{j=1}^N b_{ij} \{G(e_j(t))\} - \\ & \alpha_i \{\Omega(e_i(t)) \left(\int_{t-\tau(t)}^t e_i^T(s) e_i(s) ds \right)^{\frac{1}{2}}\} - \\ & l_i(t) \{e_i(t)\} - \rho \text{SIGN}(e_i(t)) - \\ & \eta_i \{\Omega(e_i(t)) (|l_i(t)| + \hat{l})\}, \quad (6) \end{aligned}$$

其中

$$\text{SIGN}(e_i(t)) = [\text{SIGN}(e_i^1(t)) \ \dots \ \text{SIGN}(e_i^n(t))]^T,$$

定义集值函数 $\text{SIGN}(\cdot)$ 为

$$\text{SIGN}(\psi) = \begin{cases} \{-1\}, & \psi < 0, \\ (-1, 1), & \psi = 0, \\ \{1\}, & \psi > 0. \end{cases}$$

为了后文证明过程中书写方便, 记

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(y^k(t)) &= \tilde{G}(y^k(t)) - \xi y^k(t), \\ \tilde{\phi}(v^k(t)) &= \tilde{G}(v^k(t)) - \xi v^k(t), \\ e^k(t) &= [e_1^k(t) \ e_2^k(t) \ \cdots \ e_N^k(t)]^T, \\ y^k(t) &= [y_1^k(t) \ y_2^k(t) \ \cdots \ y_N^k(t)]^T, \\ v^k(t) &= [v_{\mu_1}^k(t) \ v_{\mu_2}^k(t) \ \cdots \ v_{\mu_N}^k(t)]^T, \\ \tilde{G}(y^k(t)) &= [g_k(y_1^k(t)) \ g_k(y_2^k(t)) \ \cdots \ g_k(y_N^k(t))]^T, \\ \tilde{G}(v^k(t)) &= [g_k(v_{\mu_1}^k(t)) \ g_k(v_{\mu_2}^k(t)) \ \cdots \ g_k(v_{\mu_N}^k(t))]^T, \\ \tilde{\phi}(y^k(t)) &= [\phi_k(y_1^k(t)) \ \phi_k(y_2^k(t)) \ \cdots \ \phi_k(y_N^k(t))]^T, \\ \tilde{\phi}(v^k(t)) &= [\phi_k(v_{\mu_1}^k(t)) \ \phi_k(v_{\mu_2}^k(t)) \ \cdots \ \phi_k(v_{\mu_N}^k(t))]^T, \\ e^k(t - \tau(t)) &= [e_1^k(t - \tau(t)) \ e_2^k(t - \tau(t)) \ \cdots \\ e_N^k(t - \tau(t))]^T, \quad k = 1, 2, \cdots, n. \end{aligned}$$

定理1 若假设1和假设2成立且函数 $g_k(\cdot) \in \text{NCF}(\xi, \delta)$, $\xi > \delta > 0$, $k = 1, 2, \cdots, n$. 如果存在正常数 z 和 β , 使得如下条件成立:

1) 不等式

$$\lambda_{\max}(E_{\mu_i}^T + E_{\mu_i}) + 2J_{\mu_i} \|D_{\mu_i}\| \|M_{\mu_i}\| - 2z < 0;$$

2) 矩阵不等式

$$\Delta = \begin{bmatrix} c_2\pi - 2L^* + (2z + 1)I_N & c_1A \\ c_1A^T & -(1 - \mu)I_N \end{bmatrix} < 0;$$

3) 不等式

$$\max_{1 \leq i \leq N} (P_{\mu_i} \|D_{\mu_i}\| - \rho) < 0,$$

则在牵制控制器(4)和自适应更新定律(5)的作用下, 非连续Lur'e网络(1)和目标Lur'e系统(2)在有限时间内能够实现聚类同步, 且其同步收敛时间可以估计为

$$T = \frac{V^{\frac{1}{2}}(0)}{\vartheta},$$

其中 $\pi = \frac{1}{\beta} B^T B + 2\delta^2 \beta (1 - \frac{1}{N}) I_N$, 矩阵 $L^* = \text{diag}\{l_1^*, l_2^*, \cdots, l_N^*\}$, 若 $i \in \tilde{A}_{\mu_i}$, $l_i^* > 0$, 否则 $l_i^* = 0$, $i = 1, 2, \cdots, N$, $\rho > 0$,

$$\vartheta = \min\{\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3\}, \quad \vartheta_1 = -\max_{1 \leq i \leq N} (P_{\mu_i} \|D_{\mu_i}\| - \rho),$$

$$\vartheta_2 = \min_{1 \leq i \leq N} (\eta_i \varepsilon_i^{\frac{1}{2}}), \quad \vartheta_3 = \min_{1 \leq i \leq N} (\alpha_i).$$

证 选取如下Lyapunov函数:

$$\begin{aligned} V(t) &= \sum_{i=1}^N e_i(t)^T e_i(t) + \sum_{i=1}^N \frac{1}{\varepsilon_i} (l_i(t) - l_i^*)^2 + \\ &\quad \sum_{i=1}^N \int_{t-\tau(t)}^t e_i^T(s) e_i(s) ds. \end{aligned} \quad (7)$$

根据式(6), 计算 $V(t)$ 关于时间 t 的集值Lie导数, 并应用引理5可得

$$\begin{aligned} \{L_f(V(t))\} &\subseteq \\ &2 \sum_{i=1}^N \{e_i(t)^T E_{\mu_i} e_i(t)\} + \\ &2 \sum_{i=1}^N \mathbb{F}[e_i(t)^T D_{\mu_i} f_{\mu_i}(M_{\mu_i} e_i(t))] + \\ &2c_1 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \{e_i(t)^T a_{ij} e_j(t - \tau(t))\} + \\ &2c_2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \{e_i(t)^T b_{ij} G(e_j(t))\} - \\ &2 \sum_{i \in \tilde{A}_{\mu_i}} \{l_i(t) e_i(t)^T e_i(t)\} - 2\rho \sum_{i=1}^N \mathbb{F}[e_i(t)^T \times \\ &\quad \text{sgn}(e_i(t))] - 2 \sum_{i \in \tilde{A}_{\mu_i}} \{\eta_i (|l_i(t)| + \hat{l})\} - \\ &2 \sum_{i=1}^N \alpha_i \{(\int_{t-\tau(t)}^t e_i^T(s) e_i(s) ds)^{\frac{1}{2}}\} + \\ &2 \sum_{i \in \tilde{A}_{\mu_i}} \{(l_i(t) - l_i^*) e_i(t)^T e_i(t)\} + \sum_{i=1}^N \{e_i(t)^T e_i(t)\} - \\ &(1 - \dot{\tau}(t)) \sum_{i=1}^N \{e_i(t - \tau(t))^T e_i(t - \tau(t))\}. \end{aligned} \quad (8)$$

根据测度选择定理, 选取函数 $\gamma_i^{M_{\mu_i}}(t) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$, 使得 $\gamma_i^{M_{\mu_i}}(t) \in \mathbb{F}[f_{\mu_i}(M_{\mu_i} e_i(t))]$ 对于 $t \in [0, T]$ a.e. 所以, 可以将式(8)转换为如下形式:

$$\begin{aligned} \{L_f(V(t))\} &\subseteq \\ &2 \sum_{i=1}^N \{e_i(t)^T E_{\mu_i} e_i(t)\} + 2 \sum_{i=1}^N \{e_i(t)^T D_{\mu_i} \gamma_i^{M_{\mu_i}}(t)\} + \\ &2c_1 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \{e_i(t)^T a_{ij} e_j(t - \tau(t))\} + \\ &2c_2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \{e_i(t)^T b_{ij} G(e_j(t))\} - \\ &2 \sum_{i \in \tilde{A}_{\mu_i}} \{l_i(t) e_i(t)^T e_i(t)\} - 2\rho \sum_{i=1}^N \mathbb{F}[e_i(t)^T \times \\ &\quad \text{SIGN}(e_i(t))] - 2 \sum_{i \in \tilde{A}_{\mu_i}} \{\eta_i (|l_i(t)| + \hat{l})\} - \\ &2 \sum_{i=1}^N \alpha_i \{(\int_{t-\tau(t)}^t e_i^T(s) e_i(s) ds)^{\frac{1}{2}}\} + \\ &2 \sum_{i \in \tilde{A}_{\mu_i}} \{(l_i(t) - l_i^*) e_i(t)^T e_i(t)\} + \sum_{i=1}^N \{e_i(t)^T e_i(t)\} - \\ &(1 - \dot{\tau}(t)) \sum_{i=1}^N \{e_i(t - \tau(t))^T e_i(t - \tau(t))\}. \end{aligned}$$

根据假设2及引理2, 对非线性向量值函数 $\gamma_i^{M_{\mu_i}}(t)$ 进行线性化估计可得

$$e_i(t)^T D_{\mu_i} \gamma_i^{M_{\mu_i}}(t) \leq$$

$$\begin{aligned} & \|e_i(t)\| \sqrt{\gamma_i^{M_{\mu_i}}(t)^T D_{\mu_i}^T D_{\mu_i} \gamma_i^{M_{\mu_i}}(t)} \leq \\ & \|D_{\mu_i}\| \|e_i(t)\| (J_{\mu_i} \|M_{\mu_i}\| \sqrt{e_i(t)^T e_i(t)} + P_{\mu_i}) \leq \\ & \|D_{\mu_i}\| (J_{\mu_i} \|M_{\mu_i}\| e_i(t)^T e_i(t) + P_{\mu_i} \sum_{k=1}^n |e_i^k(t)|). \end{aligned}$$

基于上述分析, 根据定义4可以推导式(8)为

$$\begin{aligned} L_f(V(t)) \leq & 2 \sum_{i=1}^N e_i(t)^T E_{\mu_i} e_i(t) + \\ & 2 \sum_{i=1}^N J_{\mu_i} \|D_{\mu_i}\| \|M_{\mu_i}\| e_i(t)^T e_i(t) + \\ & 2 \sum_{i=1}^N P_{\mu_i} \|D_{\mu_i}\| \sum_{k=1}^n |e_i^k(t)| + \\ & 2c_1 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N e_i(t)^T a_{ij} e_j(t - \tau(t)) + \\ & 2c_2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N e_i(t)^T b_{ij} G(e_j(t)) - \\ & 2\rho \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^n |e_i^k(t)| - 2 \sum_{i \in \bar{A}_{\mu_i}} \eta_i(|l_i(t)| + \hat{l}) - \\ & 2 \sum_{i=1}^N \alpha_i \left(\int_{t-\tau(t)}^t e_i^T(s) e_i(s) ds \right)^{\frac{1}{2}} - \\ & 2 \sum_{i \in \bar{A}_{\mu_i}} l_i^* e_i(t)^T e_i(t) + \sum_{i=1}^N e_i(t)^T e_i(t) - \\ & (1 - \dot{\tau}(t)) \sum_{i=1}^N e_i(t - \tau(t))^T e_i(t - \tau(t)) = \\ & LV_1(t) + LV_2(t) + LV_3(t). \end{aligned} \quad (9)$$

分别将 $LV_1(t)$, $LV_2(t)$, $LV_3(t)$ 记为

$$\begin{aligned} LV_1(t) = & 2 \sum_{i=1}^N e_i(t)^T E_{\mu_i} e_i(t) + \\ & 2 \sum_{i=1}^N J_{\mu_i} \|D_{\mu_i}\| \|M_{\mu_i}\| e_i(t)^T e_i(t), \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} LV_2(t) = & 2c_1 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N e_i(t)^T a_{ij} e_j(t - \tau(t)) + \\ & 2c_2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N e_i(t)^T b_{ij} G(e_j(t)) - \\ & 2 \sum_{i \in \bar{A}_{\mu_i}} l_i^* e_i(t)^T e_i(t) + \sum_{i=1}^N e_i(t)^T e_i(t) - \\ & (1 - \dot{\tau}(t)) \sum_{i=1}^N e_i(t - \tau(t))^T e_i(t - \tau(t)), \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} LV_3(t) = & 2 \sum_{i=1}^N P_{\mu_i} \|D_{\mu_i}\| \sum_{k=1}^n |e_i^k(t)| - \\ & 2\rho \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^n |e_i^k(t)| - 2 \sum_{i \in \bar{A}_{\mu_i}} \eta_i(|l_i(t)| + \hat{l}) - \\ & 2 \sum_{i=1}^N \alpha_i \left(\int_{t-\tau(t)}^t e_i^T(s) e_i(s) ds \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (12)$$

对于 $LV_2(t)$, 经向量计算可得

$$\begin{aligned} LV_2(t) = & 2c_1 \sum_{k=1}^n e^k(t)^T A e^k(t - \tau(t)) + \\ & 2c_2 \sum_{k=1}^n e^k(t)^T B (\tilde{G}(y^k(t)) - \tilde{G}(v^k(t))) - \\ & 2 \sum_{k=1}^n e^k(t)^T L^* e^k(t) + \sum_{k=1}^n e^k(t)^T e^k(t) - \\ & (1 - \dot{\tau}(t)) \sum_{k=1}^n e^k(t - \tau(t))^T e^k(t - \tau(t)). \end{aligned} \quad (13)$$

记 $\phi_k(m) = g_k(m) - \xi m$, 因 $g_k(\cdot) \in \text{NCF}(\xi, \delta)$,

则有

$$\begin{aligned} & 2c_2 \sum_{k=1}^n e^k(t)^T B (\tilde{G}(y^k(t)) - \tilde{G}(v^k(t))) = \\ & 2\xi c_2 \sum_{k=1}^n e^k(t)^T B e^k(t) + 2c_2 \sum_{k=1}^n e^k(t)^T B \times \\ & (\tilde{\phi}(y^k(t)) - \tilde{\phi}(v^k(t))). \end{aligned} \quad (14)$$

由于矩阵 B 满足零行和, 根据引理1和引理3可得

$$\begin{aligned} & 2c_2 \sum_{k=1}^n e^k(t)^T B (\tilde{\phi}(y^k(t)) - \tilde{\phi}(v^k(t))) \leq \\ & c_2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{\beta} e^k(t)^T B^T B e^k(t) + \\ & c_2 \sum_{k=1}^n \beta (\tilde{\phi}(y^k(t)) - \tilde{\phi}(v^k(t)))^T T \times \\ & (\tilde{\phi}(y^k(t)) - \tilde{\phi}(v^k(t))) \leq \\ & c_2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{\beta} e^k(t)^T B^T B e^k(t) - \\ & 2c_2 \sum_{k=1}^n \beta \sum_{j>i} t_{ij} [(\phi_k(y_j^k(t)) - \phi_k(v_{\mu_j}^k(t)))^2 + \\ & (\phi_k(y_i^k(t)) - \phi_k(v_{\mu_i}^k(t)))^2] \leq \\ & c_2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{\beta} e^k(t)^T B^T B e^k(t) - \\ & 2c_2 \delta^2 \sum_{k=1}^n \beta \sum_{j>i} t_{ij} (e_j^k(t)^2 - e_i^k(t)^2) = \\ & c_2 e^k(t)^T \left[\frac{1}{\beta} B B^T + 2\delta^2 \beta \left(1 - \frac{1}{N}\right) I_N \right] e_k(t). \end{aligned} \quad (15)$$

结合式(13)–(15), 可以推导出

$$\begin{aligned} LV_2(t) \leq & 2c_1 \sum_{k=1}^n e^k(t)^T A e^k(t - \tau(t)) + \\ & \sum_{k=1}^n e^k(t)^T \left(c_2 \left(\frac{1}{\beta} B^T B + 2\beta \delta^2 \left(1 - \frac{1}{N}\right) I_N \right) - \right. \\ & \left. 2L^* + I_N \right) e_k(t) - (1 - \mu) \sum_{k=1}^n e^k(t - \tau(t))^T \times \\ & I_N e^k(t - \tau(t)). \end{aligned} \quad (16)$$

对于 $LV_3(t)$, 由引理2可得

$$\begin{aligned}
& 2 \sum_{i=1}^N P_{\mu_i} \|D_{\mu_i}\| \sum_{k=1}^n |e_i^k(t)| - 2\rho \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^n |e_i^k(t)| \leq \\
& 2 \sum_{i=1}^N (P_{\mu_i} \|D_{\mu_i}\| - \rho) \left(\sum_{k=1}^n |e_i^k(t)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\
& 2 \max_{1 \leq i \leq N} (P_{\mu_i} \|D_{\mu_i}\| - \rho) \left(\sum_{i=1}^N \|e_i(t)\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (17)
\end{aligned}$$

由不等式的性质, 容易得到 $|l_i(t)| + \hat{l} \geq |l_i(t)| + |l_i^*| \geq |l_i(t) - l_i^*|$, 则有

$$\begin{aligned}
& -2 \sum_{i \in \bar{A}_{\mu_i}} \eta_i (|l_i(t)| + \hat{l}) \leq -2 \sum_{i \in \bar{A}_{\mu_i}} \eta_i |l_i(t) - l_i^*| \leq \\
& -2 \min_{1 \leq i \leq N} (\eta_i \varepsilon_i^{\frac{1}{2}}) \sum_{i \in \bar{A}_{\mu_i}} \left(\frac{1}{\varepsilon_i} |l_i(t) - l_i^*|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\
& -2 \min_{1 \leq i \leq N} (\eta_i \varepsilon_i^{\frac{1}{2}}) \left(\sum_{i \in \bar{A}_{\mu_i}} \frac{1}{\varepsilon_i} |l_i(t) - l_i^*|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (18)
\end{aligned}$$

结合式(17)–(18)并根据引理2, 可以得到

$$\begin{aligned}
LV_3(t) & \leq -2\vartheta_1 \left(\sum_{i=1}^N \|e_i(t)\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} - \\
& 2\vartheta_2 \left(\sum_{i \in \bar{A}_{\mu_i}} \frac{1}{\varepsilon_i} |l_i(t) - l_i^*|^2 \right)^{\frac{1}{2}} - \\
& 2\vartheta_3 \left(\sum_{i=1}^N \int_{t-\tau(t)}^t e_i^T(s) e_i(s) ds \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\
& -2\vartheta V(t)^{\frac{1}{2}}. \quad (19)
\end{aligned}$$

整合式(10)–(16)和式(19), 令 $\varsigma = \lambda_{\max}(E_{\mu_i}^T + E_{\mu_i}) + 2J_{\mu_i} \|D_{\mu_i}\| \|M_{\mu_i}\| - 2z$, 可以得到

$$\begin{aligned}
& LV_1(t) + LV_2(t) + LV_3(t) \leq \\
& \sum_{i=1}^N e_i(t)^T \times (E_{\mu_i}^T + E_{\mu_i} + (2J_{\mu_i} \|D_{\mu_i}\| \|M_{\mu_i}\| - \\
& 2z) I_n) e_i(t) + [e^k(t)^T \ e^k(t - \tau(t))^T] \\
& \Delta [e^k(t)^T \ e^k(t - \tau(t))^T]^T - 2\vartheta V(t)^{\frac{1}{2}} \leq \\
& \varsigma \sum_{i=1}^N e_i(t)^T e_i(t) - 2\vartheta V(t)^{\frac{1}{2}} + \\
& [e^k(t)^T \ e^k(t - \tau(t))^T] \Delta [e^k(t)^T \ e^k(t - \tau(t))^T]^T, \quad (20)
\end{aligned}$$

其中常数 $z > 0$,

$$\Delta = \begin{bmatrix} c_2 \pi - 2L^* + (2z + 1)I_N & c_1 A \\ c_1 A^T & -(1 - \mu)I_N \end{bmatrix},$$

根据定理中条件可以推导出

$$L_f(V(t)) \leq -2\vartheta V(t)^{\frac{1}{2}}. \quad (21)$$

应用引理4, 可得 $\zeta(V(t)) = 2\vartheta V(t)^{\frac{1}{2}}$, 其中 $\kappa = 2\vartheta > 0$, $\theta = \frac{1}{2}$, 则同步收敛时间可以估计为

$$T = \frac{V^{1-\frac{1}{2}}(0)}{2\vartheta(1-\frac{1}{2})} = \frac{V^{\frac{1}{2}}(0)}{\vartheta}.$$

综上可知, $V(t) > 0$, $L_f(V(t)) \leq -2\vartheta V(t)^{\frac{1}{2}}$, 由

Lyapunov稳定性定理及引理4可知, 被控误差网络的状态轨迹在 $\forall t \geq T$ 是稳定的, 有 $e_i(t) \rightarrow 0$, $l_i(t) \rightarrow l_i^*$, 也就是说, 在控制器(4)和自适应更新定律(5)的作用下, 非连续Lur'e网络(1)和目标Lur'e系统(2)能在同步收敛时间 T 内达到聚类同步, 且时变控制强度 $l_i(t)$ 将增大到其最优值 l_i^* 并保持恒定. 证毕.

注3 在已知的复杂网络有限时间同步控制的研究中^[9, 19–20], 都假定系统本身的非线性连续函数 $f_{\mu_i}(\cdot)$ 满足线性化条件(又称扇形条件), 即 $\dot{f}_{\mu_i}(\cdot) \in [a_1, a_2]$ 或者 $a_1 \leq [(f_{\mu_i}(s) - f_{\mu_i}(z))/(s - z)] \leq a_2$, 其中 a_1, a_2 是已知的非负常数. 虽然, 扇形条件是极常用的一种非线性函数线性化方法, 但在本文中, 为了反应系统的真实情况且扩展应用范围, 研究一类由非连续Lur'e系统耦合而成的复杂网络(1). 由此, 引入Filippov集值映射的定义将不连续的函数 $f_{\mu_i}(\cdot)$ 转变为Filippov集值映射函数 $\mathbb{F}[f_{\mu_i}]$, $\mathbb{F}[f_{\mu_i}]$ 将某一点 $f_{\mu_i}(m)$ 映射成为一个集合 $\mathbb{F}[f_{\mu_i}](m)$, 然后从集合中选择一个可测函数来保证不连续函数的一般解. 由于测度选择定理, 即使对于同一不连续的点, 可测函数的选择也不是唯一的. 因此, 本文用 $P_{\mu_i} (\neq 0)$ 来表示这些可测函数之间的差异. 综上分析, 给出假设2对非线性函数 $f_{\mu_i}(\cdot)$ 进行Filippov意义下的线性化. 对假设2进行变换, 可得

$$0 \leq \frac{\sup_i \|u_{\mu_i} - d_{\mu_i}\|}{\|s - z\|} \leq J_{\mu_i} + P_{\mu_i} \|s - z\|^{-1},$$

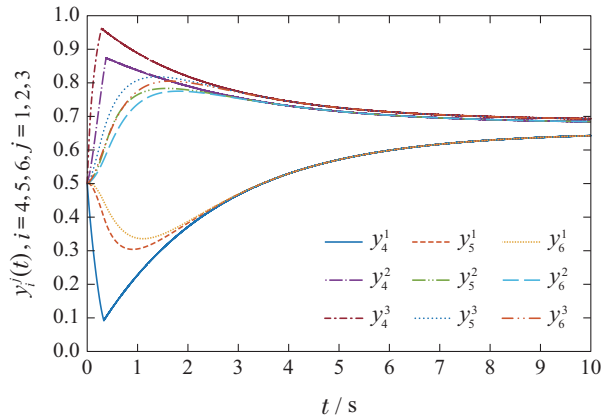
其等价于 $\dot{f}_{\mu_i} \in [0, J_{\mu_i} + P_{\mu_i} \|s - z\|^{-1}]$, 由于 s, z 为随时间变化的向量, 故项 $J_{\mu_i} + P_{\mu_i} \|s - z\|^{-1}$ 是一个不确定的数, 即对于不连续的Lur'e系统, 将无法找到一个统一的值 a 使 $\dot{f}_{\mu_i}(\cdot) \in [0, a]$, 这解释了为什么对于不连续Lur'e系统扇形条件将不再适用.

注4 在复杂网络的有限时间同步问题中, 控制器通常设计为 $-\rho \cdot \text{sgn}(e_i(t)) |e_i(t)|^\alpha$, $0 \leq \alpha \leq 1$, 本文将根据 α 的不同取值分3种情况进行讨论. 首先, 当 $\alpha = 0$ 时, 控制器为 $-\rho \cdot \text{sgn}(e_i(t))$, 由于符号函数 $\text{sgn}(\cdot)$ 的存在, 此控制器是不连续的, 这种控制器专为不连续系统设计, 能抵消因应用测度选择定理造成的差异性; 其次, 当 $0 < \alpha < 1$ 时, 控制器是连续的, 此控制器将主要应用于连续系统中; 最后, 当 $\alpha = 1$ 时, 控制器为 $-\rho \cdot e_i(t)$, 这是一个典型的线性负反馈控制器, 主要用于解决系统的渐进稳定问题.

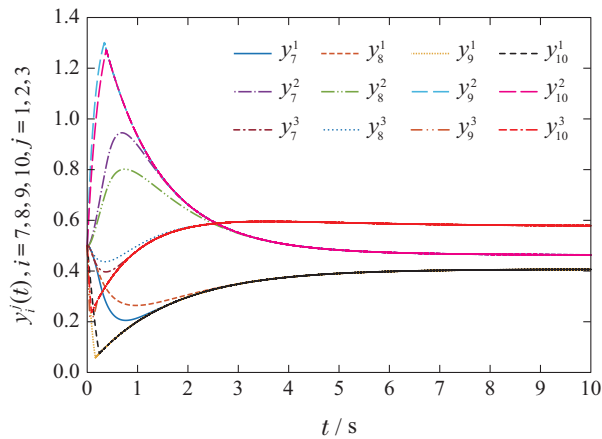
注5 在文献[7–9, 19–21]中, 对有限时间同步问题进行了相应的研究. 特别地, 在笔者先前的工作^[21]中, 对非连续复杂网络的有限时间同步问题进行了讨论, 但在网络的模型和控制器中并没有考虑系统中存在的时间延迟, 而时间延迟会导致系统振荡及发散等问题, 从而对系统性能造成一定的影响. 因此, 在本文中, 考虑了非恒同带时变时滞的网络模型, 并且分别在控制器和Lyapunov函数中设计项

$$\begin{aligned}
& \alpha_i \Omega(e_i(t)) \left(\int_{t-\tau(t)}^t e_i^T(s) e_i(s) ds \right)^{\frac{1}{2}}, \\
& \sum_{i=1}^N \int_{t-\tau(t)}^t e_i^T(s) e_i(s) ds
\end{aligned}$$

来实现带耦合时滞网络的有限时间同步. 同时, 在文献[21]的数值模拟部分, 控制器控制强度被设置为固定的 $d_3 = 1.5$, $d_4 = 2$, 这往往会大于实际所需的控制强度. 为了有效的节省控制成本, 本文在控制器(4)中针对时变控制强度 $l_i(t)$ 设计了相



(b) 聚类2中Lur'e系统状态演化曲线



(c) 聚类3中Lur'e系统状态演化曲线

图2 3个聚类中Lur'e系统状态演化曲线

Fig. 2 The state evolution curves of Lur'e systems in three clusters

图3表示3个聚类的同步误差曲线. 显然, 在同步收敛时间 T 内, 误差曲线趋近于零. 最后, 图4给出了自适应控制强度 $l_i(t)$ 的演化曲线. 以上数值仿真说明了非连续Lur'e网络在所设计的控制器和自适应更新定律下能够实现有限时间的聚类同步, 证明了本文结论的有效性.

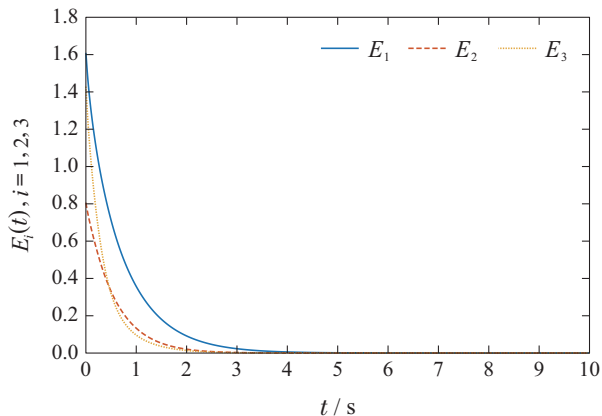
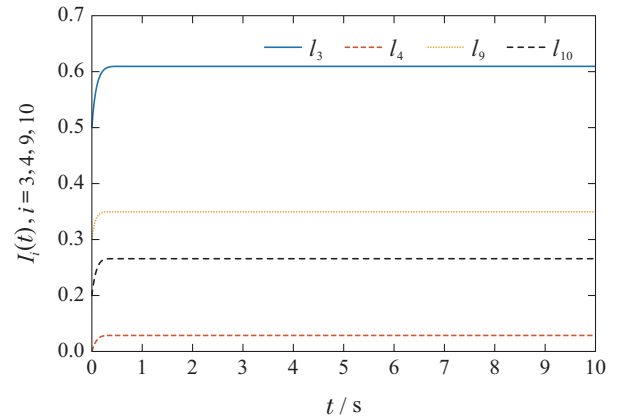


图3 3个聚类的同步误差曲线

Fig. 3 Synchronization error curves of three clusters

图4 自适应控制强度 $l_i(t)$ 的演化曲线Fig. 4 Adaptive control strength $l_i(t)$ evolution curves

5 结论

本文研究了一类非连续具有时变时滞耦合的Lur'e复杂网络的有限时间聚类同步问题. 针对非连续Lur'e系统函数, 本文引入了Filippov微分包含理论, 并且设计了有效的牵制控制器. 通过充分考虑Lyapunov稳定性定理及有限时间稳定性理论, 得到了该网络在有限时间内达到聚类同步的充分判据, 同时给出了网络达到聚类同步的收敛时间的估计. 此外, 针对时变反馈强度, 本文设计了自适应更新定律以获得最优控制强度. 最后, 数值仿真的结果充分验证了本文控制器设计及同步判据的有效性和可行性. 此外, 具有多重脉冲效应和受到随机扰动下非连续复杂网络的有限时间聚类同步问题将会是今后的研究重点之一. 同时, 拓宽文中处理非连续网络方法的应用条件也是未来需要解决的问题.

参考文献:

- [1] BARABASI A L, OLTVAI Z N. Network biology: understanding the cell's functional organization. *Nature Reviews Genetics*, 2004, 5(2): 101 – 113.
- [2] SANDERSON D J, PEACOCK D C, NIXON C W, et al. Graph theory and the analysis of fracture networks. *Journal of Structural Geology*, 2019, 125: 155 – 165.
- [3] REN Hongwei, DENG Feiqi. Review on synchronization control in stochastic complex networks. *Control Theory & Applications*, 2017, 34(10): 1261 – 1274.
(任红卫, 邓飞其. 随机复杂网络同步控制研究进展综述. *控制理论与应用*, 2017, 34(10): 1261 – 1274.)
- [4] LI H L, CAO J D, HU C, et al. Global synchronization between two fractional-order complex networks with non-delayed and delayed coupling via hybrid impulsive control. *Neurocomputing*, 2019, 356: 31 – 39.
- [5] LIU Jinglin, FENG Mingku. Cluster synchronization in fractional-order chaotic network via nonlinear pinning control. *Control Theory & Applications*, 2015, 32(7): 942 – 948.
(刘景琳, 冯明库. 基于非线性牵制控制的分数阶混沌网络聚类同步. *控制理论与应用*, 2015, 32(7): 942 – 948.)
- [6] NOVICENKO V, RATAS I. In-phase synchronization in complex oscillator networks by adaptive delayed feedback control. *Physical Review E*, 2018, 98(4): 042302.

- [7] YU W G. Finite-time stabilization of three-dimensional chaotic systems based on CLF. *Physics Letters A*, 2010, 374(30): 3021 – 3024.
- [8] XIONG Jingjing, ZHANG Guobao. Finite-time synchronization of nonidentical neural networks with time-varying delay based on integral sliding mode control. *Control and Decision*, 2019, 34(7): 1559 – 1564.
(熊晶晶, 章国宝. 基于积分滑模控制的非理想变时滞神经网络有限时间同步. *控制与决策*, 2019, 34(7): 1559 – 1564.)
- [9] ZHANG H C, SONG A G, SHEN S B. Adaptive finite-time synchronization-slave synchronization of chaotic Lur'e systems with varying time delays. *IEEE Access*, 2018, 6: 40940 – 40949.
- [10] WANG Y Y, ZHU Y Z, ZHU Y X. On aperiodic event-triggered master-slave synchronization of chaotic Lur'e systems. *Journal of the Franklin Institute-engineering and Applied Mathematics*, 2019, 356(17): 10576 – 10592.
- [11] TANG Z, PARK J H, ZHENG W X. Distributed impulsive synchronization of Lur'e dynamical networks via parameter variation methods. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2018, 28(3): 1001 – 1015.
- [12] YANG X S, CAO J D. Exponential synchronization of delayed neural networks with discontinuous activations. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 2013, 60(9): 2431 – 2439.
- [13] DAS P, DAS P, KUNDU A. Delayed feedback controller based finite time synchronization of discontinuous neural networks with mixed time-varying delays. *Neural Processing Letters*, 2019, 49(2): 693 – 709.
- [14] PARK J H, TANG Z, FENG J W. Pinning cluster synchronization of delay-coupled Lur'e dynamical networks in a convex domain. *Nonlinear Dynamics*, 2017, 89(1): 623 – 638.
- [15] FORTI M, NISTRI P. Global convergence of neural networks with discontinuous neuron activations. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I-regular Papers*, 2003, 50(11): 1421 – 1435.
- [16] FILIPPOV A F. *Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides*. New York: Kluwer Academic Publishers, 1988.
- [17] FENG J W, TANG Z, ZHAO Y, et al. Cluster synchronisation of nonlinearly coupled Lur'e networks with identical and non-identical nodes and an asymmetrical coupling matrix. *IET Control Theory and Applications*, 2013, 7(18): 2117 – 2127.
- [18] WANG J Y, FENG J W, XU C, et al. Cluster synchronization of nonlinearly-coupled complex networks with nonidentical nodes and asymmetrical coupling matrix. *Nonlinear Dynamics*, 2012, 67(2): 1635 – 1646.
- [19] LIU X H, YU X H, XI H S. Finite-time synchronization of neutral complex networks with Markovian switching based on pinning controller. *Neurocomputing*, 2015, 153: 148 – 158.
- [20] BHAT S P, BERNSTEIN D S. Finite-time stability of continuous autonomous systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2000, 38(3): 751 – 766.
- [21] TANG Z, PARK J H, SHEN H. Finite-time cluster synchronization of Lur'e networks: a nonsmooth approach. *IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics: Systems*, 2018, 48(8): 1213 – 1224.

作者简介:

汤 泽 博士, 副教授, 硕士生导师, 目前研究方向为复杂网络同步与控制、非线性系统稳定性分析和微分动力系统与应用等, E-mail: tangze0124@jiangnan.edu.cn;

高 悦 硕士研究生, 目前研究方向为复杂网络同步控制, E-mail: 6191913001@stu.jiangnan.edu.cn;

王 艳 教授, 博士生导师, 教育部“长江学者奖励计划”青年学者, 江苏省杰出青年基金获得者, 江苏省“333”高层次人才工程第二层次人选, 山东省泰山产业领军人才, 江苏省“青蓝工程”中青年学术带头人, 目前研究方向为网络化控制系统、物联网控制系统与智能制造等, E-mail: wangyan@jiangnan.edu.cn;

丰建文 教授, 博士生导师, 目前研究方向为复杂动态网络控制、微分动力系统及其应用等, E-mail: fengjw@szu.edu.cn.